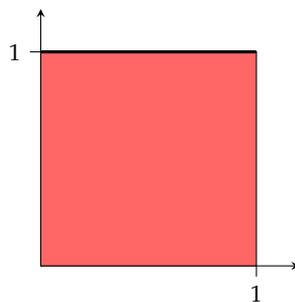


Kapitel 10

Integration

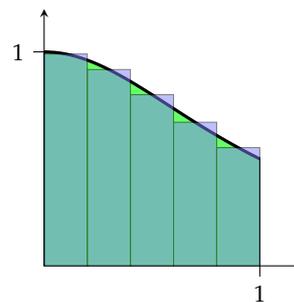
Flächeninhalt

Berechnen Sie die Inhalte der angegebenen Flächen!



$$f(x) = 1$$

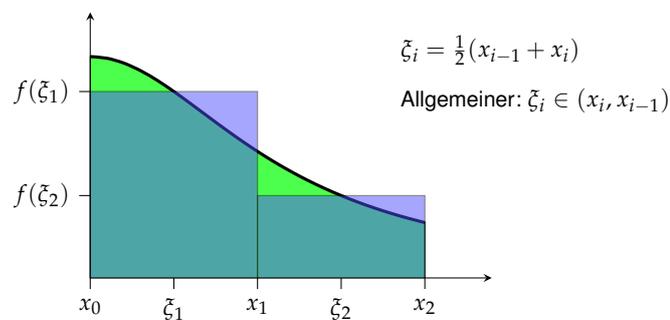
$$\text{Fläche: } A = 1$$



$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

Approximation
durch Treppenfunktion

Riemann-Summen

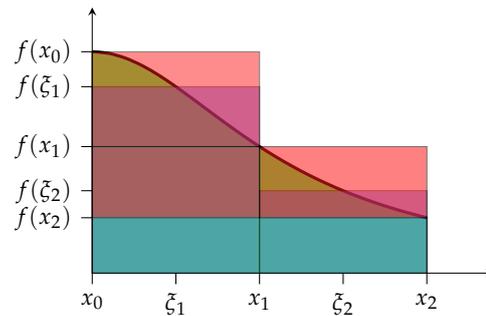


$$\xi_i = \frac{1}{2}(x_{i-1} + x_i)$$

Allgemeiner: $\xi_i \in (x_i, x_{i-1})$

$$A = \int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1})$$

Approximationsfehler



$$\left| \int_a^b f(x) dx - \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) \right| \leq (f_{\max} - f_{\min}) (b - a) \frac{1}{n} \rightarrow 0$$

Annahme: Funktion monoton; x_0, x_1, \dots, x_n äquidistant

Riemann-Integral

Falls die **Riemann-Summen**

$$I_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1})$$

eine konvergente Folge bilden, dann heißt deren Grenzwert das

Riemann-Integral von f . Notation: $\int_a^b f(x) dx$

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1})$$

Alle für uns relevanten Funktionen besitzen ein Riemann-Integral.

Riemann-Integral und Erwartungswert

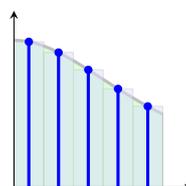
Angenommen eine stetige Zufallsvariable X mit Dichte f kann nur als diskrete Zufallsvariable D mit Wahrscheinlichkeitsfunktion w beobachtet werden. (**Klassifizieren** in n Klassen)

Sei $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$ Klassenrepräsentant mit Wahrscheinlichkeit

$$w(\xi_i) = P(D = \xi_i) = P(x_{i-1} < X \leq x_i) \approx f(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1})$$

Für den Erwartungswert von D gilt dann

$$E[D] \approx \sum_{i=1}^n \xi_i \cdot f(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) \approx \int_a^b x \cdot f(x) dx = E[X]$$



Riemann-Integral – Eigenschaften

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx$$

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

$$\int_a^a f(x) dx = 0$$

$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx$$

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx \quad \text{falls } f(x) \leq g(x) \text{ für alle } x \in [a, b]$$

Stammfunktion

Eine Funktion $F(x)$ heißt **Stammfunktion** einer Funktion $f(x)$, falls

$$F'(x) = f(x)$$

Berechnung:

Vermuten und Verifizieren

Beispiel: Wir suchen die Stammfunktion von $f(x) = \ln(x)$.

