

## Kapitel 1

# Logik, Mengen und Abbildungen

# Aussage

Um Mathematik betreiben zu können, sind ein paar Grundkenntnisse der **mathematischen Logik** erforderlich. Im Zentrum steht dabei die Aussage.

Eine **Aussage** ist ein Satz der entweder **wahr** (W) oder **falsch** (F) ist.

- ▶ „*Wien liegt an der Donau*“ ist eine wahre Aussage.
- ▶ „*Bill Clinton war Präsident der Republik Österreich*“ ist eine falsche Aussage.
- ▶ „*19 ist eine Primzahl*“ ist eine wahre Aussage.
- ▶ „*Dieser Satz ist falsch*“ ist keine Aussage.

# Elementare Aussageverbindungen

Die Aussagenlogik verknüpft einfache zu komplexeren Aussagen und gibt deren Wahrheitswert an.

Dies geschieht durch die aus der Alltagssprache bekannten Wörter „und“, „oder“, „nicht“, „wenn ... dann“, und „genau dann ... wenn“.

| Aussageverbindung        | Symbol                | Name        |
|--------------------------|-----------------------|-------------|
| nicht $P$                | $\neg P$              | Negation    |
| $P$ und $Q$              | $P \wedge Q$          | Konjunktion |
| $P$ oder $Q$             | $P \vee Q$            | Disjunktion |
| wenn $P$ dann $Q$        | $P \Rightarrow Q$     | Implikation |
| $P$ genau dann, wenn $Q$ | $P \Leftrightarrow Q$ | Äquivalenz  |

# Wahrheitswerte

Wahrheitswerte elementarer Aussageverbindungen.

| $P$ | $Q$ | $\neg P$ | $P \wedge Q$ | $P \vee Q$ | $P \Rightarrow Q$ | $P \Leftrightarrow Q$ |
|-----|-----|----------|--------------|------------|-------------------|-----------------------|
| W   | W   | F        | W            | W          | W                 | W                     |
| W   | F   | F        | F            | W          | F                 | F                     |
| F   | W   | W        | F            | W          | W                 | F                     |
| F   | F   | W        | F            | F          | W                 | W                     |

Aussagen  $P =$  „ $x$  ist durch 2 teilbar“ und  $Q =$  „ $x$  ist durch 3 teilbar“.  
Die Aussage  $P \wedge Q$  ist genau dann wahr, wenn  $x$  durch 2 und 3 teilbar ist.

# Negation und Disjunktion

- ▶ Die *Negation* (*Verneinung*)  $\neg P$  ist nicht das „Gegenteil“ der Aussage  $P$ .

Die Verneinung von  $P =$  „Alle Katzen sind grau“  
ist  $\neg P =$  „Nicht alle Katze sind grau“

(Und keinesfalls „Alle Katzen sind nicht grau“!)

- ▶ Die *Disjunktion*  $P \vee Q$  ist im *nicht-ausschließenden* Sinn gemeint:

$P \vee Q$  ist genau dann wahr, wenn  $P$  wahr ist, oder wenn  $Q$  wahr ist, oder wenn  $P$  und  $Q$  wahr sind.

# Implikation

Die Wahrheitswerte der *Implikation*  $P \Rightarrow Q$  erscheinen etwas mysteriös.

Beachte aber, dass  $P \Rightarrow Q$  keine Aussage über den Wahrheitswert von  $P$  oder  $Q$  macht!

Welche der beiden Aussagen ist wahr?

- ▶ „*Wenn* Bill Clinton österreichischer Staatsbürger ist, *dann* kann er zum Präsidenten der Republik Österreich gewählt werden.“
- ▶ „*Wenn* Karl österreichischer Staatsbürger ist, *dann* kann er zum Präsidenten der Republik Österreich gewählt werden.“

Die Implikation  $P \Rightarrow Q$  ist äquivalent zur Aussage  $\neg P \vee Q$ .

