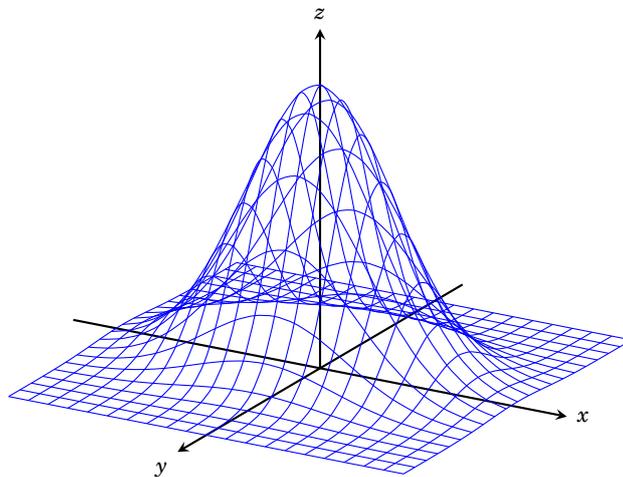


Mathematische Methoden

Übungsaufgaben
Wintersemester 2017/18

Josef Leydold



2. November 2017

Institute for Statistics and Mathematics · WU Wien

© 2009–2017 Josef Leydold · Institute for Statistics and Mathematics · WU Wien



This work is licensed under the Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 3.0 Austria License. To view a copy of this license, visit <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/at/> or send a letter to Creative Commons, 171 Second Street, Suite 300, San Francisco, California, 94105, USA.

Inhaltsverzeichnis

| | |
|--|-----------|
| Übungsaufgaben | 1 |
| Logik, Mengen und Abbildungen | 1 |
| Matrixalgebra | 3 |
| Vektorräume | 6 |
| Determinante | 9 |
| Eigenwerte | 12 |
| Funktionen | 14 |
| Differentialrechnung | 16 |
| Inverse und Implizite Funktionen | 20 |
| Taylorreihen | 22 |
| Integration | 23 |
| Extrema | 27 |
| Lagrange-Funktion | 29 |
| Kuhn-Tucker Bedingung | 30 |
| Differentialgleichungen | 31 |
| Kontrolltheorie | 33 |
| Lösungen | 35 |

Logik, Mengen und Abbildungen

1. Drei Aussagen lauten:

a = „Wien liegt an der Donau.“

b = „Wasser gefriert bei 20° Celsius.“

c = „16 ist das Quadrat von 4.“

Sind die folgenden verknüpften Aussagen wahr oder falsch?

- | | | |
|-----------------------|------------------------|--|
| (a) $a \vee b$, | (b) $a \wedge b$ | (c) $(a \wedge b) \vee c$ |
| (d) $\neg b \wedge c$ | (e) $\neg(a \wedge c)$ | (f) $(\neg a \wedge c) \vee (a \wedge \neg c)$ |

2. Übertragen Sie folgende Aussagen aus der Umgangssprache in die symbolische Form. Verwenden Sie p für „Das Wetter ist schlecht“ und q für „Der Wind kommt aus dem Westen“, sowie die Verknüpfungen \neg , \wedge , \vee , \Rightarrow und \Leftrightarrow .

- Das Wetter ist schlecht und der Wind kommt aus dem Westen.
- Wenn das Wetter schlecht ist, kommt der Wind aus dem Westen.
- Der Wind kommt genau dann aus dem Westen, wenn das Wetter nicht schlecht ist.
- Der Wind kommt nicht aus dem Westen oder das Wetter ist schlecht.
- Es ist falsch, dass der Wind aus dem Westen kommt, oder dass das Wetter nicht schlecht ist.

3. Zeigen Sie, dass die Aussage $(a \Rightarrow b) \Leftrightarrow (\neg b \Rightarrow \neg a)$ (Kontraposition) immer wahr ist. (Eine derartige Aussage heißt *Tautologie*.)

Bemerkung:

Dieser logische Satz wird oft für mathematische Beweise verwendet. Anstatt z.B. zu zeigen, dass „jede durch 6 teilbare Zahl auch durch 3 teilbar ist“, kann man zeigen, dass „jede nicht durch 3 teilbare Zahl auch nicht durch 6 teilbar ist“.

4. Eine Aussage p lautet „ x ist eine Primzahl“, eine Aussage q „ $x + 1$ ist eine Primzahl“. Die Variable x steht dabei für eine beliebige positive ganze Zahl größer oder gleich 3. Sind die Aussagen

- $p \Rightarrow \neg q$
- $p \Leftrightarrow \neg q$

wahr oder falsch für beliebige Werte von x ?

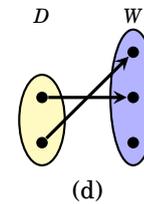
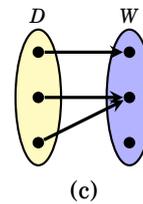
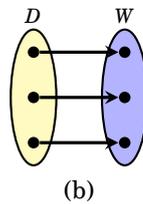
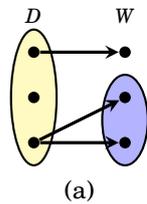
5. Die Obermenge $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ hat die Teilmengen $A = \{1, 3, 6, 9\}$, $B = \{2, 4, 6, 10\}$ und $C = \{3, 6, 7, 9, 10\}$. Zeichnen Sie das Venn-Diagramm und bilden Sie die Mengen, die durch die folgenden Ausdrücke definiert sind:

- | | | |
|------------------------------------|--|---|
| (a) $A \cup C$ | (b) $A \cap B$ | (c) $A \setminus C$ |
| (d) \overline{A} | (e) $(A \cup C) \cap B$ | (f) $(\overline{A} \cup B) \setminus C$ |
| (g) $\overline{(A \cup C)} \cap B$ | (h) $(\overline{A} \setminus B) \cap (\overline{A} \setminus C)$ | (i) $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ |

6. Es sei A die Menge aller Wahlberechtigten, B die Menge aller Männer, C die Menge aller Frauen, D die Menge aller Pensionisten und E die Menge aller unselbständig Beschäftigten in einem Wahlbezirk. Geben Sie eine (vernünftige) Obermenge an. Drücken Sie folgende Mengen in Worten aus:

- | | | | |
|---------------------|--------------------|----------------|-------------------------|
| (a) $A \cap B$ | (b) $A \cap C$ | (c) $B \cap E$ | (d) $A \setminus D$ |
| (e) $C \setminus A$ | (f) \overline{C} | (g) $C \cap D$ | (h) $(D \cup E) \cap C$ |

7. Zeichnen Sie im zugehörigen Venn-Diagramm die Lösungsmenge von $(A \cap \bar{B}) \cup (A \cap B)$.
8. Vereinfachen Sie die folgenden Mengenausdrücke:
- (a) $\overline{(A \cup B)} \cap \bar{B}$ (b) $(A \cup \bar{B}) \cap (A \cup B)$
 (c) $((\bar{A} \cup \bar{B}) \cap \overline{(A \cap \bar{B})}) \cap A$ (d) $(C \cup B) \cap \overline{(C \cap \bar{B})} \cap (C \cup \bar{B})$
9. Welche der folgenden Mengen ist Teilmenge von $A = \{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge 10 < x < 200\}$:
- (a) $\{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge 10 < x \leq 200\}$ (b) $\{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge x^2 = 121\}$
 (c) $\{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge 4\pi < x < \sqrt{181}\}$ (d) $\{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge 20 < |x| < 100\}$
10. Beschreiben die folgenden Diagramme Abbildungen? Wenn ja, ist die jeweilige Abbildung injektiv, surjektiv oder bijektiv?



Matrixalgebra

11. Seien

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -6 & 5 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 8 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie

- (a) $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ (b) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ (c) $3\mathbf{A}^t$ (d) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}^t$
 (e) $\mathbf{B}^t \cdot \mathbf{A}$ (f) $\mathbf{C} + \mathbf{A}$ (g) $\mathbf{C} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{C} \cdot \mathbf{B}$ (h) \mathbf{C}^2

12. Demonstrieren Sie an Hand der Matrizen $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, dass im Allgemeinen $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$.

13. Überlegen Sie die Form der Produktmatrix (beliebig, Diagonal-, obere bzw. untere Dreiecksmatrix) bei der Multiplikation

- (a) einer Diagonalmatrix mit einer Diagonalmatrix,
 (b) einer oberen Dreiecksmatrix mit einer oberen Dreiecksmatrix,
 (c) einer Diagonalmatrix mit einer unteren Dreiecksmatrix.
 (d) einer oberen Dreiecksmatrix mit einer unteren Dreiecksmatrix.

Veranschaulichen Sie Ihre Beobachtung an einem Beispiel.

14. Geben Sie eine formale Definition für eine obere Dreiecksmatrix. Zeigen Sie, dass das Produkt zweier beliebiger (gleichdimensionierter) oberer Dreiecksmatrizen stets eine obere Dreiecksmatrix ergibt.

15. Geben Sie eine formale Definition für eine Diagonalmatrix. Zeigen Sie, dass das Produkt aus einer beliebigen Diagonalmatrix und einer beliebigen (gleichdimensionierten) oberen Dreiecksmatrizen stets eine obere Dreiecksmatrix ergibt. Verwenden Sie dazu das Ergebnis aus Aufgabe 14.

16. Sei $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$ eine (2×3) -Matrix und \mathbf{e}_i der i -te Einheitsvektor im \mathbb{R}^3 . Überlegen Sie welches Ergebnis $\mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_i$ liefert. Veranschaulichen Sie Ihre Vermutung an einem Beispiel.

17. Sei $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)$ eine $(m \times n)$ -Matrix und \mathbf{e}_i der i -te Einheitsvektor im \mathbb{R}^n . Zeigen Sie, dass $\mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_i = \mathbf{a}_i$.

18. Sei $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$ eine (2×3) -Matrix und \mathbf{e}_i der i -te Einheitsvektor im \mathbb{R}^2 . Überlegen Sie, welches Ergebnis $\mathbf{e}_i^t \cdot \mathbf{A}$ liefert. Veranschaulichen Sie Ihre Vermutung an einem Beispiel.

19. Sei $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)$ eine $(m \times n)$ -Matrix und \mathbf{e}_i der i -te Einheitsvektor im \mathbb{R}^m . Zeigen Sie, dass $\mathbf{e}_i^t \cdot \mathbf{A}$ stets den i -ten Zeilenvektor von \mathbf{A} liefert.

20. Seien $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Berechnen Sie $\mathbf{x}^t \mathbf{x}$, $\mathbf{x} \mathbf{x}^t$, $\mathbf{x}^t \mathbf{y}$, $\mathbf{y}^t \mathbf{x}$, $\mathbf{x} \mathbf{y}^t$ und $\mathbf{y} \mathbf{x}^t$.

21. Sei \mathbf{A} eine quadratische Matrix und \mathbf{D} eine gleichdimensionierte Diagonalmatrix. Überlegen Sie, welche Ergebnisse $\mathbf{D} \cdot \mathbf{A}$ und $\mathbf{A} \cdot \mathbf{D}$ liefern. Veranschaulichen Sie Ihre Überlegungen an einem Beispiel.

- 22.** Lösen Sie die folgenden Matrixgleichungen nach \mathbf{X} auf. Nehmen Sie dabei an, dass alle Matrizen quadratische Matrizen gleicher Größe sind. Welche Bedingungen müssen außerdem noch erfüllt sein?

$$(a) \mathbf{AX} + \mathbf{BX} = \mathbf{CX} + \mathbf{I}$$

$$(b) (\mathbf{A} - \mathbf{B})\mathbf{X} = -\mathbf{BX} + \mathbf{C}$$

$$(c) \mathbf{AXA}^{-1} = \mathbf{B}$$

$$(d) \mathbf{XAX}^{-1} = \mathbf{C}(\mathbf{XB})^{-1}$$

- 23.** Zeigen Sie, dass für beliebige reguläre Matrizen \mathbf{A} und \mathbf{B} gilt:

$$(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$$

Hinweis: $(\mathbf{AB})^{-1}$ ist definiert als jene Matrix \mathbf{C} mit $\mathbf{C} \cdot (\mathbf{AB}) = \mathbf{I}$.

- 24.** Berechnen Sie Norm und Skalarprodukt der Vektoren

$$(a) \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(b) \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

- 25.** Zeigen Sie, dass $\mathbf{x}^t \mathbf{y} = \mathbf{y}^t \mathbf{x}$. Verwenden Sie dazu die Rechenregeln $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^t = \mathbf{B}^t \cdot \mathbf{A}^t$ und $(\mathbf{A}^t)^t$.

- 26.** Lösen Sie das Gleichungssystem mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 2 \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 &= 10 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 5 \end{aligned}$$

Stellen Sie dieses Gleichungssystem auch in Matrixschreibweise dar.

- 27.** Lösen Sie das Gleichungssystem mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 &= 10 \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 - x_4 &= 30 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 &= 12 \end{aligned}$$

Stellen Sie dieses Gleichungssystem auch in Matrixschreibweise dar.

- 28.** Lösen Sie das Gleichungssystem mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 10x_2 + 4x_3 + 9x_4 &= 1 \\ x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 3x_4 &= 1 \\ 3x_1 + 16x_2 + 9x_3 + 11x_4 &= -1 \\ x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 5x_4 &= 2 \\ x_2 + 3x_3 &= 4 \end{aligned}$$

Stellen Sie dieses Gleichungssystem auch in Matrixschreibweise dar.

- 29.** Lösen Sie das Gleichungssystem mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 1 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 8x_4 - 3x_5 &= 3 \\ -x_1 - 4x_3 + 3x_4 - 5x_5 &= -2 \end{aligned}$$

Stellen Sie dieses Gleichungssystem auch in Matrixschreibweise dar.

30. Sind die folgenden Matrizen invertierbar? Geben Sie die jeweilige Inverse an.

$$(a) \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(b) \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

31. Lösen Sie das lineare Gleichungssystem $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ mit \mathbf{A} aus Aufgabe 30(a) und $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$ mit Hilfe der Inversen von \mathbf{A} .