Vermuten: $F(x) = x(\ln(x) - 1)$

Verifizieren: $F'(x) = (x(\ln(x) - 1))' =$
 $= 1 \cdot (\ln(x) - 1) + x \cdot \frac{1}{x} = \ln(x)$

Aber auch: $F(x) = x(\ln(x) - 1) + 5$

Stammfunktion

Die Stammfunktion wird mit dem Symbol

$$\int f(x) dx + c$$

bezeichnet und wird meist als das **unbestimmte Integral** der Funktion f bezeichnet. Die Zahl c heißt **Integrationskonstante**.

Für das Suchen von Stammfunktionen gibt es keine „Kochrezepte“ (sondern nur Werkzeuge, die man durchprobieren kann).

Es gibt Funktionen, deren Stammfunktionen sich nicht durch elementare Funktionen ausdrücken lassen.

E.g., die Stammfunktion von $\exp(-\frac{1}{2}x^2)$.

Grundintegrale

Zur Erleichterung gibt es Tabellen mit bekannten Stammfunktionen, sogenannten **Grundintegralen**:

$f(x)$	$\int f(x) dx$
0	c
x^a	$\frac{1}{a+1} \cdot x^{a+1} + c$
e^x	$e^x + c$
$\frac{1}{x}$	$\ln x + c$
$\cos(x)$	$\sin(x) + c$
$\sin(x)$	$-\cos(x) + c$

Integrationsverfahren

► Summenregel

$$\int \alpha f(x) + \beta g(x) dx = \alpha \int f(x) dx + \beta \int g(x) dx$$

► Partielles Integrieren

$$\int f \cdot g' dx = f \cdot g - \int f' \cdot g dx$$

► Substitution

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) dx = \int f(z) dz$$

mit $z = g(x)$ und $dz = g'(x) dx$

Beispiel – Summenregel

Stammfunktion von $f(x) = 4x^3 - x^2 + 3x - 5$.

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= \int 4x^3 - x^2 + 3x - 5 dx \\ &= 4 \int x^3 dx - \int x^2 dx + 3 \int x dx - 5 \int dx \\ &= 4 \frac{1}{4} x^4 - \frac{1}{3} x^3 + 3 \frac{1}{2} x^2 - 5x + c \\ &= x^4 - \frac{1}{3} x^3 + \frac{3}{2} x^2 - 5x + c \end{aligned}$$

Beispiel – Partielles Integrieren

Stammfunktion von $f(x) = x \cdot e^x$.

$$\int \underbrace{x}_f \cdot \underbrace{e^x}_{g'} dx = \underbrace{x}_f \cdot \underbrace{e^x}_g - \int \underbrace{1}_{f'} \cdot \underbrace{e^x}_g dx = x \cdot e^x - e^x + c$$

$$\begin{aligned} f = x &\Rightarrow f' = 1 \\ g' = e^x &\Rightarrow g = e^x \end{aligned}$$

Beispiel – Partielles Integrieren

Stammfunktion von $f(x) = x^2 \cos(x)$.

$$\int \underbrace{x^2}_f \cdot \underbrace{\cos(x)}_{g'} dx = \underbrace{x^2}_f \cdot \underbrace{\sin(x)}_g - \int \underbrace{2x}_{f'} \cdot \underbrace{\sin(x)}_g dx$$