Symbolisch:

$$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg P \vee Q)$$

# Ein einfacher logischer Beweis

Wir können den Wahrheitswert der Aussage  $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg P \vee Q)$  mittels Wahrheitstabellen herleiten:

| $P$ | $Q$ | $\neg P$ | $(\neg P \vee Q)$ | $(P \Rightarrow Q)$ | $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg P \vee Q)$ |
|-----|-----|----------|-------------------|---------------------|---|
| W   | W   | F        | W                 | W                   | W   |
| W   | F   | F        | F                 | F                   | W   |
| F   | W   | W        | W                 | W                   | W   |
| F   | F   | W        | W                 | W                   | W   |

Die Aussage  $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg P \vee Q)$  ist also immer wahr, unabhängig von den Wahrheitswerten für  $P$  und  $Q$ .

Wir sagen daher, dass die beiden Aussagen  $P \Rightarrow Q$  und  $\neg P \vee Q$  äquivalent sind.

# Theoreme

*Mathematics consists of propositions of the form:  $P$  implies  $Q$ ,  
but you never ask whether  $P$  is true. (Bertrand Russell)*

Ein **mathematischer Satz** (*Theorem, Proposition, Lemma, Korollar*) ist eine Aussage der Form  $P \Rightarrow Q$ .

$P$  heißt dann eine **hinreichende** Bedingung für  $Q$ .

Eine *hinreichende* Bedingung  $P$  garantiert, dass die Aussage  $Q$  wahr ist.  $Q$  kann aber auch dann wahr sein, wenn  $P$  falsch ist.

$Q$  heißt dann eine **notwendige** Bedingung für  $P$ ,  $Q \Leftarrow P$ .

Eine *notwendige* Bedingung  $Q$  muss wahr sein, damit die Aussage  $P$  wahr sein kann. Sie garantiert nicht, dass  $P$  wahr ist.



# Quantoren

Mathematische Texte verwenden öfters die Ausdrücke „für alle“ bzw. „es existiert ein“.

In formaler Notation werden dafür folgende Symbole verwendet:

| Quantor                | Symbol     |
|------------------------|------------|
| für alle               | $\forall$  |
| es existiert ein       | $\exists$  |
| es existiert genau ein | $\exists!$ |

# Mengen\*

Der Begriff der *Menge* ist fundamental für die moderne Mathematik. Wir begnügen uns mit einer höchst einfachen Definition.

Eine **Menge** ist eine Sammlung von unterscheidbaren Objekten.

Ein Objekt  $a$  einer Menge  $A$  heißt **Element** der Menge:

$$a \in A$$

Mengen werden durch *Aufzählung* oder *Beschreibung* ihrer Elemente in *geschwungenen Klammern*  $\{\dots\}$  definiert.