Vektorräume

32. Geben Sie eine Linearkombination der Vektoren \mathbf{x}_1 und \mathbf{x}_2 an.

$$(a) \mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(b) \mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

33. Überprüfen Sie, ob die gegebenen Vektoren linear unabhängig oder linear abhängig sind.

$$(a) \mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$(b) \mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$(c) \mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

34. Bestimmen Sie die Ränge der folgenden Matrizen.

$$(a) \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(b) \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$(c) \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 5 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(d) \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(e) \mathbf{E} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

35. Veranschaulichen Sie an Hand der Matrizen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -5 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

dass $\text{rank}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \leq \min\{\text{rank}(\mathbf{A}), \text{rank}(\mathbf{B})\}$.

36. Veranschaulichen Sie an Hand der Matrizen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

dass es Matrizen \mathbf{A} und \mathbf{B} gibt, mit $\text{rank}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) < \min\{\text{rank}(\mathbf{A}), \text{rank}(\mathbf{B})\}$. Wie kann man dieses Phänomen geometrisch interpretieren?

37. (a) Wieviele Lösungen hat ein *homogenes* Gleichungssystem $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = 0$?

(b) Kann $\text{rank}(\mathbf{A}) > \text{rank}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ sein?

38. Sind die angegebenen Vektoren aus dem \mathbb{R}^3 linear unabhängig?

Welche Dimension hat der von ihnen aufgespannte Unterraum?

In welchen Fällen handelt es sich um eine Basis für den \mathbb{R}^3 ?

$$(a) \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{z} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$(b) \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$(c) \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \text{ und } \mathbf{v}_3 \text{ aus (b) sowie } \mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 14 \end{pmatrix}.$$

39. Geben Sie die Koordinaten der Vektoren $\mathbf{x} = (2, 0, 1)^t$ und $\mathbf{y} = (1, 1, 4)^t$ und des Nullvektors unter der

(a) kanonischen Basis

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(b) unter der Basis

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

an.

40. Gegeben sei die Matrix

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Transformieren Sie die Basis aus Aufgabe 39(b) mit der Transformationsmatrix \mathbf{U} . Wie lautet die neue Basis?

(b) Wie lautet die Matrix für die zu (a) umgekehrte Transformation?

(c) Geben Sie die Matrix für die Transformation der Basis aus Aufgabe 39(a) zur Basis in Aufgabe 39(b) an.

41. Seien $\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ und $\mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ zwei Basen des \mathbb{R}^3 .

(Überprüfen Sie diese Behauptung!)

(a) Wie lautet die Transformationsmatrix zum Basiswechsel von \mathcal{B}_1 nach \mathcal{B}_2 ?

(b) Sei $\mathbf{c}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ der Koordinatenvektor eines Vektor \mathbf{x} bezüglich der Basis \mathcal{B}_1 .

Wie lautet der Koordinatenvektor bezüglich Basis \mathcal{B}_2 ?

Wie lautet der Koordinatenvektor bezüglich der kanonischen Basis?

42. Sei $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ und $\varphi_{\mathbf{A}}: \mathbf{x} \mapsto \mathbf{A}\mathbf{x}$ die durch \mathbf{A} erzeugte lineare Abbildung. Berechnen Sie die Dimension des Bildes $\text{Im}(\varphi_{\mathbf{A}})$ und des Kernes $\text{Ker}(\varphi_{\mathbf{A}})$ und geben Sie je eine Basis für diese Unterräume an.

43. Sei $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \mathbf{x} \mapsto \mathbf{A}\mathbf{x}$ eine lineare Abbildung mit $\mathbf{A}\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{A}\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$. Wie lautet \mathbf{A} ?
44. Sei $\varphi: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n, \mathbf{x} \mapsto \mathbf{A}\mathbf{x}$ eine lineare Abbildung. Wieviele Zeilen und Spalten muss \mathbf{A} haben?
45. Sei $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ein lineares Gleichungssystem mit m Gleichungen in n Unbekannten. Die Lösungsmenge \mathcal{L} sei unendlich und $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{L}$ eine beliebige Lösung.
- (a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{L}_0 = \{\mathbf{x} - \mathbf{x}_0 : \mathbf{x} \in \mathcal{L}\}$ die Lösungsmenge des homogenen Gleichungssystems $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ist.
 - (b) Zeigen Sie, dass \mathcal{L}_0 einen Unterraum des \mathbb{R}^n ist.
 - (c) Welche Werte kann m annehmen?
 - (d) Welchen Rang kann \mathbf{A} annehmen?
46. Beschreiben Sie die angegebenen Mengen mittels formaler Notation. Welche dieser Mengen ist ein reeller Vektorraum? Begründen Sie Ihre Entscheidung. Geben Sie im Falle eines Vektorraums die Dimension und eine Basis an.
- (a) Die Menge aller Vektoren mit 3 reellen Komponenten.
 - (b) Die Menge aller Vektoren.
 - (c) Die Menge aller Polynome von Grad kleiner gleich 3.
 - (d) Die Menge aller Polynome von Grad gleich 3.
 - (e) Die Menge aller Polynome.
 - (f) Die Lösungsmenge eines homogenen Gleichungssystems $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
 - (g) Die Menge aller Vektoren \mathbf{y} , die als Ergebnis der Matrixmultiplikation $\mathbf{A}\mathbf{x}$ für eine gegebene Matrix \mathbf{A} auftreten können.

Determinante

47. Berechnen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen mittels Regel von Sarrus bzw. durch Umformen in eine Dreiecksmatrix:

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

(e) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & -4 \end{pmatrix}$

(f) $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 4 & -3 & 3 \end{pmatrix}$

(g) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

(h) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(i) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

48. Berechnen Sie die Determinanten der Matrizen aus Aufgabe 47 mittels Laplace'schen Entwicklungssatz.

49. (a) Berechnen Sie die Ränge der Matrizen aus Aufgabe 47.

(b) Welche dieser Matrizen sind regulär?

(c) Welche dieser Matrizen sind invertierbar?

(d) Sind die Spaltenvektoren dieser Matrizen linear unabhängig?

50. Gegeben sind die Matrizen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \times 1 & 0 \\ 0 & 2 \times 1 & 0 \\ 1 & 2 \times 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \times 3 + 1 & 0 \\ 0 & 5 \times 0 + 1 & 0 \\ 1 & 5 \times 1 + 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie mit Hilfe der Eigenschaften der Determinante:

(a) $\det(\mathbf{A})$

(b) $\det(5\mathbf{A})$

(c) $\det(\mathbf{B})$

(d) $\det(\mathbf{A}^t)$

(e) $\det(\mathbf{C})$

(f) $\det(\mathbf{A}^{-1})$

(g) $\det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})$

(h) $\det(\mathbf{I})$

51. Gegeben seien die Matrizen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 7 & 8 & 5 & 8 \\ 1 & 1 & 4 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 6 & 1 \\ 1 & 3 & 9 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 4 & 1 & 1 \\ 4 & 7 & 8 & 5 & 8 \\ 4 & 1 & 4 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 2 & 6 & 1 \\ 4 & 3 & 9 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 8 & 8 & 5 & 8 \\ 1 & 2 & 4 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 6 & 1 \\ 1 & 4 & 9 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Die Determinante von \mathbf{A} ist: $|\mathbf{A}| = -216$.

Berechnen Sie mit Hilfe der Eigenschaften der Determinante:

(a) $|\mathbf{B}|$

(b) $|\mathbf{C}|$

(c) $|\mathbf{A}^t|$

(d) $|\mathbf{C}^{-1}|$

(e) $|\mathbf{C} \cdot \mathbf{B}|$

(f) $|\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{C}|$

(g) $|(\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{C})^t|$

(h) $|((\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})^t)^{-1}|$

52. Gegeben seien zwei 8×8 -Matrizen \mathbf{A} und \mathbf{B} , mit $\det(\mathbf{A}) = -5$ und $\det(\mathbf{B}) = 34$.

Berechnen Sie:

(a) $\det(2\mathbf{A})$

(b) $\det(\mathbf{A}^2)$

(c) $\det(\mathbf{A}^t)$

(d) $\det(\mathbf{A}^{-1})$

(e) $\det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$

- (f) Welchen Rang haben \mathbf{A} und \mathbf{B} ?
 (g) Sind diese beiden Matrizen invertierbar?
 (h) Sind diese beiden Matrizen singular?
 (i) Sind diese beiden Matrizen regulär?
 (j) Welche Dimension haben Kern und Image der von Matrix \mathbf{A} erzeugten linearen Abbildung.

53. Sei \mathbf{A} eine 3×4 -Matrix. Bestimmen Sie $|\mathbf{A}^t \cdot \mathbf{A}|$ und $|\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^t|$.
 (Begründen Sie Ihre Antwort.)

54. Berechnen Sie die Fläche des von den Vektoren aufgespannten Parallelogramms bzw. das Volumen des von den Vektoren aufgespannten Parallelepipeds:

(a) $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$

55. Berechnen Sie die Kofaktorenmatrix, adjungierte Matrix und inverse Matrix folgender Matrizen:

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

(e) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & -4 \end{pmatrix}$

(f) $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 4 & -3 & 3 \end{pmatrix}$

56. Berechnen Sie die inverse Matrix von:

(a) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha^2 & \beta^2 \end{pmatrix}$

57. Berechnen Sie die Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

mit Hilfe der Cramerschen Regel für $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ bzw. $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und der Matrix:

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

(e) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & -4 \end{pmatrix}$

(f) $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 4 & -3 & 3 \end{pmatrix}$

58. Berechnen Sie die Lösungen der linearen Gleichungssysteme mit Hilfe der Cramerschen Regel:

(a) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha^2 & \beta^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

- 59.** Zeigen Sie Eigenschaft (4): Die Determinante ist alternierend, d.h.

$$\det(\dots, \mathbf{a}_i, \dots, \mathbf{a}_k, \dots) = -\det(\dots, \mathbf{a}_k, \dots, \mathbf{a}_i, \dots).$$

Hinweis: Betrachten Sie $\det(\dots, \mathbf{a}_i + \mathbf{a}_k, \dots, \mathbf{a}_i + \mathbf{a}_k, \dots)$ und verwenden Sie die Eigenschaften (1) und (2).

- 60.** Zeigen Sie Eigenschaft (5): Der Wert der Determinante ändert sich nicht, wenn zu einer Spalte das Vielfache einer anderen Spalte addiert wird, d.h.

$$\det(\dots, \mathbf{a}_i + \alpha \mathbf{a}_k, \dots, \mathbf{a}_k, \dots) = \det(\dots, \mathbf{a}_i, \dots, \mathbf{a}_k, \dots)$$

Hinweis: Verwenden Sie die Eigenschaften (1) und (2).

- 61.** Zeigen Sie Eigenschaft (9) mit Hilfe der Eigenschaften (3) und (8):

$$\det(\mathbf{A}^{-1}) = \frac{1}{\det(\mathbf{A})}$$

Eigenwerte

62. Berechnen Sie Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrizen

$$(a) \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \quad (b) \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 13 \end{pmatrix} \quad (c) \mathbf{C} = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$$

63. Berechnen Sie Eigenwerte und Eigenvektoren der folgenden Matrizen:

$$(a) \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad (b) \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(c) \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad (d) \mathbf{D} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}$$

$$(e) \mathbf{E} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad (f) \mathbf{F} = \begin{pmatrix} 11 & 4 & 14 \\ 4 & -1 & 10 \\ 14 & 10 & 8 \end{pmatrix}$$

64. Berechnen Sie Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrizen

$$(a) \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (b) \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

65. Welche Definitheitseigenschaften besitzen die Matrizen aus den Aufgaben 62a, 62c, 63a, 63d, 63f und 64a.

Was ist mit den anderen Matrizen aus den Aufgaben 62, 63 und 64?

66. Zeigen Sie: Eine Matrix \mathbf{A} ist negativ definit genau dann, wenn $-\mathbf{A}$ positiv definit ist.

67. Leiten Sie die Bedingung für negativ definite Matrizen aus der entsprechenden Bedingung für positiv definite Matrizen her.

68. Sei $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Wie lautet die von \mathbf{A} erzeugte quadratische Form $q_{\mathbf{A}}(\mathbf{x})$?

69. Geben Sie die quadratische Form $q(\mathbf{x}) = 5x_1^2 + 6x_1x_2 - 2x_1x_3 + x_2^2 - 4x_2x_3 + x_3^2$ in Matrixdarstellung an, i.e., finden Sie die Matrix \mathbf{A} , sodass $q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^t \mathbf{A} \mathbf{x}$.

70. Bestimmen Sie die Eigenräume zu allen Eigenwerten der Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

71. Veranschaulichen Sie an Hand der Matrizen aus Aufgabe 62:

- (1) Die Matrizen \mathbf{A} und \mathbf{A}^t besitzen dieselben Eigenwerte. (Was ist mit ihren Eigenvektoren?)
- (2) Seien \mathbf{A} und \mathbf{B} zwei $n \times n$ -Matrizen. Dann besitzen die Matrizen $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ und $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$ dieselben Eigenwerte. (Was ist mit den Eigenvektoren?)
- (3) Ist \mathbf{x} ein Eigenvektor von \mathbf{A} zum Eigenwert λ , dann ist \mathbf{x} ein Eigenvektor von \mathbf{A}^k zum Eigenwert λ^k .

- (4) Ist \mathbf{x} ein Eigenvektor einer regulären Matrix \mathbf{A} zum Eigenwert λ , dann ist \mathbf{x} ein Eigenvektor von \mathbf{A}^{-1} zum Eigenwert $\frac{1}{\lambda}$.

72. Veranschaulichen Sie an Hand der Matrizen aus Aufgabe 63:

- (5) Die Determinante einer $n \times n$ -Matrix \mathbf{A} ist gleich dem Produkt der Eigenwerte λ_i von \mathbf{A} : $\det(\mathbf{A}) = \prod_{i=1}^n \lambda_i$.
- (6) Die Summe der Eigenwerte λ_i einer Matrix \mathbf{A} ist gleich der Summe der Diagonalelemente von \mathbf{A} (der Spur von \mathbf{A}).