Partielles Integrieren des zweiten Terms ergibt:

$$\begin{aligned} \int \underbrace{2x}_f \cdot \underbrace{\sin(x)}_{g'} dx &= \underbrace{2x}_f \cdot \underbrace{(-\cos(x))}_g - \int \underbrace{2}_{f'} \cdot \underbrace{(-\cos(x))}_g dx \\ &= -2x \cdot \cos(x) - 2 \cdot (-\sin(x)) + c \end{aligned}$$

Die Stammfunktion von f lautet daher:

$$\int x^2 \cos(x) dx = x^2 \sin(x) + 2x \cos(x) - 2 \sin(x) + c$$

Beispiel – Substitution

Stammfunktion von $f(x) = 2x \cdot e^{x^2}$.

$$\int \exp(\underbrace{x^2}_{g(x)}) \cdot \underbrace{2x}_{g'(x)} dx = \int \exp(z) dz = e^z + c = e^{x^2} + c$$

$$z = g(x) = x^2 \Rightarrow dz = g'(x) dx = 2x dx$$

Integrationsverfahren – Herleitung

Partielles Integrieren erhält man aus der Produktregel für das Differenzieren:

$$\begin{aligned} f(x) \cdot g(x) &= \int (f(x) \cdot g(x))' dx = \int (f'(x)g(x) + f(x)g'(x)) dx \\ &= \int f'(x)g(x) dx + \int f(x)g'(x) dx \end{aligned}$$

Substitution folgt aus der Kettenregel:

Sei F eine Stammfunktion von f und $z = g(x)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \int f(z) dz &= F(z) = F(g(x)) = \int (F(g(x)))' dx \\ &= \int F'(g(x))g'(x) dx = \int f(g(x))g'(x) dx \end{aligned}$$

Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Sei $F(x)$ eine Stammfunktion einer *stetigen* Funktion $f(x)$, dann gilt für das bestimmte **Integral**

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Dieser Satz erlaubt es uns, Integrale einfach mittels Stammfunktionen auszurechnen! (**Bestimmtes Integral**)

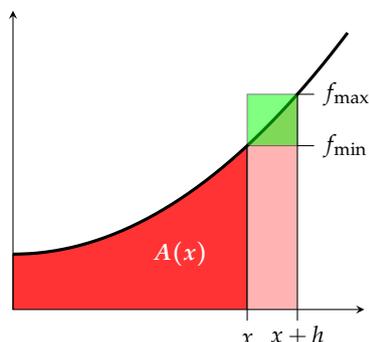
Beispiel:

Wir suchen das Integral der Funktion $f(x) = x^2$ im Intervall $[0,1]$.

$$\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3} x^3 \Big|_0^1 = \frac{1}{3} \cdot 1^3 - \frac{1}{3} \cdot 0^3 = \frac{1}{3}$$

Der Hauptsatz / Beweisidee

Sei $A(x)$ die Fläche zwischen dem Graphen einer stetigen Funktion f und der x -Achse zwischen 0 und x .



$$f_{\min} \cdot h \leq A(x+h) - A(x) \leq f_{\max} \cdot h$$

$$f_{\min} \leq \frac{A(x+h) - A(x)}{h} \leq f_{\max}$$

Grenzübergang $h \rightarrow 0$: $(\lim_{h \rightarrow 0} f_{\min} = f(x))$

$$f(x) \leq \lim_{h \rightarrow 0} \underbrace{\frac{A(x+h) - A(x)}{h}}_{=A'(x)} \leq f(x)$$

$$A'(x) = f(x)$$

d.h. $A(x)$ ist eine Stammfunktion von $f(x)$.