$$A = \{1,2,3,4,5,6\}$$

$$B = \{x \mid x \text{ ist eine natürliche Zahl und durch 2 teilbar}\}$$

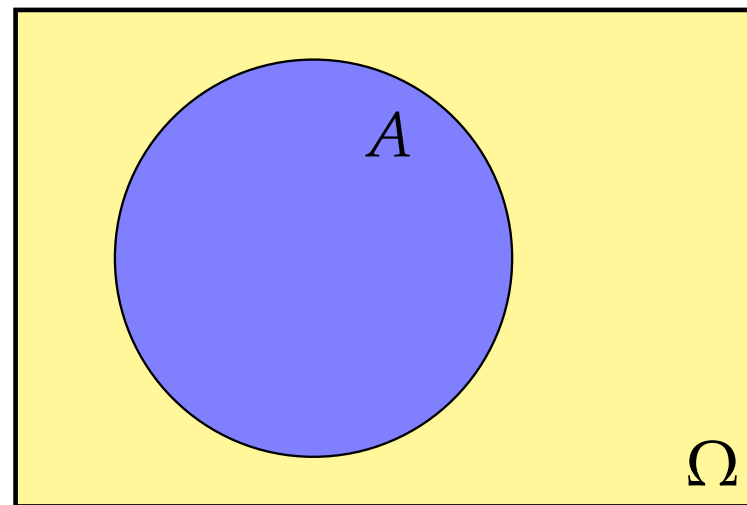
# Wichtige Mengen\*

| Symbol       | Beschreibung   |
|--------------|--|
| $\emptyset$  | leere Menge (nur in der Schule: $\{\}$ )   |
| $\mathbb{N}$ | natürliche Zahlen $\{1,2,3,\dots\}$  |
| $\mathbb{Z}$ | ganze Zahlen $\{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$                            |
| $\mathbb{Q}$ | rationale Zahlen, Bruchzahlen $\{\frac{k}{n} \mid k, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\}$ |
| $\mathbb{R}$ | reelle Zahlen  |
| $[a, b]$     | abgeschlossenes Intervall $\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$              |
| $(a, b)$     | offenes Intervall $\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$                            |
| $[a, b)$     | halboffenes Intervall $\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$                     |
| $\mathbb{C}$ | komplexe Zahlen  |

# Venn-Diagramme\*

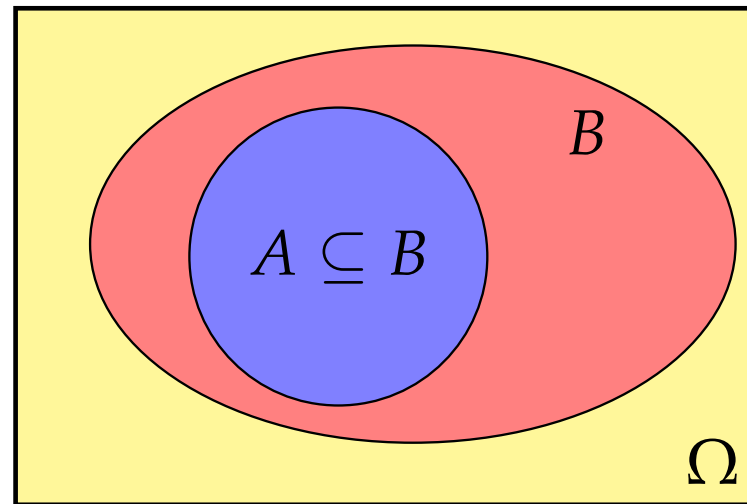
Beim Arbeiten mit Mengen nimmt man meist an, dass alle betrachteten Mengen Teilmengen einer vorgegebenen **Obermenge**  $\Omega$  sind.

Mengen können durch sogenannte **Venn-Diagramme** dargestellt werden. Die Obermenge wird durch ein Rechteck, die einzelnen Mengen durch Kreise oder Ovale dargestellt.



# Teilmenge\*

Eine Menge  $A$  heißt **Teilmenge** von  $B$ ,  $A \subseteq B$ , falls jedes Element von  $A$  auch Element von  $B$  ist, formal:  $x \in A \Rightarrow x \in B$ .