73. Zeigen Sie:

- (1) Die Matrizen \mathbf{A} und \mathbf{A}^t besitzen dieselben Eigenwerte.
- (3) Ist \mathbf{x} ein Eigenvektor von \mathbf{A} zum Eigenwert λ , dann ist \mathbf{x} ein Eigenvektor von \mathbf{A}^k zum Eigenwert λ^k .
- (4) Ist \mathbf{x} ein Eigenvektor einer regulären Matrix \mathbf{A} zum Eigenwert λ , dann ist \mathbf{x} ein Eigenvektor von \mathbf{A}^{-1} zum Eigenwert $\frac{1}{\lambda}$.

74. Berechnen Sie alle (führenden) Hauptminoren der symmetrischen Matrizen aus den Aufgaben 62, 63 und 64 und bestimmen Sie deren Definitheit.

75. Berechnen Sie alle allgemeinen Hauptminoren der symmetrischen Matrizen aus den Aufgaben 62, 63 und 64 und bestimmen Sie deren Definitheit.

76. Eine symmetrische Matrix $\mathbf{U} = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ heißt Orthogonalmatrix, wenn die Spalten von \mathbf{U} normiert (d.h., $\|\mathbf{u}_i\| = 1$ für alle $i = 1, \dots, n$) und paarweise orthogonal sind (d.h., $\mathbf{u}_i^t \mathbf{u}_j = 0$ für alle $i \neq j$ und $i, j = 1, \dots, n$).

Zeigen Sie: Für jede Orthogonalmatrix \mathbf{U} gilt $\mathbf{U}^t \cdot \mathbf{U} = \mathbf{I}$.

77. Sei

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

und sei $\varphi_{\mathbf{A}}$ die von \mathbf{A} erzeugte lineare Abbildung.

- (a) Unter welcher Basis wird \mathbf{A} zu einer Diagonalmatrix?
- (b) Wie lautet diese Basis?
- (c) Wie lautet die Transformationsmatrix von der kanonischen Basis zu dieser Basis?
- (d) Falls \mathbf{x} der Koordinatenvektor bezüglich der kanonischen Basis ist, wie lautet der Koordinatenvektor \mathbf{c} bezüglich dieser neuen Basis?

78. Sei $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$.

- (a) Berechnen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren von \mathbf{A} .
- (b) Wie heißt die Menge aller Eigenvektoren eines Eigenwertes? Geben Sie diese beiden Mengen an.
- (c) Sei \mathbf{B} eine 2×2 -Matrix mit $\det(\mathbf{B}) = 5$. Wie lautet das Produkt der Eigenwerte von $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ und $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$.

Funktionen

79. Berechnen Sie ohne Taschenrechner(!):

(a) $\log_2(2), \log_2(4), \log_2(16), \log_2(0), \log_2(1), \log_2\left(\frac{1}{4}\right), \log_2(\sqrt{2}), \log_2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \log_2(-4)$.

(b) $\log_{10}(300), \log_{10}(3^{10})$. [Verwenden Sie $\log_{10}(3) = 0,47712$.]

80. Berechnen Sie die Nullstellen und zerlegen Sie in Linearfaktoren:

(a) $3x^2 - 9x + 2$

(b) $x^2 + 4x + 3$

81. Skizzieren Sie die Graphen folgender Funktionen (wenn möglich ohne Taschenrechner).

Überlegen Sie sich sinnvolle Definitionsbereiche und kennzeichnen Sie wichtige Punkte in der Skizze:

(a) $x^{-3}, x^{-2}, x^{-1}, x^0, x^1, x^2, x^3$.

(b) x^{2k} und x^{2k+1} für $k \in \mathbb{Z}$. [Welche Fälle können auftreten?]

(c) $\sqrt{x}, \sqrt[3]{x}, \sqrt[3]{x^2}, x^{\frac{1}{2}}, x^{\frac{1}{3}}, x^{\frac{2}{3}}$.

(d) x^α . [Welche Fälle können auftreten?]

(e) $x^2, (3x-2)^2 + 1$;

(f) $\frac{1}{x^{-3}}, \frac{1}{x^{-2}}, \frac{1}{x^{-1}}, \frac{1}{x^0}, \frac{1}{x^1}, \frac{1}{x^2}, \frac{1}{x^3}, \frac{1}{\sqrt{x}}$.

(g) $\exp(x), \exp(2x), \exp(x/3), \exp(-x), \exp(x-1), \exp(1-x)$.

(h) $\ln(x), \ln(2x-1), \log_{10}(x), \log_2(x), \log_2(2x-1)$.

(i) $\sin(x), \sin(\pi x), \sin(2k\pi x), \sin(x + \pi/2), \cos(x)$.

82. Zeichnen Sie die Graphen der folgenden Funktionen und überprüfen Sie, ob Injektivität, Surjektivität oder Bijektivität vorliegt.

(a) $f: [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 2x + 1$

(b) $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x}$

(c) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^3$

(d) $f: [2, 6] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto (x-4)^2 - 1$

(e) $f: [2, 6] \rightarrow [-1, 3], x \mapsto (x-4)^2 - 1$

(f) $f: [4, 8] \rightarrow [-1, 15], x \mapsto (x-4)^2 - 1$

83. Seien $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x) = -x + 1$ und $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto g(x) = x^3$. Berechnen und zeichnen Sie die zusammengesetzten Funktionen $g \circ f$ und $f \circ g$ deren Umkehrfunktionen $(g \circ f)^{-1}$ bzw. $(f \circ g)^{-1}$.

84. Berechnen Sie die Grenzwerte der Folgen:

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(7 + \left(\frac{1}{2} \right)^n \right)$

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3 - 6n^2 + 3n - 1}{7n^3 - 16}$

(c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \bmod 10}{(-2)^n}$

(d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 1}{n + 1}$

(e) $\lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 - (-1)^n n^3)$

(f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{7n}{2n-1} - \frac{4n^2-1}{5-3n^2} \right)$

Hinweis: Die Operation $a \bmod b$ hat als Ergebnis den Rest der ganzzahligen Division von a durch b , also z.B. $17 \bmod 5 = 2$, $12 \bmod 4 = 0$ und $33 \bmod 7 = 5$.

85. Zeichnen Sie den Graphen der Funktion

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{x^2}{2} & \text{für } x \leq -2 \\ x+1 & \text{für } -2 < x < 2 \\ \frac{x^2}{2} & \text{für } x \geq 2 \end{cases}$$

Berechnen Sie $\lim_{x \downarrow x_0} f(x)$, $\lim_{x \uparrow x_0} f(x)$ und $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ für $x_0 = -2, 0$ und 2 .

Ist f in diesen Punkten stetig?

86. Geben Sie folgende Grenzwerte an, sofern sie existieren.

$$(a) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x+1} \quad (b) \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \quad (c) \lim_{x \rightarrow \infty} \ln(x) \quad (d) \lim_{x \rightarrow 0} \ln|x| \quad (e) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{x-1}$$

87. Sind die folgenden Funktionen stetig auf dem Definitionsbereich? Skizzieren Sie die Funktionen.

$$(a) D = \mathbb{R}, f(x) = x \qquad (b) D = \mathbb{R}, f(x) = 3x + 1$$

$$(c) D = \mathbb{R}, f(x) = e^{-x} - 1 \qquad (d) D = \mathbb{R}, f(x) = |x|$$

$$(e) D = \mathbb{R}^+, f(x) = \ln(x) \qquad (f) D = \mathbb{R}, f(x) = [x]$$

$$(g) D = \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \leq 0 \\ x+1 & \text{für } 0 < x \leq 2 \\ x^2 & \text{für } x > 2 \end{cases}$$

Hinweis: $[x] = p$, mit $x = p + y$, $p \in \mathbb{Z}$, $y \in [0, 1)$, d.h. $[x]$ ist die größte ganze Zahl kleiner oder gleich x . z.B.: $[1, 34] = 1$, $[-2, 45] = -3$.

88. Gegeben ist die Nutzenfunktion U eines Haushalts bezüglich zweier komplementärer Güter, Gut 1 und Gut 2 (z.B. linker Schuh und rechter Schuh eines Paares). Skizzieren Sie den Funktionsgraphen und zeichnen Sie die Isonutzenlinien für $U = U_0 = 1$ und $U = U_1 = 2$ ein.

$$U(x_1, x_2) = \sqrt{\min(x_1, x_2)}, \quad x_1, x_2 \geq 0.$$

Hinweis: $\min(x_1, x_2)$ ist definiert als der kleinere der beiden Werte von x_1 und x_2 . Z.B.: $\min(1, 2) = 1$.

Probieren Sie z.B. die Paare $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$, $(0, 2)$, \dots , $(1, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 1)$, $(1, 3)$, \dots , $(2, 2)$, $(2, 3)$, $(3, 2)$, $(2, 4)$, \dots

89. Skizzieren Sie folgende Wege:

$$(a) s: [0, \infty), t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$$

$$(b) s: [0, \infty), t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(2\pi t) \\ \sin(2\pi t) \end{pmatrix}$$

$$(c) s: [0, \infty), t \mapsto \begin{pmatrix} t \cos(2\pi t) \\ t \sin(2\pi t) \end{pmatrix}$$

Differentialrechnung

90. Gegeben sei die Funktion $f(x) = (x+1)^3$. Berechnen Sie die Differenzenquotienten an der Stelle $x_0 = 0$ für $\Delta x = 3, 1, -1, \frac{1}{2}$ und $\frac{1}{10}$. Bestimmen Sie auch den Differentialquotienten durch Grenzübergang. Zeichnen Sie im Graphen der Funktion die entsprechenden Sekanten und die Tangente ein.

91. Zeichnen Sie den Graphen der folgenden Funktionen. Sind diese Funktionen differenzierbar, bzw. wo sind sie differenzierbar? Sind die Funktionen stetig?

(a) $f(x) = 2x + 2$

(b) $f(x) = 3$

(c) $f(x) = |x|$

(d) $f(x) = \sqrt{|x^2 - 1|}$

(e) $f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x^2 & \text{für } x \leq -1 \\ x & \text{für } -1 < x \leq 1 \\ \frac{1}{2}x^2 & \text{für } x > 1 \end{cases}$

(f) $f(x) = \begin{cases} 2+x & \text{für } x \leq -1 \\ x^2 & \text{für } x > -1 \end{cases}$

92. Sei $f(x) = x^n$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie durch Grenzübergang mit Hilfe des Binomischen Lehrsatzes, dass $f'(x) = n x^{n-1}$ ist.

Hinweis: Der Binomische Lehrsatz besagt, dass für $a, b \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k \cdot b^{n-k}$$

$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ (sprich: „n über k“) ist dabei der Binomialkoeffizient.

93. Sei $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$. Berechnen Sie die Änderung der Funktionswerte $f(3,1) - f(3)$ näherungsweise mit Hilfe des Differentials an der Stelle $x_0 = 3$. Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem exakten Wert.

94. Zwischen 1950 und 1970 wuchs das BIP eines Landes nach der Formel $5 + \frac{1}{10}x + \frac{1}{100}x^2$, (1950: $x = 0$. x sind die Jahre seit 1950.). Wie groß war das durchschnittliche Wachstum zwischen 1955 und 1960? Wie hoch war die (momentane) Zuwachsrate 1958?

95. Differenzieren Sie:

(a) $3x^2 + 5 \cos(x) + 1$

(b) $(2x+1)x^2$

(c) $x \ln(x)$

(d) $(2x+1)x^{-2}$

(e) $\frac{3x^2-1}{x+1}$

(f) $\ln(\exp(x))$

(g) $(3x-1)^2$

(h) $\sin(3x^2)$

(i) 2^x

(j) $\frac{(2x+1)(x^2-1)}{x+1}$

(k) $2e^{3x+1}(5x^2+1)^2 + \frac{(x+1)^3}{x-1} - 2x$

96. Bilden Sie die zweite und dritte Ableitung von

(a) $f(x) = e^{-\frac{x}{2}}$

(b) $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$

(c) $f(x) = (x-2)(x^2+3)$

97. Bestimmen Sie die marginalen Kosten (Grenzkosten) und die Änderungsrate der marginalen Kosten für folgende Kostenfunktionen:

(a) $C(x) = 500 + 30x - 0,1x^2 + 0,002x^3$

(b) $C(x) = 500 + 20x - 2x \ln x + 0,01x^2$

Wie lautet die Ableitung der durchschnittlichen Kosten?

Hinweis: Die marginalen Kosten sind die erste Ableitung $C'(x)$ der Kostenfunktion $C(x)$.

- 98.** Bestimmen Sie die Bereiche, in denen die folgende Funktion monoton steigend bzw. fallend und konkav bzw. konvex ist.

$$f(x) = x^4 + \frac{4}{3}x^3 - 24x^2 + 8$$

- 99.** Zeigen Sie durch Einsetzen in die Definition, dass $f(x) = x^2$ streng konvex ist.

Hinweis: Zeigen Sie, dass die Ungleichung $(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y)^2 - (\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2) < 0$ für alle $x \neq y$ erfüllt ist.

- 100.** Bestimmen Sie die mit Hilfe der zweiten Ableitung die Krümmung (d.h. Konkavität oder Konvexität) folgender Funktionen. Welche Fälle sind möglich?

- | | |
|--------------------|--|
| (a) $\exp(x)$ | (b) $\ln(x)$ |
| (c) $\log_{10}(x)$ | (d) x^α für $x > 0$ für ein $\alpha \in \mathbb{R}$. |

- 101.** Die Funktion

$$f(x) = bx^{1-a} \quad 0 < a < 1, b > 0, x \geq 0$$

ist ein Beispiel für eine Produktionsfunktion, d.h. mit x Einheiten Arbeit kann man $f(x)$ Güter produzieren.