Integrationsverfahren / (2)

► Summenregel

$$\int_a^b \alpha f(x) + \beta g(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx$$

► Partielles Integrieren

$$\int_a^b f \cdot g' dx = f \cdot g \Big|_a^b - \int_a^b f' \cdot g dx$$

► Substitution

$$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(z) dz$$

mit $z = g(x)$ und $dz = g'(x) dx$

Beispiel

Berechne das bestimmte Integral $\int_e^{10} \frac{1}{\ln(x)} \cdot \frac{1}{x} dx$.

$$\int_e^{10} \frac{1}{\ln(x)} \cdot \frac{1}{x} dx = \int_1^{\ln(10)} \frac{1}{z} dz =$$

$$z = \ln(x) \Rightarrow dz = \frac{1}{x} dx$$

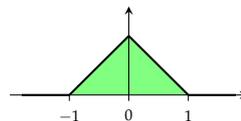
$$= \ln(z) \Big|_1^{\ln(10)} =$$

$$= \ln(\ln(10)) - \ln(1) \approx 0,834$$

Beispiel

Gesucht ist $\int_{-2}^2 f(x) dx$ für die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 1+x & \text{für } -1 \leq x < 0 \\ 1-x & \text{für } 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{für } x < -1 \text{ und } x \geq 1 \end{cases}$$



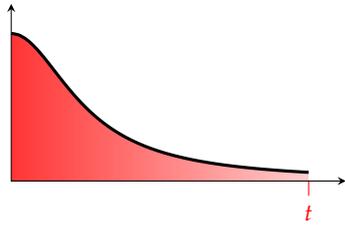
Es gilt

$$\begin{aligned} \int_{-2}^2 f(x) dx &= \int_{-2}^{-1} f(x) dx + \int_{-1}^0 f(x) dx + \int_0^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx \\ &= \int_{-2}^{-1} 0 dx + \int_{-1}^0 (1+x) dx + \int_0^1 (1-x) dx + \int_1^2 0 dx \\ &= \left(x + \frac{1}{2}x^2\right) \Big|_{-1}^0 + \left(x - \frac{1}{2}x^2\right) \Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \end{aligned}$$

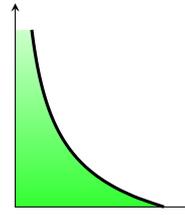
Uneigentliches Integral

Uneigentliche Integrale sind Integrale, bei denen

- ▶ das Integrationsintervall unbeschränkt ist, oder
- ▶ die Funktion unbeschränkt ist.



$$\int_0^{\infty} f(x) dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t f(x) dx$$



$$\int_0^1 f(x) dx = \lim_{t \rightarrow 0} \int_t^1 f(x) dx$$

Beispiele

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{t \rightarrow 0} \int_t^1 x^{-\frac{1}{2}} dx = \lim_{t \rightarrow 0} 2\sqrt{x} \Big|_t^1 = \lim_{t \rightarrow 0} (2 - 2\sqrt{t}) = 2$$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^t x^{-2} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} -\frac{1}{x} \Big|_1^t = \lim_{t \rightarrow \infty} -\frac{1}{t} - (-1) = 1$$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^t \frac{1}{x} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \ln(x) \Big|_1^t = \lim_{t \rightarrow \infty} \ln(t) - \ln(1) = \infty$$

Das uneigentliche Integral existiert somit nicht.

Zwei Limiten

In der Wahrscheinlichkeitstheorie wird oft über einen Bereich integriert, in dem beide Grenzen unbeschränkt sind. Z.B.:

Der Erwartungswert einer Zufallsvariable X mit Dichte f ist definiert als

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx$$

In diesem Fall müssen wir die beiden Grenzwerte getrennt auswerten:

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx \\ &= \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^0 x \cdot f(x) dx + \lim_{s \rightarrow \infty} \int_0^s x \cdot f(x) dx \end{aligned}$$

Achtung!

Tritt dabei als Zwischenresultat $\infty - \infty$ auf, so ist das Ergebnis **nicht** $\infty - \infty = 0$!