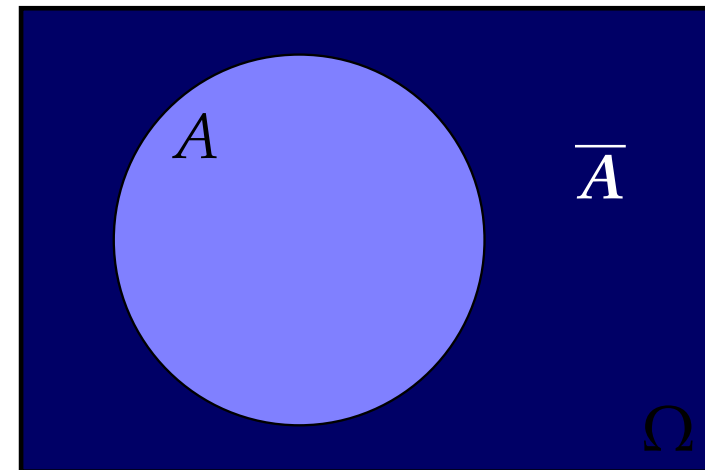
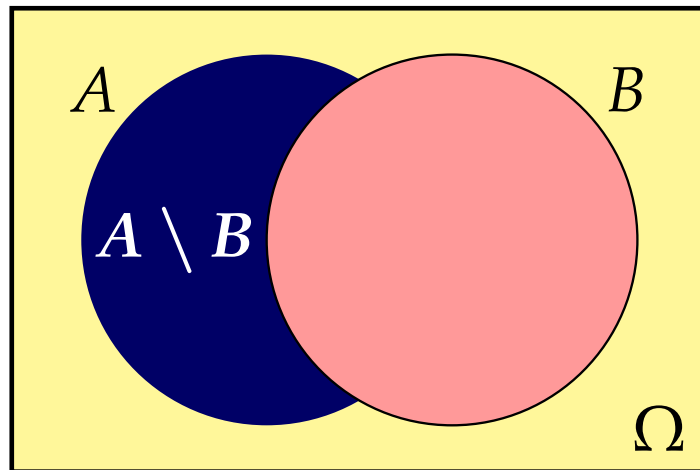
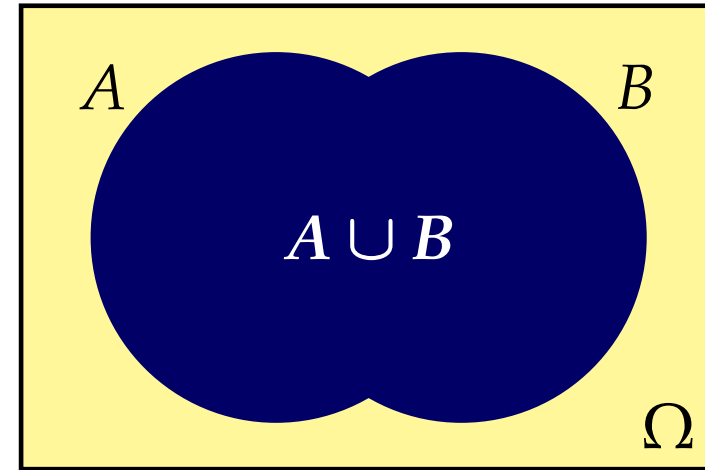
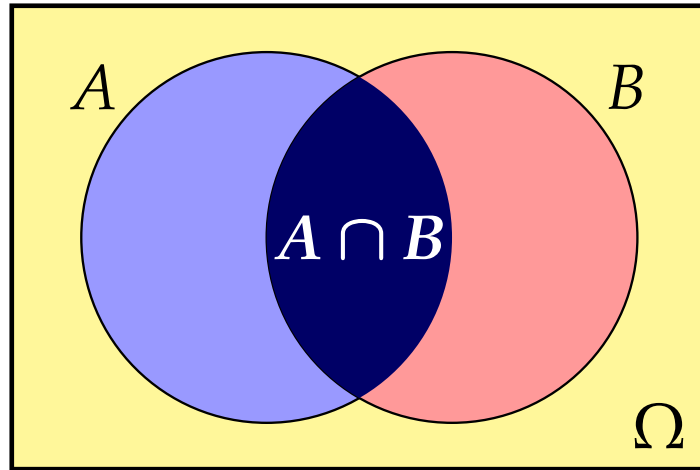
Eine Menge  $A$  heißt **echte Teilmenge** von  $B$ ,  $A \subset B$ , falls  $A \subseteq B$  und  $A \neq B$ .