Produktionsfunktionen haben i.a. folgende Eigenschaften:

- (1) $f(0) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$
- (2) $f'(x) > 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = 0$
- (3) $f''(x) < 0$

- (a) Überprüfen Sie diese Eigenschaften an der obigen Funktion.
- (b) Zeichnen Sie $f(x)$ und $f'(x)$.
(Setzen Sie dabei für a und b geeignete Werte ein.)
- (c) Was bedeuten diese Eigenschaften inhaltlich?
(z.B.: Wenn $x = 0$, wird nichts produziert.)

- 102.** Die Funktion

$$f(x) = b \ln(ax + 1) \quad a, b > 0, x \geq 0$$

ist ein Beispiel für eine Nutzenfunktion. Konsumenten haben einen Nutzen $f(x)$, wenn sie x Einheiten eines Gutes konsumieren.

Nutzenfunktionen haben dieselben Eigenschaften wie Produktionsfunktionen.

- (a) Überprüfen Sie die in Beispiel 101 genannten Eigenschaften.
- (b) Zeichnen Sie $f(x)$ und $f'(x)$.
(Setzen Sie dabei für a und b geeignete Werte ein.)
- (c) Was bedeuten diese Eigenschaften in diesem Zusammenhang inhaltlich?

- 103.** Seien $f(x)$ und $g(x)$ zwei differenzierbare konkave Funktionen auf \mathbb{R} . Zeigen Sie mit Hilfe der zweiten Ableitung, dass auch $h(x) = \alpha f(x) + \beta g(x)$ für $\alpha, \beta > 0$ eine konkave Funktion ist.

Was passiert, falls $\alpha > 0$ und $\beta < 0$?

- (b) die Richtungsableitung von f an der Stelle $(-1, 1)$ in Richtung $\mathbf{h} = (1, 2)^t$,
(c) das totale Differential an der Stelle $(-1, 1)$,
(d) mit dessen Hilfe eine Näherung für f an der Stelle $(0, 0)$,
(e) sowie die partiellen Elastizitäten an der Stelle $(-1, 1)$.
- 114.** Sei $f(x, y) = x^2 + y^2$ und $\mathbf{g}(t) = \begin{pmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie die Ableitung der zusammengesetzten Funktion $h = f \circ g$ mit Hilfe der Kettenregel. Ist h überhaupt differenzierbar? Wenn ja, warum?
Funktioniert das auch mit $\mathbf{g} \circ f$?
- 115.** Seien $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (x_1^3 - x_2, x_1 - x_2^3)^t$ und $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = (x_2^2, x_1)^t$. Berechnen Sie die Ableitungen der zusammengesetzten Funktionen $g \circ f$ und $f \circ g$ mit Hilfe der Kettenregel.
- 116.** Sei $Q(K, L, t)$ eine Produktionsfunktion, wobei $L = L(t)$ und $K = K(t)$ selbst Funktionen der Zeit t sind. Berechnen Sie $\frac{dQ}{dt}$ mit Hilfe der Kettenregel.
- 117.** Sei \mathbf{A} eine $n \times m$ Matrix. Bestimmen Sie die Jacobische Matrix der Funktion $\mathbf{f}: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n, \mathbf{x} \mapsto \mathbf{Ax}$.
- 118.** Sei \mathbf{A} eine symmetrische Matrix. Berechnen Sie den Gradienten der quadratischen Form $q_{\mathbf{A}}(\mathbf{x})$.
- 119.** Seien \mathbf{A} eine reguläre 3×3 -Matrix und \mathbf{x} eine Lösung des linearen Gleichungssystems $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$. Berechnen Sie die Jacobische Matrix der Lösung \mathbf{x} als Funktion von \mathbf{b} , i.e., die partiellen Ableitungen $\frac{\partial x_i}{\partial b_j}$.
Hinweis: Verwenden Sie die Cramersche Regel.

Inverse und Implizite Funktionen

120. Geben sei die Funktion $\mathbf{f}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit

$$\mathbf{x} \mapsto \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_1 x_2 \\ x_1 x_2 \end{pmatrix}$$

- Berechnen Sie die Jacobische Matrix und die Funktionaldeterminante dieser Funktion.
- Für welche Punkte lässt sich \mathbf{f} lokal invertieren?
- Wie lautet die Jacobische Matrix für die inverse Funktion?
- Berechne die inverse Funktion (wo sie existiert).

121. Gegeben Sei die Funktion $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit

$$(x, y) \mapsto (u, v) = (ax + by, cx + dy)$$

wobei a, b, c und d Konstante ungleich 0 sind. Zeigen Sie: Falls die Funktionaldeterminante von T gleich 0 ist, dann bildet T den ganzen \mathbb{R}^2 in eine Gerade durch den Ursprung ab.

122. Geben Sie eine hinreichende Bedingung für f und g an, damit die Gleichungen

$$u = f(x, y), \quad v = g(x, y)$$

lokal nach x und y aufgelöst werden können. Seien $x = F(u, v)$ und $y = G(u, v)$ die Lösungen. Berechnen Sie $\frac{\partial F}{\partial u}$ und $\frac{\partial G}{\partial u}$.

123. Zeigen Sie, dass die folgenden Gleichungen y implizit als Funktion von x in einem Intervall um x_0 definieren. Geben Sie $y'(x_0)$ an.

- $y^3 + y - x^3 = 0, \quad x_0 = 0$
- $x^2 + y + \sin(xy) = 0, \quad x_0 = 0$

124. Berechnen Sie $\frac{dy}{dx}$ aus der impliziten Funktion $x^2 + y^3 = 0$.

Für welche Werte x existiert lokal eine explizite Funktion $y = f(x)$? Für welche Werte y existiert ein Funktion $x = g(y)$?

125. Überprüfen Sie, welche der impliziten Funktionen in der Form $z = g(x, y)$ lokal in einer Umgebung der gegebenen Punkte (x_0, y_0, z_0) dargestellt werden können. Berechnen Sie $\frac{\partial g}{\partial x}$ und $\frac{\partial g}{\partial y}$.

- $x^3 + y^3 + z^3 - xyz - 1 = 0, \quad (x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 1)$
- $\exp(z) - z^2 - x^2 - y^2 = 0, \quad (x_0, y_0, z_0) = (1, 0, 0)$

126. Berechnen Sie die Ableitungen $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{dx}{dy}$ der Indifferenzkurve der Nutzenfunktion (Grenzrate der Substitution):

$$u(x, y) = c x^\alpha y^\beta$$

127. Berechnen Sie die Ableitungen $\frac{dx_i}{dx_j}$ der Indifferenzkurve der Nutzenfunktion (Grenzrate der Substitution):

- $u(x_1, x_2) = \left(x_1^{\frac{1}{2}} + x_2^{\frac{1}{2}} \right)^2$
- $u(x_1, \dots, x_n) = \left(\sum_{i=1}^n x_i^{\frac{\theta-1}{\theta}} \right)^{\frac{\theta}{\theta-1}}, \quad \theta > 1$

- 128.** Sei $\mathbf{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine (lokal) invertierbare Funktion. Zeigen Sie mit Hilfe der Kettenregel, dass

$$D(\mathbf{f}^{-1})(\mathbf{f}(\mathbf{x})) = (D\mathbf{f}(\mathbf{x}))^{-1}$$

Hinweis: Wenden Sie die Kettenregel auf die linke Seite der Identität $\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{f}(\mathbf{x})) = id(\mathbf{x})$ an. Wie lautet $D(id)(\mathbf{x})$?

Taylorreihen

129. Entwickeln Sie $f(x) = \frac{1}{2-x}$ in eine MacLaurinreihe bis zur

(a) ersten Potenz

(b) zweiten Potenz

Zeichnen Sie $f(x)$ und die beiden Approximationen für $-3 < x < 5$.

Überlegen Sie sich, wie groß der Konvergenzradius der Taylorreihe höchstens sein kann.

130. Entwickeln Sie $f(x) = (x+1)^{1/2}$ an der Stelle 0 in eine Taylorreihe bis zur dritten Potenz und vergleichen Sie Funktionswert und Approximation an den Stellen $-0,5$, $-0,1$ und $0,3$. Überlegen Sie sich, wie groß der Konvergenzradius der Taylorreihe höchstens sein kann.

131. Entwickeln Sie $f(x) = \sin(x^{10})$ in eine MacLaurinreihe bis zur 30-ten Potenz.

132. Entwickeln Sie $f(x) = \sin(x^2 - 5)$ in eine MacLaurinreihe bis zur vierten Potenz.

133. Berechnen Sie die MacLaurinreihe der Funktion $f(x) = 1/(1+x^2)$. Versuchen Sie herauszufinden, wie groß der Konvergenzradius ist.

134. Entwickeln Sie die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung in eine MacLaurinreihe 6. Ordnung.

135. Zeigen Sie mit Hilfe der entsprechenden Taylorreihen: $(\sin(x))' = \cos(x)$.

136. Gegeben sei das folgende Marktmodell:

$$q_s = \sqrt{p+1} \quad (\text{Angebotsfunktion})$$

$$q_d = \frac{5}{p} \quad (\text{Nachfragefunktion})$$

q_s, q_d und p mit $q_s, q_d, p > 0$ sind die angebotene und nachgefragte Menge sowie der Preis.

Berechnen Sie das (partielle) Marktgleichgewicht ($q_s = q_d$) mit Hilfe einer Approximation durch Taylorreihen. Überlegen Sie dazu mit Hilfe einer Zeichnung beider Funktionen, in welchem Bereich der Gleichgewichtspreis liegen könnte. Berechnen Sie lineare Approximationen (Entwicklung in eine Taylorreihe bis zum Glied erster Ordnung) für beide Funktionen an einer (ganzzahligen) Stelle nahe dem vermuteten Gleichgewichtspreis. Verwenden Sie dann die Näherungen an Stelle der ursprünglichen Funktionen zu seiner Berechnung.

137. Verwenden Sie anstatt der Taylorreihen erster Ordnung in Beispiel 136 solche zweiter Ordnung zur Berechnung und vergleichen Sie die Resultate.

138. Entwickeln Sie die Funktion $f(x, y) = e^{x^2+y^2}$ an der Stelle $\mathbf{x}_0 = (0, 0)$ in eine Taylorreihe 2. Ordnung.

Integration

139. Bestimmen Sie die Stammfunktionen folgender Funktionen:

- | | | | |
|-------------------|---------------------|--------------------|--------------------------|
| (a) x^3 | (b) $\frac{3}{x^2}$ | (c) $\sqrt{x^3}$ | (d) $\frac{1}{\sqrt{x}}$ |
| (e) e^{2x} | (f) 2^{3x} | (g) $\frac{1}{2x}$ | (h) 5 |
| (i) $\sin(\pi x)$ | (j) $\cos(2\pi x)$ | | |

140. Bestimmen Sie die Stammfunktionen folgender Funktionen:

- | | | |
|----------------------------|--|-------------------------|
| (a) $x^4 + 2x^2 - x + 3$ | (b) $x^3 + 7x + \frac{6}{x+1}$ | (c) $e^x + x^e + e + x$ |
| (d) $\frac{x+1}{\sqrt{x}}$ | (e) $4x^3 + 3x^2 + 2x + 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}$ | |

141. Berechnen Sie die unbestimmten Integrale:

- | | |
|-------------------------------------|----------------------------------|
| (a) $\int x^3 - 2x^2 + \sqrt{x} dx$ | (b) $\int \sqrt[3]{x^2} dx$ |
| (c) $\int \frac{2}{x} dx$ | (d) $\int \sin(x) - 3\cos(x) dx$ |

142. Ermitteln Sie die Stammfunktionen folgender Funktionen durch partielle Integration:

- | | | |
|------------------------|--------------------------|--------------------------|
| (a) $f(x) = 2x e^x$ | (b) $f(x) = x^2 e^{-x}$ | (c) $f(x) = x \ln(x)$ |
| (d) $f(x) = x^3 \ln x$ | (e) $f(x) = x(\ln(x))^2$ | (f) $f(x) = x^2 \sin(x)$ |

143. Berechnen Sie die folgenden Stammfunktionen durch Anwendung der Substitutionsregel:

- | | | |
|------------------------------------|--------------------------------------|---------------------------------------|
| (a) $\int x e^{x^2} dx$ | (b) $\int 2x \sqrt{x^2 + 6} dx$ | (c) $\int \frac{x}{3x^2 + 4} dx$ |
| (d) $\int x \sqrt{x+1} dx$ | (e) $\int \frac{\ln(x)}{x} dx$ | (f) $\int \frac{1}{x \ln x} dx$ |
| (g) $\int \sqrt{x^3 + 1} x^2 dx$ | (h) $\int \frac{x}{\sqrt{5-x^2}} dx$ | (i) $\int \frac{x^2 - x + 1}{x-3} dx$ |
| (j) $\int x(x-8)^{\frac{1}{2}} dx$ | | |

144. Bestimmen Sie die folgenden Stammfunktionen:

- | | | |
|--------------------------------------|-------------------------------|-------------------------------------|
| (a) $\int \frac{3x^2 + 4}{x} dx$ | (b) $\int e^{2x} \ln(e^x) dx$ | (c) $\int (2x+1)e^{3x} dx$ |
| (d) $\int x^3 e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ | (e) $\int e^{3x+2} dx$ | (f) $\int \frac{2x+3}{9-4x^2} dx$ |
| (g) $\int \frac{e^{2x}}{e^{5-x}} dx$ | (h) $\int t e^{t^2} dt$ | (i) $\int \frac{1}{x} (\ln x)^3 dx$ |
| (j) $\int \frac{y}{\sqrt{1+y^2}} dx$ | | |