Leibniz Formel

Gegen sei eine *stetig differenzierbare* Funktion $f(x, t)$ und

$$F(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} f(x, t) dt$$

Dann gilt für die Ableitung

$$F'(x) = f(x, b(x)) b'(x) - f(x, a(x)) a'(x) + \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} dt$$

Falls $a(x) = a$ und $b(x) = b$ konstant sind, dann gilt insbesondere:

$$\frac{d}{dx} \int_a^b f(x, t) dt = \int_a^b \frac{\partial}{\partial x} f(x, t) dt$$

Beispiel

Sei $F(x) = \int_x^{2x} t x^2 dt$ für $x \geq 0$. Berechne $F'(x)$.

Wir setzen $f(x, t) = t x^2$, $a(x) = x$ und $b(x) = 2x$.

Dann gilt auf Grund der Leibniz Formel,

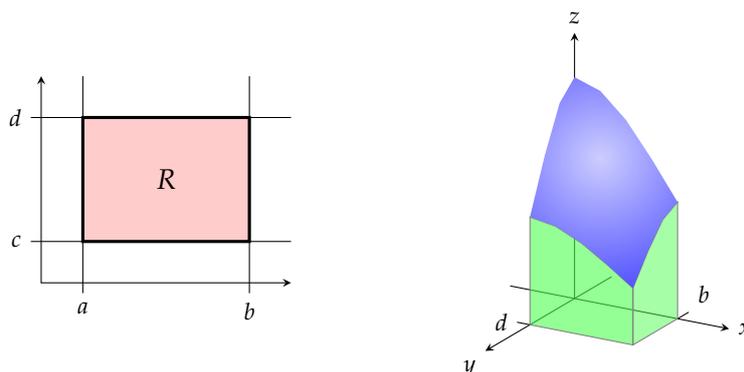
$$\begin{aligned} F'(x) &= f(x, b) \cdot b' - f(x, a) \cdot a' + \int_a^b f_x(x, t) dt \\ &= (2x) x^2 \cdot 2 - (x) x^2 \cdot 1 + \int_x^{2x} 2x t dt \\ &= 4x^3 - x^3 + (2x \frac{1}{2} t^2) \Big|_x^{2x} \\ &= 4x^3 - x^3 + (4x^3 - x^3) \\ &= 6x^3 \end{aligned}$$

Volumen

Sei $f(x, y)$ eine Funktion definiert über dem Rechteck

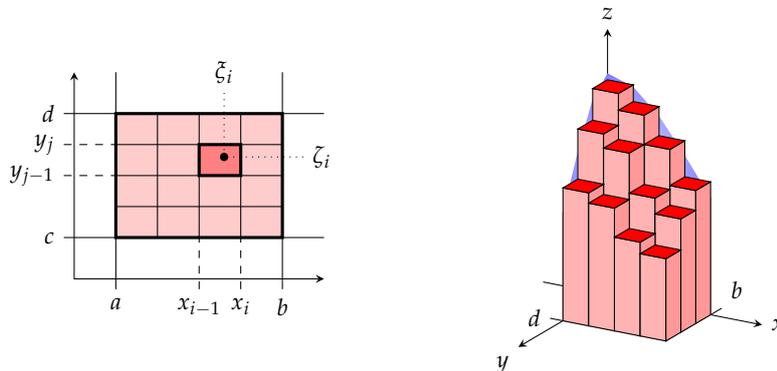
$$R = [a, b] \times [c, d] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$$

Wie groß ist das Volumen V unter dem Graphen von f ?



Riemann-Summen

- ▶ Zerlege R in kleine Rechtecke $R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$
- ▶ Berechne $V \approx \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k f(\xi_i, \zeta_j) (x_i - x_{i-1}) (y_j - y_{j-1})$



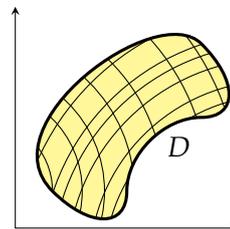
Riemann-Integral

Falls die **Riemann-Summe** für immer feinere Zerlegungen von R konvergiert, dann heißt dieser Grenzwert das **Riemann-Integral** von f über R :