# Mengenverknüpfungen\*

| Symbol          | Definition                             | Bezeichnung          |
|-----------------|--|----------------------|
| $A \cap B$      | $\{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$    | Durchschnitt         |
| $A \cup B$      | $\{x \mid x \in A \vee x \in B\}$      | Vereinigung          |
| $A \setminus B$ | $\{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$ | Mengendifferenz      |
| $\overline{A}$  | $\Omega \setminus A$                   | Komplement           |
| $A \times B$    | $\{(x, y) \mid x \in A, y \in B\}$     | Cartesisches Produkt |

Zwei Mengen  $A$  und  $B$  heißen **disjunkt** falls  $A \cap B = \emptyset$ .

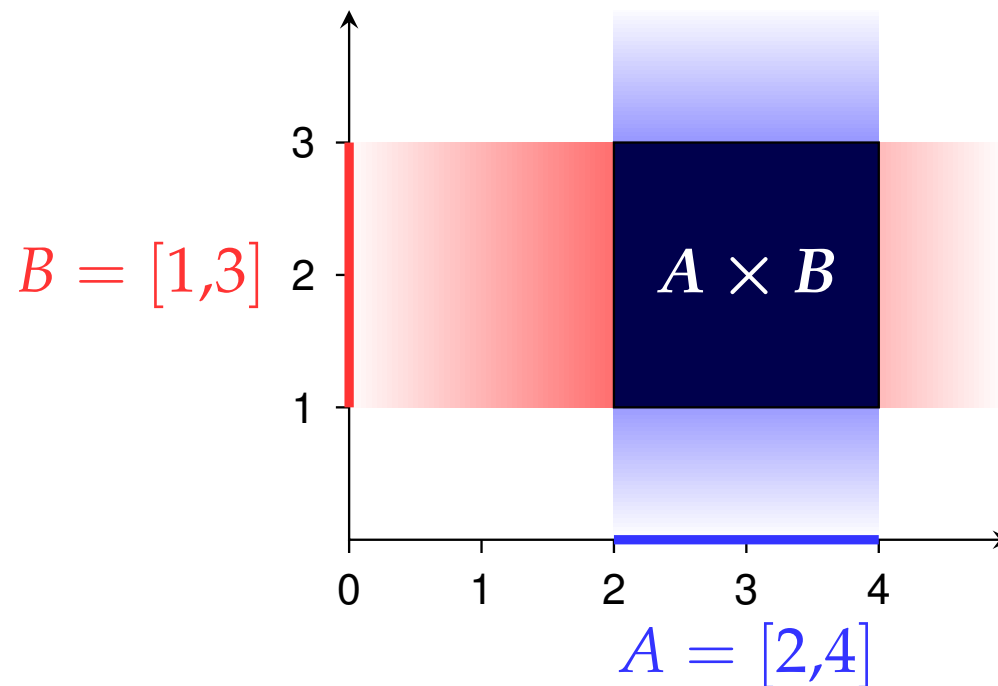
# Mengenverknüpfungen\*



# Cartesisches Produkt\*

Das Cartesische Produkt aus  $A = \{0,1\}$  und  $B = \{2,3,4\}$  ist  $A \times B = \{(0,2), (0,3), (0,4), (1,2), (1,3), (1,4)\}$ .

Das Cartesische Produkt aus  $A = [2,4]$  und  $B = [1,3]$  ist  $A \times B = \{(x,y) \mid x \in [2,4] \text{ und } y \in [1,3]\}$ .





# Rechenregeln für Mengenverknüpfungen\*

Regel

Bezeichnung

---

$$A \cup A = A \cap A = A$$

Idempotenz

$$A \cup \emptyset = A \quad \text{und} \quad A \cap \emptyset = \emptyset$$

Identität

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \quad \text{und} \\ (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