145. Suchen Sie Stammfunktionen der folgenden Funktionen:

(a) $f(x) = \frac{x^2 + 3x + 2}{\sqrt{x}}$

(b) $f(x) = (x^2 - 1)^2$

(c) $f(x) = \frac{x^{\frac{3}{2}} + \sqrt{x}}{x}$

(d) $f(x) = \frac{(x + \sqrt{x})(2x + \frac{1}{x})}{x^2}$

(e) $f(x) = x^2(x^2 + x^4 + 1)$

(f) $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{x}}$

146. Berechnen Sie:

$$\int \tan(x) dx \quad (\text{Hinweis: } \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)})$$

147. Die Grenzkosten betragen $C'(x) = 30 - 0,05x$. Wie lautet die Kostenfunktion, wenn die Fixkosten 2000 GE betragen?(Hinweis: Gesucht ist jene Stammfunktion $C(x)$ von $C'(x)$ mit $C(0) = 2000$.)**148.** Die Grenzkosten betragen $C'(x) = 24 - 0,03x + 0,006x^2$. Die Gesamtkosten von 200 Stück sind 22 700 GE. Wie lautet die Kostenfunktion, wie groß sind die Fixkosten, und wie hoch sind Gesamtkosten von 500 Stück?**149.** Der Grenzertrag eines Produktionsunternehmens ist $R'(x) = 4 - 0,01x$. Wie lautet die Erlösfunktion?**150.** Die Grenzkosten betragen $C'(x) = 10 - 0,1x + 0,003x^2$. Die Gesamtkosten von 100 Stück betragen 2500 GE. Bestimmen Sie $C(x)$. Wie groß sind die Fixkosten?**151.** Berechnen Sie das Integral $\int_0^1 f(x) dx$, wobei die Funktion $f(x)$ stückweise konstant ist (Treppenfunktion) und gegeben ist durch

(a) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \leq x < 0,2 \\ 0,5 & \text{für } 0,2 \leq x < 0,5 \\ 2,5 & \text{für } 0,5 \leq x < 0,6 \\ 3,5 & \text{für } 0,6 \leq x < 0,7 \\ -3,5 & \text{für } 0,7 \leq x \leq 1 \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} -2 & \text{für } 0 \leq x < 0,3 \\ 0,5 & \text{für } 0,3 \leq x < 0,5 \\ -1,5 & \text{für } 0,5 \leq x < 0,8 \\ 1,5 & \text{für } 0,8 \leq x < 0,9 \\ 2,5 & \text{für } 0,9 \leq x \leq 1 \end{cases}$

152. Die Funktion f sei stetig und linear in den Intervallen $[0, 2]$, $[2, 6]$ und $[6, 10]$. Außerdem sei $f(0) = 0$, $f(2) = 5$, $f(6) = 2$ und $f(10) = -5$.Berechnen Sie das Integral $\int_0^{10} f(x) dx$.**153.** Berechnen Sie die folgenden bestimmten Integrale:

(a) $\int_1^4 2x^2 - 1 dx$

(b) $\int_0^2 3e^x dx$

(c) $\int_1^4 3x^2 + 4x dx$

(d) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{-\sin(x)}{3} dx$

(e) $\int_0^1 \frac{3x + 2}{3x^2 + 4x + 1} dx$

154. Berechnen Sie die Integrale mit Hilfe von Stammfunktionen:

- (a) $\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx$ (b) $\int_0^1 x(x^2 + 3)^4 dx$ (c) $\int_0^2 x \sqrt{4 - x^2} dx$
 (d) $\int_1^2 \frac{x}{x^2 + 1} dx$ (e) $\int_0^2 x \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx$ (f) $\int_0^3 (x - 1)^2 x dx$
 (g) $\int_0^1 x \exp(x) dx$ (h) $\int_0^2 x^2 \exp(x) dx$ (i) $\int_1^2 x^2 \ln x dx$

155. Berechnen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale:

- (a) $\int_0^\infty -e^{-3x} dx$ (b) $\int_0^1 \frac{2}{\sqrt[4]{x^3}} dx$ (c) $\int_0^\infty \frac{x}{x^2 + 1} dx$

156. Berechnen Sie die uneigentlichen Integrale:

- (a) $\int_0^\infty \frac{1}{(1+x)^2} dx$ (b) $\int_0^\infty x^2 e^{-x} dx$ (c) $\int_0^\infty x e^{-\frac{x^2}{2}} dx$
 (d) $\int_1^\infty \frac{\ln(x)}{(1+x)^2} dx$

Hinweis zu (d): $\int \ln(x) \cdot (1+x)^{-2} dx$ partiell integrieren; beachte, dass $\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{1+x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{1+x}$.

157. Existieren die folgenden uneigentlichen Integrale? Berechnen Sie die uneigentlichen Integrale:

- (a) $\int_2^\infty \frac{1}{x \ln(x)} dx$ (b) $\int_1^2 \frac{1}{x \ln(x)} dx$ (c) $\int_0^1 \frac{1}{x^2} dx$
 (d) $\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx$ (e) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ (f) $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}} dx$

158. Für welche Werte von $\alpha \in \mathbb{R}$ konvergieren die folgenden uneigentlichen Integral? Wie lautet das Ergebnis?

- (a) $\int_0^1 x^\alpha dx$ (b) $\int_1^\infty x^\alpha dx$ (c) $\int_0^\infty x^\alpha dx$

159. Der Erwartungswert einer stetigen Zufallsvariable X mit Dichte f ist definiert als

$$E(X) = \int_{-\infty}^\infty x f(x) dx.$$

Berechnen Sie den Erwartungswert der sogenannten *halbnormalen* Verteilung mit Dichte

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) & \text{für } x \geq 0, \\ 0 & \text{für } x < 0. \end{cases}$$

160. Berechnen Sie den Erwartungswert der Normalverteilung mit Dichte

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right).$$

Hinweis: $E(X) = \int_{-\infty}^\infty x f(x) dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^0 x f(x) dx + \lim_{s \rightarrow \infty} \int_0^s x f(x) dx$.

- 161.** Sei X eine sogenannte *Cauchy*-verteilte Zufallsvariable mit Dichte

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}.$$

Zeigen Sie, dass X keinen Erwartungswert besitzt.

Hinweis: Zeigen Sie dass das uneigentliche Integral $\int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$ divergiert.

Warum ist der folgende Ansatz falsch?

$$E(X) = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{-t}^t \frac{x}{\pi(1+x^2)} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} 0 = 0.$$

- 162.** Sei $T \geq 0$. Berechnen Sie

$$\frac{d}{dx} \int_0^{g(x)} U(x) e^{-(t-T)} dt.$$

- 163.** Sei f die Dichte einer stetigen Zufallsvariable X . Die sogenannte *momenterzeugende Funktion* von X ist definiert als

$$M(t) = E(e^{tX}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x) dx.$$

Zeigen Sie, dass $M'(0) = E(X)$, d.h., der Erwartungswert von X .

Hinweis: Verwenden Sie die Leibniz-Formel.

- 164.** Die Gammafunktion $\Gamma(z)$ ist eine Erweiterung der Fakultätsfunktion auf alle positiven reellen Zahlen. Sie ist definiert als

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt.$$

- (a) Zeigen Sie mittels partiellem Integrieren, dass

$$\Gamma(z+1) = z \Gamma(z).$$

- (b) Berechnen Sie $\Gamma'(z)$ mittels Leibniz-Formel.

- 165.** Berechnen Sie die folgenden Doppelintegral:

(a) $\int_0^2 \int_0^1 (2x + 3y + 4) dx dy$

(b) $\int_0^a \int_0^b (x-a)(y-b) dy dx$

(c) $\int_0^{1/2} \int_0^{2\pi} y^3 \sin(xy^2) dx dy$

Extrema

166. Welche der angegebenen Funktionen über \mathbb{R}^2 ist (streng) konvex oder konkav:

(a) $f(x, y) = x^2 - 2xy + 2y^2 + 4x - 8$

(b) $g(x, y) = 2x^2 - 3xy + y^2 + 2x - 4y - 2$

(c) $h(x, y) = -x^2 + 4xy - 4y^2 + 1$

167. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + px + qy + r$$

streng konkav ist falls $ac - b^2 > 0$ und $a < 0$ und streng konvex für $ac - b^2 > 0$ und $a > 0$.

Finden Sie notwendige und hinreichende Bedingungen für die Konvexität / Konkavität von f .

168. Bestimmen Sie die lokalen Extremwerte der Funktionen

(a) $f(x) = (x - 3)^6$

(b) $g(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$

169. Berechnen Sie die globalen Extrema der Funktionen

(a) $f: [0, \infty] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x} + x$

(b) $f: [0, \infty] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{x} - x$

(c) $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto e^{-2x} + 2x$

170. Die Gesamtkosten $K(x)$ für die Produktion setzen sich aus fixen Kosten von 10 Geldeinheiten und variablen Kosten von fünf Geldeinheiten pro produzierter Einheit x zusammen. Der Erlös pro Einheit hängt von der verkauften Menge ab. Für Mengen größer als 0 und kleiner als 5001 Stück ist er durch folgende Funktion gegeben: $P(x) = 9 - \ln(x)$.

Berechnen Sie die Stückzahl x , die den Gewinn $xP(x) - K(x)$ maximiert ($x \in [1, 5000]$). Handelt es sich dabei um ein globales Maximum?

171. Der Gewinn eines Unternehmers für gegebene Preise p und einen Lohn w ist

$$\pi(x) = p \cdot f(x) - w \cdot x$$

$p \cdot f(x)$ gibt an, wieviel der Unternehmer aus dem Verkauf der Güter zum Preis p einnimmt. $w \cdot x$ gibt an, wieviel der Unternehmer an Löhnen zahlen muß.

Sei $f(x) = 4x^{\frac{1}{2}}$ die Produktionsfunktion aus Beispiel 101 mit $a = \frac{1}{2}$ und $b = 4$.

(a) Zeichnen Sie $\pi(x)$ und $\pi'(x)$ für $p = 1$ und $w = 1$.

(b) Lesen Sie aus der Zeichnung ab, wieviel der Unternehmer produzieren muß, um seinen Gewinn $\pi(x)$ zu maximieren.

(c) Lösen sie das Optimierungsproblem auch ohne Zeichnung.

(d) Was passiert, wenn der Lohn auf $w = 2$ verdoppelt wird? (Zeichnung, Maximumberechnung)

172. Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und T eine streng monoton wachsende Transformation. Zeigen Sie: x_0 ist ein (lokales/globales) Maximum von f genau dann, wenn x_0 ein (lokales/globales) Maximum der transformierten Funktion $T \circ f$ ist.

- 173.** Berechnen Sie die kritische Punkte folgender Funktionen und stellen Sie mit Hilfe der Hesse-Matrix fest, ob es sich dabei um (lokale) Maxima, Minima oder Sattelpunkte handelt.

(a) $f(x, y) = -x^2 + xy + y^2$

(b) $f(x, y) = \frac{1}{x} \ln(x) - y^2 + 1$

(c) $f(x, y) = 100(y - x^2)^2 + (1 - x)^2$

- 174.** Gegeben ist die Funktion

$$f(x_1, x_2) = 3x_1 + 4x_2 - e^{x_1} - e^{x_2}$$

- (a) Berechnen Sie die lokalen Optima der Funktion.
 (b) Stellen Sie das Krümmungsverhalten der Funktion fest.
 (c) Berechnen Sie die globalen Extrema der Funktion.

- 175.** Berechnen Sie alle kritischen Punkte der Funktion

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1^3 - x_1)x_2 + x_3^2$$

Stellen Sie fest ob es sich dabei um lokale Maxima, Minima oder Sattelpunkte handelt. Was können Sie über das Krümmungsverhalten dieser Funktionen sagen?

- 176.** (Preisdiskiminierung)

Angenommen eine monopolistische Firma produziert ein Gut und beliefert drei Märkte. Die Nachfragefunktionen in diesen Märkten seien

$$p_1 = 63 - 4q_1, \quad p_2 = 105 - 5q_2 \quad \text{und} \quad p_3 = 75 - 6q_3.$$

Dabei ist p_i der Preis und q_i die abgesetzte Menge im Markt i . Der Gesamtumsatz R der Firma ergibt sich aus den drei Einzelumsätzen:

$$R = R_1 + R_2 + R_3 = p_1 q_1 + p_2 q_2 + p_3 q_3.$$

Die Produktionskosten C seien unabhängig vom jeweiligen Markt:

$$C = 20 + 15q = 20 + 15(q_1 + q_2 + q_3).$$

Die Firma möchte ihren Gewinn $R - C$ maximieren. Berechnen Sie die optimale Gesamtproduktion und den Umsatz in den einzelnen Märkten.

Lagrange-Funktion

- 177.** Gesucht sind die (lokalen) Extrema von $f(x, y) = x^2 y$ unter der Nebenbedingung $x + y = 3$.
- Lösen Sie das Optimierungsproblem graphisch.
 - Berechnen Sie die stationären Punkte.
 - Stellen Sie mit Hilfe der geränderten Hesse-Matrix fest, ob es sich dabei um Maxima oder Minima handelt.
- 178.** Bestimmen Sie die stationären Punkte der Funktion $f(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{3}(x_1 - 3)^3 + x_2 x_3$ unter den Nebenbedingungen $x_1 + x_2 = 4$ und $x_1 + x_3 = 5$. Bestimmen Sie mit Hilfe der geränderten Hesse-Matrix, ob es sich dabei um lokale Maxima oder Minima handelt.
- 179.** Ein Haushalt möchte für ein bestimmtes Nutzenniveau, $U = U_0$, seine Ausgaben E minimieren. Es sei $U = U_0 = 1 = x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{2}}$ und $E = 4x_1 + x_2$. Berechnen Sie die optimale Konsumkombination der Gütermengen x_1 und x_2 .
- 180.** Ein Haushalt hat ein Einkommen von m Schillingen zur Verfügung und kann davon zwei Güter 1 und 2 kaufen. Die Preise dieser Güter sind p_1 und p_2 . Es gilt also

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 = m$$

wobei x_1 und x_2 die Stückzahlen der Güter bezeichnen.

Wie entscheidet sich der Haushalt zwischen den beiden Gütern? Er optimiert seinen Nutzen $u(x_1, x_2)$.