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \lim_{n, k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k f(\xi_i, \zeta_j) (x_i - x_{i-1}) (y_j - y_{j-1})$$

Das Riemann-Integral ist analog auf beliebigen Gebieten D definiert.

$$\iint_D f(x, y) dx dy$$



Satz von Fubini

Sei $f: R = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ eine *stetige* Funktion. Dann gilt

$$\begin{aligned} \iint_R f(x, y) dx dy &= \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx \\ &= \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy . \end{aligned}$$

Der Satz von Fubini liefert uns ein Rezept zur Berechnung von Doppelintegralen:

1. Fasse x als Konstante auf und berechne das innere Integral $\int_c^d f(x, y) dy$.
2. Integriere das Ergebnis nach x .

Wir dürfen aber auch die Reihenfolge vertauschen und zuerst nach x und erst dann nach y integrieren.

Beispiel

Berechne $\int_{-1}^1 \int_0^1 (1 - x - y^2 + xy^2) dx dy$.

Wir müssen zweimal integrieren.

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 \int_0^1 (1 - x - y^2 + xy^2) dx dy \\ &= \int_{-1}^1 \left(x - \frac{1}{2}x^2 - xy^2 + \frac{1}{2}x^2y^2 \Big|_0^1 \right) dy \\ &= \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}y^2 \right) dy = \frac{1}{2}y - \frac{1}{6}y^3 \Big|_{-1}^1 \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{6} - \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{6} \right) = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Integrationsgrenzen

Achtung, die Integrationsvariable und die dazu gehörigen Integrationsgrenzen sind von **innen** nach **außen** zu lesen.

Wenn wir die Reihenfolge beim Integrieren vertauschen, dann müssen wir das auch in der Reihenfolge der Integrationsgrenzen berücksichtigen:

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy$$

Wir sehen das besser, wenn wir die (redundanten) Klammer einfügen:

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy .$$

Beispiel – Fortsetzung

Integration in umgekehrter Reihenfolge:

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 \int_0^1 (1 - x - y^2 + xy^2) dx dy \\ &= \int_0^1 \left(\int_{-1}^1 (1 - x - y^2 + xy^2) dy \right) dx \\ &= \int_0^1 \left(y - xy - \frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{3}xy^3 \Big|_{-1}^1 \right) dx \\ &= \int_0^1 \left(1 - x - \frac{1}{3} + \frac{1}{3}x - \left(-1 + x + \frac{1}{3} - \frac{1}{3}x \right) \right) dx \\ &= \int_0^1 \left(\frac{4}{3} - \frac{4}{3}x \right) dx = \frac{4}{3}x - \frac{4}{6}x^2 \Big|_0^1 = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

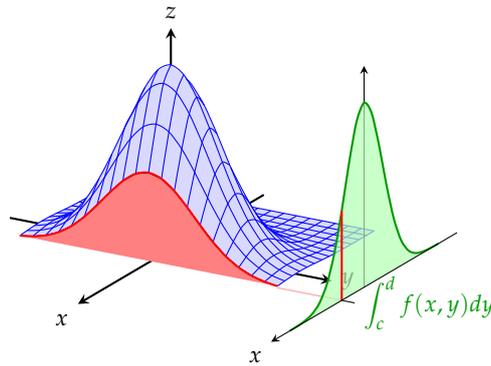
Satz von Fubini – Interpretation

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_a^b A(x) dx$$

Wenn wir x festhalten,
dann ist

$$A(x) = \int_c^d f(x, y) dy$$

die Fläche unter
 $g(y) = f(x, y)$.



Zusammenfassung

- ▶ Flächeninhalt und Riemann-Integral
- ▶ Stammfunktion
- ▶ Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung
- ▶ Integrationsverfahren
- ▶ Uneigentliches Integral
- ▶ Differenzieren unter dem Integral
- ▶ Volumen und Doppelintegral
- ▶ Satz von Fubini