Assoziativität

$$A \cup B = B \cup A \quad \text{und} \quad A \cap B = B \cap A$$

Kommutativität

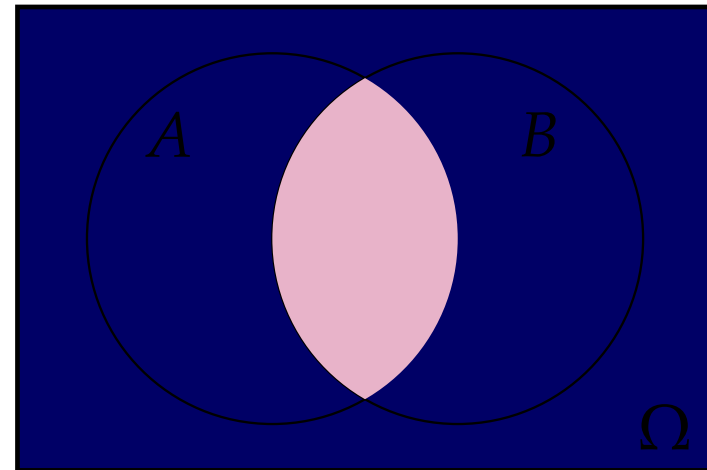
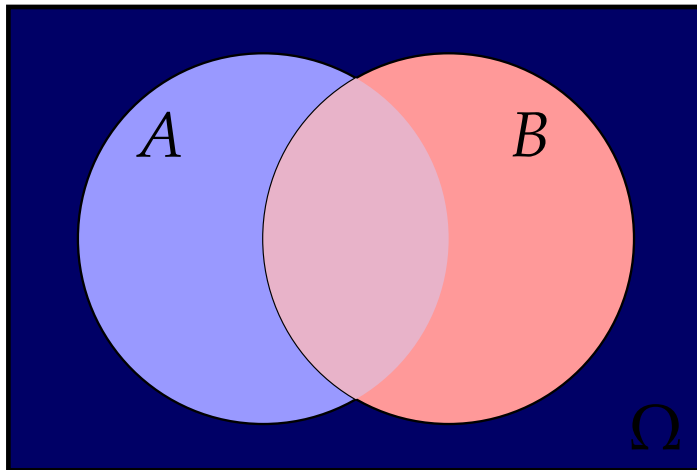
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \quad \text{und} \\ A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Distributivität

$$\bar{A} \cup A = \Omega \quad \text{und} \quad \bar{A} \cap A = \emptyset$$

# Gesetz von De Morgan\*

$$\overline{(A \cup B)} = \bar{A} \cap \bar{B} \quad \text{und} \quad \overline{(A \cap B)} = \bar{A} \cup \bar{B}$$



# Abbildung

Eine **Abbildung**  $f$  ist definiert durch

- (i) eine **Definitionsmenge**  $D$ ,
- (ii) eine **Wertemenge**  $W$  und
- (iii) eine **Zuordnungsvorschrift**,  
die jedem Element von  $D_f$  *genau ein* Element von  $W_f$  zuordnet.

$$f: D_f \rightarrow W_f, \quad x \mapsto y = f(x)$$

- ▶  $x$  heißt **unabhängige** Variable,  $y$  heißt **abhängige** Variable.
- ▶  $y$  ist das **Bild** von  $x$ ,  $x$  ist das  **Urbild** von  $y$ .
- ▶  $f(x)$  heißt **Funktionsterm**,  $x$  heißt **Argument** der Abbildung.

Andere Bezeichnungen: *Funktion, Transformation*

# Injektiv · surjektiv · bijektiv\*

Jedes Argument besitzt immer genau ein Bild. Die Anzahl der Urbilder eines Elementes  $y \in W$  kann jedoch beliebig sein. Wir können daher Funktionen nach der Anzahl der Urbilder einteilen.

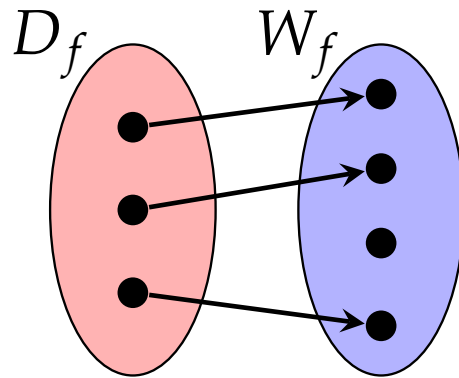
- ▶ Eine Abbildung  $f$  heißt **injektiv**, wenn jedes Element aus der Wertemenge *höchstens* ein Urbild besitzt.
- ▶ Sie heißt **surjektiv**, wenn jedes Element aus der Wertemenge *mindestens* ein Urbild besitzt.
- ▶ Sie heißt **bijektiv**, wenn sie sowohl injektiv als auch surjektiv ist.