- Berechnen Sie das Optimum am Beispiel der Nutzenfunktion

$$u(x_1, x_2) = \alpha \ln(x_1) + (1 - \alpha) \ln(x_2)$$

($\alpha \in (0, 1)$ ist dabei ein Parameter.)

- Was passiert, wenn sich der Preis von Gut 1 ändert?
- Was passiert, wenn sich das Einkommen ändert? Wie ändert sich der Nutzen im Optimum?

Kuhn-Tucker Bedingung

181. Kann man den Satz von Kuhn-Tucker auf folgende Probleme anwenden?

(a) $\max x_1$ NB: $x_1^2 + x_2^2 \leq 1$, $x_1, x_2 \geq 0$

(b) $\max -(x_1 - 3)^2 + (x_2 - 4)^2$ NB: $x_1 + x_2 \geq 4$, $x_1, x_2 \geq 0$

(c) $\max 2x_1 + x_2$ NB: $x_1^2 - 4x_1 + x_2^2 \geq 0$, $x_1, x_2 \geq 0$

182. Lösen Sie das folgende Optimierungsproblem graphisch:

$$f(x, y) = -(x - 2)^2 - y \rightarrow \max$$

$$x + y \leq 1, \quad x, y \geq 0$$

183. Lösen Sie das Optimierungsproblem aus Aufgabe 182 rechnerisch.

Differentialgleichungen

184. Berechnen Sie die allgemeinen Lösungen der folgenden Differentialgleichungen durch Trennung der Variablen.

$$(a) \quad y' - k \frac{y}{t} = 0$$

$$(c) \quad y' = t y$$

$$(e) \quad y' = y^2$$

$$(b) \quad t y' - (1 + y) = 0$$

$$(d) \quad y' + e^y = 0$$

$$(f) \quad y' = \sqrt{t^3} y$$

185. Berechnen Sie die speziellen Lösungen der Differentialgleichungen aus Aufgabe 184 mit Anfangswerten $y(1) = 1$.

186. Sei $U(x)$ eine Nutzenfunktion mit der Eigenschaft, dass der Grenznutzen $U'(x)$ indirekt proportional zu $U(x)$ ist.

- Geben Sie eine Differentialgleichung an, die diese Eigenschaft beschreibt.
- Berechnen Sie die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung.
- Geben Sie eine sinnvolle spezielle Lösung dieser Differentialgleichung an. (Welchen Wert sollte $U(0)$ haben?)

187. Angenommen Nachfrage- und Angebotsfunktion eines bestimmten Gutes seien

$$\begin{aligned} q_d(t) &= \alpha - \beta p(t) + \nu p'(t) \\ q_s(t) &= -\gamma + \delta p(t) \end{aligned}$$

wobei $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \nu > 0$ konstant sind. Die Änderung des Preises sei weiters direkt proportional der Differenz aus Nachfrage und Angebot,

$$\frac{dp}{dt} = j(q_d(t) - q_s(t))$$

wobei $j > 0$ der Anpassungskoeffizient ist.

Welche Funktion $p(t)$ beschreibt die Preisentwicklung, wenn $p(0) = p_0$ ist?

Wodurch unterscheidet sich dieses Modell von jenem aus dem Skriptum?

188. Die erwartete Anzahl von Abnehmern für ein Produkt beträgt 96000. Beim Start einer Werbekampagne kennen 4000 Leute das Produkt, zwei Monate später sind es bereits 12000. Nehmen Sie an, die Anzahl der Leute $A(t)$, die das Produkt zum Zeitpunkt t kennen, lässt sich durch eine logistische DG beschreiben.

- Geben Sie die Funktion $A(t)$ an.
- Wieviele Leute kennen das Produkt nach sechs Monaten?
- Die Werbekampagne soll gestoppt werden, wenn drei Viertel aller potentiellen Konsumenten das Produkt kennen. Wie lange dauert die Kampagne?

189. Zeigen Sie, dass die Funktion $y(t) = C e^{-at} + \frac{s}{a}$ eine Lösung der inhomogenen linearen DG $y'(t) + a y(t) = s$ ($a, s \in \mathbb{R}$) ist.

Kann man diese Funktion auch verwenden, wenn $a = a(t)$ oder $s = s(t)$ nicht-konstante Funktionen von t sind? Wenn ja, begründen Sie Ihre Behauptung. Wenn nein, geben Sie ein Gegenbeispiel.

190. (a) Berechnen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y'' = x^2 + 2x - 5$$

(b) Berechnen Sie das Anfangswertproblem $y'' = x^2 + 2x - 5$ mit den Anfangswerten $y(0) = 0$ und $y'(0) = 3$.

191. Lösen Sie $y'' + y' - 2y = 3$ mit den Anfangsbedingungen $y(0) = y'(0) = 1$.

192. Lösen Sie $y'' - 6y' + 9y = 0$ mit den Anfangsbedingungen $y(0) = 2$ und $y'(0) = 0$.

193. Lösen Sie $y'' + 2y' + 17y = 0$.

Hat diese Differentialgleichung einen Fixpunkt?

Ist der Fixpunkt instabil oder asymptotisch stabil?

Kontrolltheorie

194. Lösen Sie das Kontrollproblem:

$$\max \int_0^2 [e^t y(t) - u(t)^2] dt, \quad u \in \mathbb{R}$$
$$y'(t) = -u(t), \quad y(0) = 0, \quad y(2) \text{ frei}$$

195. Lösen Sie das Kontrollproblem:

$$\max \int_0^1 [1 - u(t)^2] dt, \quad u \in \mathbb{R}$$
$$y'(t) = y(t) + u(t), \quad y(0) = 1, \quad y(1) \text{ frei}$$

196. Lösen Sie das Kontrollproblem:

$$\min \int_0^1 [y(t) + u(t)^2] dt, \quad u \in \mathbb{R}$$
$$y'(t) = -u(t), \quad y(0) = 0, \quad y(1) \text{ frei}$$

197. Lösen Sie das Kontrollproblem:

$$\max \int_0^{10} [1 - 4y(t) - 2u(t)^2] dt, \quad u \in \mathbb{R}$$
$$y'(t) = u(t), \quad y(0) = 0, \quad y(10) \text{ frei}$$

198. Lösen Sie das Kontrollproblem:

$$\max \int_0^T [y(t) - u(t)^2] dt, \quad u \in \mathbb{R}$$
$$y'(t) = y(t) + u(t), \quad y(0) = 0, \quad y(T) \text{ frei}$$

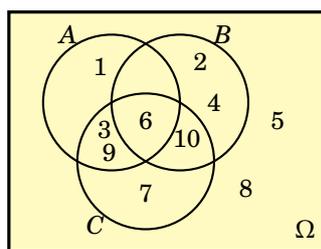
Lösungen

1. (a) W, (b) F, (c) W, (d) W, (e) F, (f) F.
 2. (a) $p \wedge q$, (b) $p \Rightarrow q$, (c) $q \Leftrightarrow \neg p$, (d) $\neg q \vee p$, (e) $\neg(q \vee \neg p)$.

3. Erstellen Sie eine Wahrheitstabelle:

| a | b | $a \Rightarrow b$ | $\neg a$ | $\neg b$ | $\neg b \Rightarrow \neg a$ | $(a \Rightarrow b) \Leftrightarrow (\neg b \Rightarrow \neg a)$ |
|-----|-----|-------------------|----------|----------|-----------------------------|---|
| W | W | W | F | F | W | W |
| W | F | F | F | W | F | W |
| F | W | W | W | F | W | W |
| F | F | W | W | W | W | W |

4. (a) wahr.
 Hinweis: Eine Primzahl größer oder gleich 3 muß stets ungerade sein, andernfalls wäre sie ja durch 2 teilbar. Also können zwei Primzahlen nie aufeinander folgen.
 (b) falsch.
 Hinweis: Überlegen Sie, dass sowohl aus $p \Rightarrow \neg q$ als auch $\neg q \Rightarrow p$ wahr sein muss.
 5. (a) $\{1, 3, 6, 7, 9, 10\}$; (b) $\{6\}$; (c) $\{1\}$; (d) $\{2, 4, 5, 7, 8, 10\}$; (e) $\{6, 10\}$; (f) $\{2, 4, 5, 8\}$; (g) $\{2, 4\}$; (h) $\{5, 8\}$; (i) $\{3, 6, 9\}$.



6. Obermenge Ω ist die Menge aller Einwohner des Wahlbezirks. (a) alle männlichen Wahlberechtigten; (b) alle weiblichen Wahlberechtigten; (c) alle unselbständig beschäftigten Männer; (d) alle nicht pensionierten Wahlberechtigten; (e) alle nicht wahlberechtigten Frauen; (f) alle Männer (= B); (g) alle pensionierten Frauen; (h) alle Frauen, die pensioniert oder unselbständig beschäftigt sind.
 7. A.
 8. (a) $\overline{A \cap B}$; (b) A; (c) \emptyset ; (d) C.
 9. (a) keine Teilmenge; (b) keine Teilmenge; da Menge = $\{-11, 11\}$; (c) Teilmenge; (d) keine Teilmenge.

10. (a) keine Abbildung; (b) bijektive Abbildung; (c) Abbildung, weder injektiv noch surjektiv; (d) injektive Abbildung, nicht surjektiv.
11. (a) $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 8 \\ 10 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, (b) nicht möglich, da Anzahl der Spalten von \mathbf{A} ungleich der Anzahl der Zeilen von \mathbf{B} , (c) $3\mathbf{A}^t = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -18 & 3 \\ 15 & -9 \end{pmatrix}$, (d) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}^t = \begin{pmatrix} -8 & 18 \\ -3 & 10 \end{pmatrix}$, (e) $\mathbf{B}^t \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 17 & 2 & -19 \\ 4 & -24 & 20 \\ 7 & -16 & 9 \end{pmatrix}$, (f) nicht möglich, da Anzahl der Zeilen und Spalten nicht übereinstimmen, (g) $\mathbf{C} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{C} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \begin{pmatrix} -8 & -3 & 9 \\ 22 & 0 & 6 \end{pmatrix}$, (h) $\mathbf{C}^2 = \mathbf{C} \cdot \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$.
12. $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \neq \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.
13. (a) Diagonalmatrix, (b) obere Dreiecksmatrix, (c) untere Dreiecksmatrix.
14. Eine $n \times n$ -Matrix \mathbf{A} heißt *obere Dreiecksmatrix*, falls $a_{ik} = 0$ für alle i, k mit $1 \leq k < i \leq n$.
Seien \mathbf{A} und \mathbf{B} zwei obere Dreiecksmatrizen, dann gilt für $\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$:
 $c_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk}$. Ein Summand $a_{ij} b_{jk}$ kann aber nur ungleich 0 sein, falls $j \leq k$ und $j \geq i$. Falls $1 \leq k < i \leq n$ dann muss $c_{ik} = 0$ sein, i.e., \mathbf{C} ist eine obere Dreiecksmatrix.
15. Eine $n \times n$ -Matrix \mathbf{A} heißt *Diagonalmatrix*, falls $a_{ik} = 0$ für alle i, k mit $i \neq k$. Da jede Diagonalmatrix auch eine obere Dreiecksmatrix ist, folgt die Behauptung aus dem Resultat von Aufgabe 14.
16. $\mathbf{A} \mathbf{e}_i = \mathbf{a}_i$, i.e., wir erhalten den i -ten Spaltenvektor von \mathbf{A} .
17. Sei $\mathbf{b} = \mathbf{e}_i$ und $\mathbf{x} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{b}$. Dann ist $x_j = \sum_{k=1}^n a_{jk} b_k = a_{ji}$, da $b_k = 0$ falls $k \neq i$. Also $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m)^t = (a_{1i}, \dots, a_{mi}) = \mathbf{a}_i$.
18. Wir erhalten den i -ten Zeilenvektor von \mathbf{A} .
19. Lösung 1: Analog zu Aufgabe 18.
Lösung 2: Seien $\mathbf{C} = \mathbf{A}^t$ und $\mathbf{x} = \mathbf{e}_i^t \cdot \mathbf{A} = \mathbf{e}_i^t \cdot \mathbf{C}^t$. Dann ist $\mathbf{x}^t = \mathbf{C} \mathbf{e}_i$ der i -te Spaltenvektor von \mathbf{C} (Resultat von Aufgabe 18) und damit \mathbf{x} der i -te Zeilenvektor von $\mathbf{C}^t = \mathbf{A}$.
20. $\mathbf{x}^t \mathbf{x} = 21$, $\mathbf{x} \mathbf{x}^t = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -2 & 4 & -8 \\ 4 & -8 & 16 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x}^t \mathbf{y} = -1$, $\mathbf{y}^t \mathbf{x} = -1$,
 $\mathbf{x} \mathbf{y}^t = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \\ -12 & -4 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{y} \mathbf{x}^t = \begin{pmatrix} -3 & 6 & -12 \\ -1 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
21. Die i -te Zeile von $\mathbf{D} \cdot \mathbf{A}$ erhält man durch Multiplizieren der i -ten Zeile von \mathbf{A} mit d_{ii} . Die i -te Spalte von $\mathbf{A} \cdot \mathbf{D}$ erhält man durch Multiplizieren der i -ten Spalte von \mathbf{A} mit d_{ii} .
22. (a) $\mathbf{X} = (\mathbf{A} + \mathbf{B} - \mathbf{C})^{-1}$, die Inverse $(\mathbf{A} + \mathbf{B} - \mathbf{C})^{-1}$ muss existieren, (b) $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{C}$, \mathbf{A}^{-1} muss existieren, (c) $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{A}$, \mathbf{A}^{-1} muss existieren, (d) $\mathbf{X} = \mathbf{C} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{C} (\mathbf{A} \mathbf{B})^{-1}$, die Inversen von \mathbf{A} , \mathbf{B} und \mathbf{X} müssen existieren.
23. $(\mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}^{-1}) \cdot (\mathbf{A} \mathbf{B}) = \mathbf{B}^{-1} (\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A}) \mathbf{B} = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{I} \mathbf{B} = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{B} = \mathbf{I}$. Daraus folgt nach Definition der inversen Matrix: $(\mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}^{-1})$ ist die Inverse zu $(\mathbf{A} \mathbf{B})$.
24. (a) $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{21}$, $\|\mathbf{y}\| = \sqrt{10}$, $\mathbf{x}^t \cdot \mathbf{y} = -1$, (b) $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{14}$, $\|\mathbf{y}\| = \sqrt{15}$, $\mathbf{x}^t \cdot \mathbf{y} = 10$.