*Injektive* Abbildungen haben die folgende wichtige Eigenschaft:

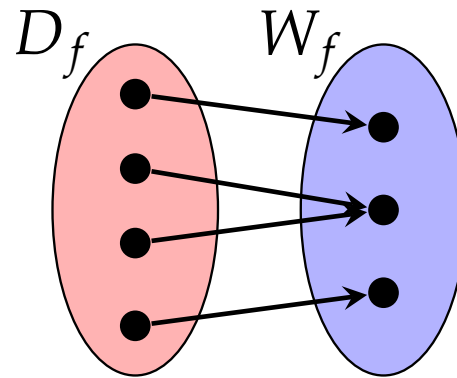
$$f(x) \neq f(y) \quad \Leftrightarrow \quad x \neq y$$

# Injektiv · surjektiv · bijektiv\*

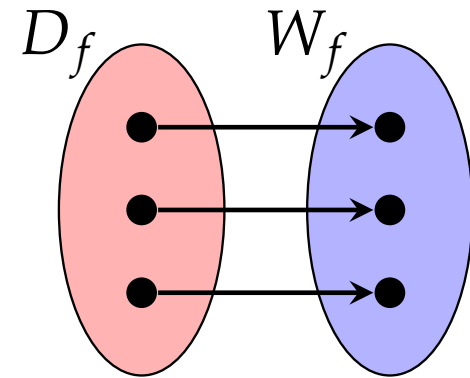
Abbildungen können durch „Pfeildiagramme“ veranschaulicht werden.



injektiv  
(nicht surjektiv)



surjektiv  
(nicht injektiv)