25. Sei $a = \mathbf{x}^t \mathbf{y}$. Da $a \in \mathbb{R}$ (1-dimensionaler Vektor) ist $a^t = a$. Daher ist $\mathbf{x}^t \mathbf{y} = a = a^t = (\mathbf{x}^t \mathbf{y})^t = \mathbf{y}^t (\mathbf{x}^t)^t = \mathbf{y}^t \mathbf{x}$, wie behauptet.

26. $x_1 = 13, x_2 = -16, x_3 = 6$

27.
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}.$$

Hinweis: Die Darstellung der Lösung ist nicht eindeutig.

28. Das Gleichungssystem ist inkonsistent, $\mathcal{L} = \emptyset$.

29.
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_1 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ \frac{1}{6} \\ 0 \\ \frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}.$$

Hinweis: Die Darstellung der Lösung ist nicht eindeutig.

30. (a) invertierbar, $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -19 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 12 & 2 \end{pmatrix}$, (b) nicht regulär \Leftrightarrow nicht invertierbar, die

Inverse Matrix \mathbf{B}^{-1} existiert nicht.

31.
$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 72 \\ -4 \\ -45 \end{pmatrix}$$

32. z.B.: (a) $2\mathbf{x}_1 + 0\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, (b) $3\mathbf{x}_1 - 2\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

33. (a) linear unabhängig, (b) linear unabhängig, (c) linear abhängig (Es können höchstens drei Vektoren mit drei Komponenten linear unabhängig sein. Hier ist also eine Rechnung überflüssig.)

34. (a) $\text{rank}(\mathbf{A}) = 3$, (b) $\text{rank}(\mathbf{B}) = 3$, (c) $\text{rank}(\mathbf{C}) = 3$,
(d) $\text{rank}(\mathbf{D}) = \text{rank}(\mathbf{D}^t) = 2$, (e) $\text{rank}(\mathbf{E}) = 2$.

35. $\text{rank}(\mathbf{A}) = 3, \text{rank}(\mathbf{B}) = 2, \text{rank}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \text{rank} \begin{pmatrix} 14 & 8 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ -10 & -8 & -6 \end{pmatrix} = 2$

36. $\text{rank}(\mathbf{A}) = 2, \text{rank}(\mathbf{B}) = 2, \text{rank}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \text{rank} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1$

37. (a) Mindestens eine Lösung. Die rechte Spalte der erweiterten Koeffizientenmatrix besteht aus lauter Nullen. Daher ist ihr Rang niemals größer als der Rang der Koeffizientenmatrix.

(b) Nein, da durch Hinzufügen einer Spalte zur Koeffizientenspalte der Rang nicht kleiner werden kann.

38. (a) $\dim = 2$, (b) $\dim = 3$, (c) $\dim = 3$. Die Vektoren $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ und \mathbf{v}_3 aus (b) bilden eine Basis.

39. (a) $\mathbf{c}_x = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{c}_y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \mathbf{c}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, (b) $\mathbf{c}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{c}_y = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \mathbf{c}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

40. (a) Sei $\mathbf{V} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$. Dann erhalten wir die neue Basis $\mathbf{W} = (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3)$ durch

$$\mathbf{W} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{U}: \mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{w}_3 = \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

$$(b) \mathbf{U}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}, (c) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{V}$$

41. Seien $\mathbf{V} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{W} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

$$(a) \mathbf{U} = \mathbf{V}^{-1} \cdot \mathbf{W} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; (b) \mathbf{c}_2 = \mathbf{U}^{-1} \mathbf{c}_1 = \begin{pmatrix} 13 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}; \mathbf{c}_0 = \mathbf{V} \mathbf{c}_1 = \begin{pmatrix} -9 \\ 12 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

42. $\dim(\text{Im}(\varphi_{\mathbf{A}})) = \text{rank}(\mathbf{A}) = 2$. $\dim(\text{Ker}(\varphi_{\mathbf{A}})) = 3 - \text{rank}(\mathbf{A}) = 1$. Beispiel für Basis von $\text{Im}(\varphi_{\mathbf{A}})$: zwei linear unabhängige Spaltenvektoren von \mathbf{A} ; Beispiel für Basis von $\text{Ker}(\varphi_{\mathbf{A}})$: $(1, -2, 1)^t$.

$$43. \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

44. \mathbf{A} ist eine $n \times m$ -Matrix.

45. (a) Sei $\mathbf{y} \in \mathcal{L}_0$. Dann gibt es ein $\mathbf{x} \in \mathcal{L}$ mit $\mathbf{y} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$. Daher gilt: $\mathbf{A}\mathbf{y} = \mathbf{A}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{A}\mathbf{x}_0 = \mathbf{b} - \mathbf{b} = 0$, wie behauptet.

(b) Seien $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in \mathcal{L}_0$. Dann gibt es $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathcal{L}$ mit $\mathbf{y}_i = \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_0$ für $i = 1, 2$. Dann gilt für alle $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$: $\mathbf{A}(a_1\mathbf{y}_1 + a_2\mathbf{y}_2) = a_1\mathbf{A}\mathbf{y}_1 + a_2\mathbf{A}\mathbf{y}_2 = a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0 = 0$.

(c) $m \geq 1$, (d) $\text{rank}(\mathbf{A}) \leq n - 1$.

46. (a) Vektorraum, $\dim = 3$, kanonische Basis $\{(1, 0, 0)^t, (0, 1, 0)^t, (0, 0, 1)\}$; (b) kein Vektorraum, da $(1, 2)^t + (1, 2, 3)^t$ nicht definiert ist; (c) Vektorraum, $\dim = 4$, Basis $\{1, x, x^2, x^3\}$; (d) kein Vektorraum, da $(x^3 + x) - (x^3 - 1) = x + 1$ kein Polynom 3. Grades ist; (e) Vektorraum, $\dim = \infty$, für die Behandlung eines unendlich dimensionalen Vektorraumes bedarf es weiterer mathematischer Werkzeuge; (f) Vektorraum, $\dim = n - \text{rank}(\mathbf{A})$, wenn \mathbf{A} eine $m \times n$ -Matrix ist; (g) Vektorraum, $\dim = \text{rank}(\mathbf{A})$.

47. (a) -3 , (b) -9 , (c) 8 , (d) 0 , (e) -40 , (f) -10 (g) 48 , (h) -49 , (i) 0 .

48. Siehe Lösung zu Aufgabe 47.

49. Alle Matrizen mit Ausnahme von 47(d) und (i) sind regulär, invertierbar und haben linear unabhängige Spaltenvektoren. Ränge der Matrizen: (a)–(d) Rang 2, (e)–(f) Rang 3, (g)–(h) Rang 4, (i) Rang 1.

50. (a) $\det(\mathbf{A}) = 3$ (z.B. Regel von Sarrus), (b) $\det(5\mathbf{A}) = 5^3 \det(\mathbf{A}) = 375$ (aus jeder Spalte kann 5 „herausgehoben“ werden, Eigenschaft (1)), (c) $\det(\mathbf{B}) = 2 \det(\mathbf{A}) = 6$ (die zweite Spalte von \mathbf{A} wurde mit 2 multipliziert um \mathbf{B} zu erhalten, Eigenschaft (1)), (d) $\det(\mathbf{A}^t) = \det(\mathbf{A}) = 3$ (Eigenschaft (6)), (e) $\det(\mathbf{C}) = \det(\mathbf{A}) = 3$ (das fünffache der ersten Spalte von \mathbf{A} wurde zur zweiten Spalte addiert um \mathbf{C} zu erhalten, Eigenschaft (5)), (f) $\det(\mathbf{A}^{-1}) = \frac{1}{\det(\mathbf{A})} = \frac{1}{3}$ (Eigenschaft (9)), (g) $\det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) = \det(\mathbf{A}) \cdot \det(\mathbf{C}) = 3 \cdot 3 = 9$ (Eigenschaft (8)), (h) $\det(\mathbf{I}) = 1$ (Eigenschaft (3)).

51. (a) -864 , (b) -216 , (c) -216 , (d) $-1/216$, (e) 186624 , (f) 1 , (g) 1 , (h) $1/46656$.

52. (a) -1280 , (b) 25 , (c) -5 , (d) $-1/5$, (e) -170 , (f) 8 , (g) ja, (h) nein, (i) ja, (j) $\dim(\text{Im}) = 8$, $\dim(\text{Ker}) = 0$.

53. $|\mathbf{A}^t \cdot \mathbf{A}| = 0$, $|\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^t|$ hängt von \mathbf{A} ab.

54. (a) 9, (b) 9, (c) 40, (e) 40.

55. $\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \mathbf{A}^{*t}$.

(a) $\mathbf{A}^* = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{A}^{*t} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, |\mathbf{A}| = -3;$

(b) $\mathbf{A}^* = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}, \mathbf{A}^{*t} = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, |\mathbf{A}| = -9;$

(c) $\mathbf{A}^* = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \mathbf{A}^{*t} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, |\mathbf{A}| = 8;$

(d) $\mathbf{A}^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -6 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \mathbf{A}^{*t} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & -6 & 3 \end{pmatrix}, |\mathbf{A}| = 3;$

(e) $\mathbf{A}^{*t} = \begin{pmatrix} -20 & -12 & 8 \\ 20 & 4 & -16 \\ 5 & -5 & 0 \end{pmatrix}, |\mathbf{A}| = -40;$

(f) $\mathbf{A}^{*t} = \begin{pmatrix} 9 & 3 & -4 \\ -2 & -4 & 2 \\ -14 & -8 & 4 \end{pmatrix}, |\mathbf{A}| = -10.$

56. (a) $\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix};$ (b) $\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{x_1 y_2 - x_2 y_1} \begin{pmatrix} y_2 & -y_1 \\ -x_2 & x_1 \end{pmatrix};$

(c) $\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\alpha\beta^2 - \alpha^2\beta} \begin{pmatrix} \beta^2 & -\beta \\ -\alpha^2 & \alpha \end{pmatrix}.$

57. (a) $\mathbf{x} = (1, 0)^t;$ (b) $\mathbf{x} = (1/3, 5/9)^t;$ (c) $\mathbf{x} = (1, 1)^t;$ (d) $\mathbf{x} = (0, 2, -1)^t;$ (e) $\mathbf{x} = (1/2, 1/2, 1/8)^t;$
(f) $\mathbf{x} = (-3/10, 2/5, 9/5)^t.$

58. (a) $x = (d - 2b)/(ad - bc), y = (2a - c)/(ad - bc);$
(b) $x = (a\beta - b)/(\alpha(\beta - \alpha)), y = (b - a\alpha)/(\beta(\beta - \alpha)).$

59.

$$\begin{aligned} 0 &= \det(\dots, \mathbf{a}_i + \mathbf{a}_k, \dots, \mathbf{a}_i + \mathbf{a}_k, \dots) \\ &= \det(\dots, \mathbf{a}_i, \dots, \mathbf{a}_i, \dots) + \det(\dots, \mathbf{a}_i, \dots, \mathbf{a}_k, \dots) \\ &\quad + \det(\dots, \mathbf{a}_k, \dots, \mathbf{a}_i, \dots) + \det(\dots, \mathbf{a}_k, \dots, \mathbf{a}_k, \dots) \\ &= \det(\dots, \mathbf{a}_i, \dots, \mathbf{a}_k, \dots) + \det(\dots, \mathbf{a}_k, \dots, \mathbf{a}_i, \dots). \end{aligned}$$

Daraus folgt die Behauptung.

60.

$$\begin{aligned} \det(\dots, \mathbf{a}_i + \alpha \mathbf{a}_k, \dots, \mathbf{a}_k, \dots) \\ &= \det(\dots, \mathbf{a}_i, \dots, \mathbf{a}_k, \dots) + \alpha \det(\dots, \mathbf{a}_k, \dots, \mathbf{a}_k, \dots) \\ &= \det(\dots, \mathbf{a}_i, \dots, \mathbf{a}_k, \dots). \end{aligned}$$

61. $1 = \det(\mathbf{I}) = \det(\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}^{-1}) \cdot \det(\mathbf{A}).$ Daraus folgt die Behauptung.

62. (a) $\lambda_1 = 7, \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}; \lambda_2 = 2, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix};$ (b) $\lambda_1 = 14, \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}; \lambda_2 = 1, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix};$ (c) $\lambda_1 = -6, \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}; \lambda_2 = 4, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

63. (a) $\lambda_1 = 0, \mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \lambda_2 = 2, \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \lambda_3 = 2, \mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$

(b) $\lambda_1 = 1, \mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \lambda_2 = 2, \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}; \lambda_3 = 3, \mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

$$(c) \lambda_1 = 1, \mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}; \lambda_2 = 3, \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \lambda_3 = 3, \mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$(d) \lambda_1 = -3, \mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \lambda_2 = -5, \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \lambda_3 = -9, \mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$(e) \lambda_1 = 0, \mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}; \lambda_2 = 1, \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}; \lambda_3 = 4, \mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$(f) \lambda_1 = 0, \mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}; \lambda_2 = 27, \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}; \lambda_3 = -9, \mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$$64. (a) \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1, \mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. (b) \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1, \mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

65. 62a: positiv definit, 62c: indefinit, 63a: positiv semidefinit, 63d: negativ definit, 63f: indefinit, 64a: positiv definit.

Die anderen Matrizen sind nicht symmetrisch.