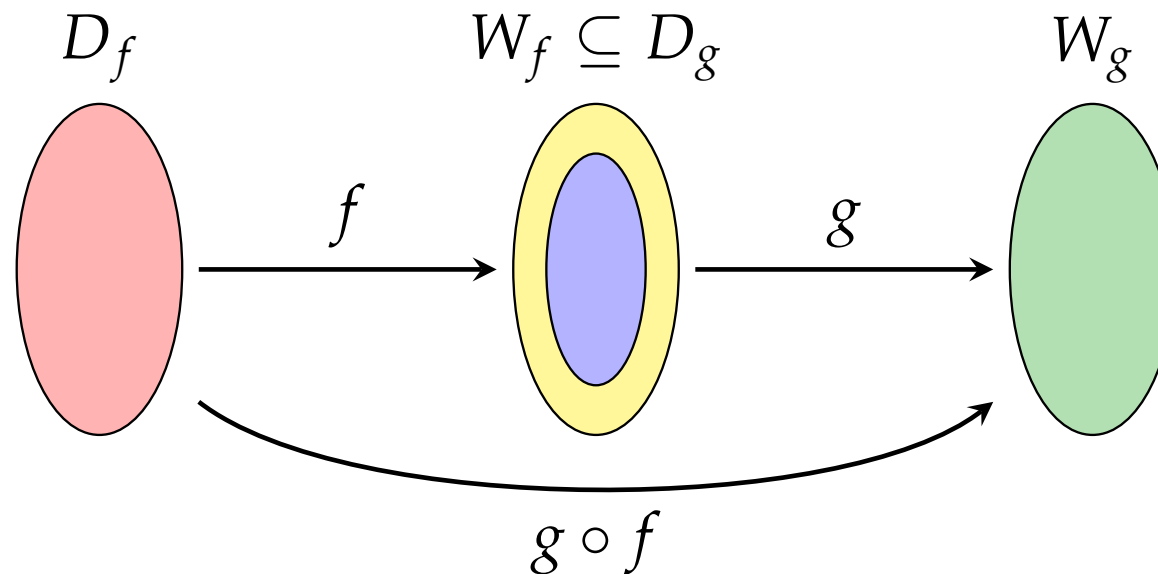
bijektiv

# Zusammengesetzte Funktion\*

Seien  $f: D_f \rightarrow W_f$  und  $g: D_g \rightarrow W_g$  Funktionen mit  $W_f \subseteq D_g$ .  
Dann heißt die Funktion

$$g \circ f: D_f \rightarrow W_g, x \mapsto (g \circ f)(x) = g(f(x))$$

**zusammengesetzte Funktion** („ $g$  zusammengesetzt  $f$ “).



# Inverse Abbildung\*

Bei einer **bijektiven** Abbildung  $f: D_f \rightarrow W_f$  können wir jedem  $y \in W_f$  sein Urbild  $x \in D_f$  zuordnen.

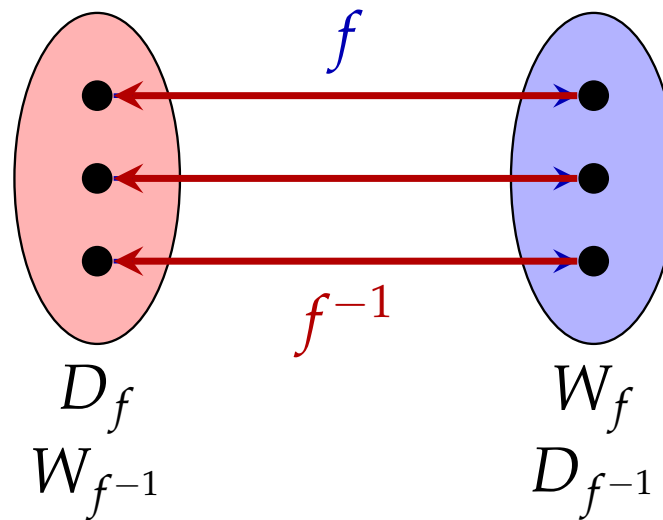
Wir erhalten dadurch wieder eine Abbildung  $f^{-1}$  mit der Definitionsmenge  $W_f$  und der Wertemenge  $D_f$ :

$$f^{-1}: W_f \rightarrow D_f, y \mapsto x = f^{-1}(y)$$

Diese Abbildung heißt **Umkehrfunktion** oder **inverse Abbildung**. Sie hat die Eigenschaft, dass für alle Elemente  $x \in D_f$  und  $y \in W_f$  gilt:

$$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y) = x \quad \text{und} \quad f(f^{-1}(y)) = f(x) = y$$

# Inverse Abbildung\*





# Identische Abbildung\*

Die einfachste Funktion ist die **Einheitsfunktion** (oder **identische Abbildung**  $\text{id}$ ), die das Argument auf sich selbst abbildet, d.h.

$$\text{id}: D \rightarrow W = D, x \mapsto x$$

Die Einheitsfunktion bei zusammengesetzten Abbildungen die Rolle der Zahl 1 bei der Multiplikation von Zahlen.

$$f \circ \text{id} = f \quad \text{und} \quad \text{id} \circ f = f$$

Insbesondere gilt:

$$f^{-1} \circ f = \text{id}: D_f \rightarrow D_f \quad \text{und} \quad f \circ f^{-1} = \text{id}: W_f \rightarrow W_f$$

# Zusammenfassung

- ▶ Aussagenlogik
- ▶ Theorem
- ▶ Notwendige und hinreichende Bedingung
- ▶ Mengen
- ▶ Mengenverknüpfungen
- ▶ Abbildung
- ▶ Zusammengesetzte Funktion
- ▶ Inverse Abbildung