66. Für beliebige Vektoren $\mathbf{x} \neq 0$ gilt: $-\mathbf{x}^t \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{x}^t (-\mathbf{A}) \mathbf{x} > 0$, da $-\mathbf{A}$ positiv definit ist. Daher $\mathbf{x}^t \mathbf{A} \mathbf{x} < 0$.

67. \mathbf{A} ist negativ definit, wenn $(-\mathbf{A})$ positiv definit (Aufgabe 66).

Kriterium Eigenwerte: Alle Eigenwerte von $(-\mathbf{A})$ sind genau dann positiv, wenn alle Eigenwerte von \mathbf{A} negativ sind, da $(-\mathbf{A})\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \Leftrightarrow \mathbf{A}\mathbf{x} = (-\lambda)\mathbf{x}$.

Kriterium Hauptminoren: Die Hauptminoren von $(-\mathbf{A})$ erhält man aus den Hauptminoren H_k von \mathbf{A} multiplizieren mit $(-1)^k$ (durch Herausheben des Faktors (-1) aus jeder Spalte). Daher ist \mathbf{A} genau dann negativ definit, wenn all $(-1)^k H_k$ positiv sind.

$$68. q_{\mathbf{A}}(\mathbf{x}) = 3x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2^2 - x_3^2.$$

$$69. \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

70. Eigenraum zum Eigenwert $\lambda_1 = 0$: $\text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$; Eigenraum zum Eigenwert $\lambda_2 =$

$$\lambda_3 = 2: \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

71. Durch Ausrechnen und Vergleichen.

72. Durch Ausrechnen und Vergleichen.

73. (1) $|\mathbf{A}^t - \lambda \mathbf{I}| = |(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})^t| = |\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}| = 0$. (3) Sei \mathbf{x} ein Eigenvektor zum Eigenwert λ . Dann gilt: $\mathbf{A}^k \mathbf{x} = \mathbf{A}^{k-1} (\mathbf{A} \mathbf{x}) = \mathbf{A}^{k-1} (\lambda \mathbf{x}) = \dots = \lambda^k \mathbf{x}$, d.h., \mathbf{x} ein Eigenvektor zum Eigenwert λ^k . (4) Durch Umformen erhalten wir aus $\mathbf{A} \mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}$, $\mathbf{A}^{-1} \mathbf{x} = \lambda^{-1} \mathbf{x}$, d.h., \mathbf{x} ein Eigenvektor von \mathbf{A} zum Eigenwert $\frac{1}{\lambda}$.

74. 62a: $H_1 = 3, H_2 = 14$, positiv definit; 62c: $H_1 = -1, H_2 = -24$, indefinit; 63a: $H_1 = 1, H_2 = 0, H_3 = 0$, keine Aussage möglich; 63d: $H_1 = -3, H_2 = 15, H_3 = -135$, negativ definit; 63f: $H_1 = 11, H_2 = -27, H_3 = 0$, keine Aussage möglich; 64a: $H_1 = 1, H_2 = 1, H_3 = 1$, positiv definit. Die anderen Matrizen sind nicht symmetrisch.

75. 62a: $\tilde{H}_1 = 3, \tilde{H}_2 = 6, \tilde{H}_{1,2} = 14$, positiv definit. 62c: $\tilde{H}_1 = -1, \tilde{H}_2 = -1, \tilde{H}_{1,2} = -24$, indefinit. 63a: $\tilde{H}_1 = 1, \tilde{H}_2 = 1, \tilde{H}_3 = 2, \tilde{H}_{1,2} = 0, \tilde{H}_{1,3} = 2, \tilde{H}_{2,3} = 2, \tilde{H}_{1,2,3} = 0$, positiv semidefinit. 63d: $\tilde{H}_1 = -3, \tilde{H}_2 = -5, \tilde{H}_3 = -9, \tilde{H}_{1,2} = 15, \tilde{H}_{1,3} = 27, \tilde{H}_{2,3} = 45, \tilde{H}_{1,2,3} = -135$, negativ definit. 63f: $\tilde{H}_1 = 11, \tilde{H}_2 = -1, \tilde{H}_3 = 8, \tilde{H}_{1,2} = -27, \tilde{H}_{1,3} = -108, \tilde{H}_{2,3} = -108, \tilde{H}_{1,2,3} = 0$, indefinit.

76. Sei $\mathbf{A} = \mathbf{U}^t \cdot \mathbf{U}$. Da die \mathbf{u}_i^t die Zeilen von \mathbf{U}^t sind, gilt: $a_{ik} = \mathbf{u}_i^t \mathbf{u}_k$ und das ist 1 falls $i = k$ und 0 sonst, i.e., $\mathbf{A} = \mathbf{I}$.

77. (a) Wenn die Basis aus orthogonalen Eigenvektoren von \mathbf{A} besteht;

(b) $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\} = \left\{ \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right)^t, \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right)^t, (0, 0, 1)^t \right\}$;

(c) $\mathbf{U} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; (d) $\mathbf{c} = \mathbf{U}^{-1} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}$.

78. (a) $\lambda_1 = 7, \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\lambda_2 = 2, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. (b) Eigenraum; (c) $|\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}| = |\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{B}| = 7 \cdot 2 \cdot 5 = 70$.

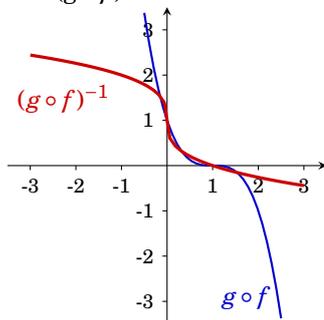
79. (a) 1, 2, 4, nicht definiert, 0, -2, $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$, nicht reell; (b) 2, 47712, 4, 7712.

80. (a) $3(x - \frac{9+\sqrt{57}}{6})(x - \frac{9-\sqrt{57}}{6})$, (b) $(x+1)(x+3)$.

81. —

82. (a) injektiv, nicht surjektiv, (b) injektiv, nicht surjektiv, (c) bijektiv, (d) nicht injektiv, nicht surjektiv, (e) nicht injektiv, surjektiv, (f) bijektiv. Beachten Sie, dass Definitionsmenge und Wertemenge Bestandteil der Funktion sind.

83. Für $(g \circ f)$:

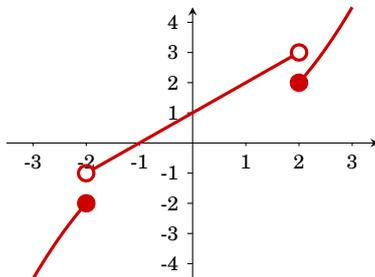


$$(g \circ f)(x) = (1-x)^3,$$

$$(g \circ f)^{-1}(x) = 1 - \sqrt[3]{x}$$

84. (a) 7, (b) $\frac{2}{7}$, (c) 0, (d) bestimmt divergent gegen $+\infty$, (e) unbestimmt divergent, (f) $\frac{29}{6}$.

85.



$$\lim_{x \uparrow -2} f(x) = -1, \quad \lim_{x \downarrow -2} f(x) = -2, \quad \lim_{x \rightarrow -2} f(x) \text{ existiert nicht.}$$

$$\lim_{x \uparrow 0} f(x) = \lim_{x \downarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1.$$

$$\lim_{x \uparrow 2} f(x) = 2, \quad \lim_{x \downarrow 2} f(x) = 3, \quad \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \text{ existiert nicht.}$$

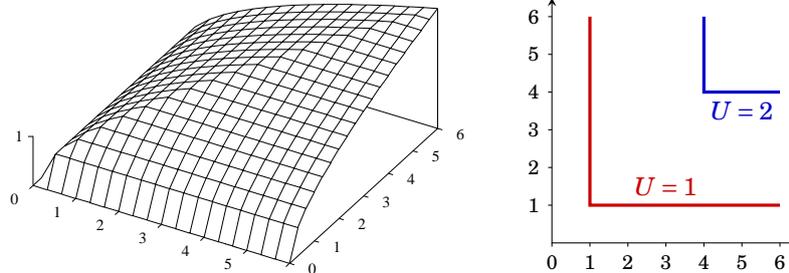
f ist stetig in 0 und nicht stetig in -2 und 2.

86. (a) 0, (b) 0, (c) ∞ , (d) $-\infty$, (e) 1.

87. Die Funktionen sind stetig in

(a) D , (b) D , (c) D , (d) D , (e) D , (f) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, (g) $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

88.



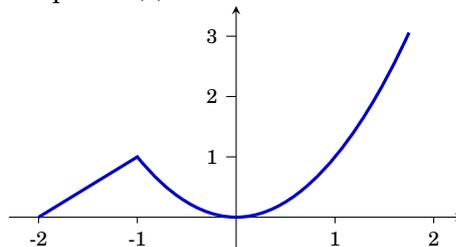
89. —

| Δx | 3 | 1 | -1 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{10}$ |
|-----------------------------|----------------|---|----|---------------|----------------|
| $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ | $\frac{63}{3}$ | 7 | 1 | 4,75 | 3,31 |

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+h)^3 - 1^3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1^3 + 3 \cdot 1^2 h + 3h^2 + h^3 - 1^3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 3 + 3h + h^2 = 3$$

91. differenzierbar in (a) \mathbb{R} , (b) \mathbb{R} , (c) $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, (d) $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, (e) $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, (f) $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Graph aus (e):



92. —

93. Mit Hilfe des Differentials: $f(3,1) - f(3) \approx -0,001096$, Exakter Wert: $f(3,1) - f(3) = -0,00124\dots$

94. Durchschnittliche Wachstumsrate = 0,25 (Differenzenquotient),
momentane Wachstumsrate 1958 = 0,26 (Differentialquotient für $x = 8$).

95. (a) $6x - 5 \sin(x)$, (b) $6x^2 + 2x$, (c) $1 + \ln(x)$, (d) $-2x^{-2} - 2x^{-3}$, (e) $\frac{3x^2 + 6x + 1}{(x+1)^2}$, (f) 1, (g) $18x - 6$,
(h) $6x \cos(3x^2)$, (i) $\ln(2) \cdot 2^x$, (j) $4x - 1$ (Kürzen!),
(k) $6e^{3x+1}(5x^2 + 1)^2 + 40e^{3x+1}(5x^2 + 1)x + \frac{3(x-1)(x+1)^2 - (x+1)^3}{(x-1)^2} - 2$.

| | $f'(x)$ | $f''(x)$ | $f'''(x)$ |
|-----|-------------------------|--------------------------------|---------------------------------|
| (a) | $-x e^{-\frac{x^2}{2}}$ | $(x^2 - 1) e^{-\frac{x^2}{2}}$ | $(3x - x^3) e^{-\frac{x^2}{2}}$ |
| (b) | $\frac{-2}{(x-1)^2}$ | $\frac{4}{(x-1)^3}$ | $\frac{-12}{(x-1)^4}$ |
| (c) | $3x^2 - 4x + 3$ | $6x - 4$ | 6 |

97. Durchschnittliche Kosten: $\frac{C(x)}{x}$,

Änderungsrate der marginalen Kosten ist die zweite Ableitung $C''(x)$.

(a) $C'(x) = 30 - 0,2x + 0,006x^2$, $C''(x) = -0,2 + 0,012x$,

$\left(\frac{C(x)}{x}\right)' = -\frac{500}{x^2} - 0,1 + 0,004x$;

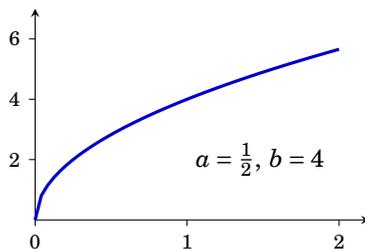
(b) $C'(x) = 18 + 0,02x - 2 \ln(x)$, $C''(x) = 0,02 - \frac{2}{x}$, $\left(\frac{C(x)}{x}\right)' = 0,01 - \frac{500}{x^2} - \frac{2}{x}$

98. Monoton fallend für in $(-\infty, -4] \cup [0, 3]$, monoton steigend für $[-4, 0] \cup [3, \infty)$. Konkav in $[(-2 - \sqrt{148})/6, (-2 + \sqrt{148})/6]$, konvex im sonstigen Definitionsbereich.

99. $(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y)^2 - (\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}xy + \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2 = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}xy - \frac{1}{4}y^2 = -(\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}xy + \frac{1}{4}y^2) = -(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y)^2 < 0.$

100. (a) konvex; (b) konkav; (c) konkav; (d) konvex falls $\alpha \geq 1$ und $\alpha \leq 0$, konkav falls $0 \leq \alpha \leq 1$.

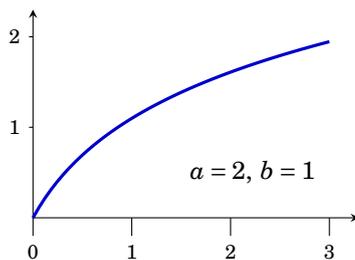
101.



Hinweis: Bilden Sie die erste und zweite Ableitung und überprüfen Sie, ob die angegebenen Eigenschaften von der Funktion auch tatsächlich erfüllt werden. Beachten Sie dabei, welche Einschränkungen a und b genügen. Z.B.:

$$f''(x) = \underbrace{b}_{>0} \underbrace{a}_{<0} \underbrace{(a-1)}_{>0} x^{-a-1} < 0.$$

102.



Hinweis: Bilden Sie die erste und zweite Ableitung und überprüfen Sie, ob die angegebenen Eigenschaften von der Funktion auch tatsächlich erfüllt werden. Beachten Sie dabei, welche Einschränkungen a und b genügen. Z.B.:

$$f''(x) = -a^2 b (ax + 1)^{-2} < 0, \text{ da } a, b, x > 0.$$

103. $h''(x) = \alpha f''(x) + \beta g''(x) \leq 0$, i.e., h ist konkav. Falls $\beta < 0$ dann ist $\beta g''(x)$ nicht mehr negativ und das Vorzeichen von $\alpha f''(x) + \beta g''(x)$ kann nicht mehr allgemein bestimmt werden.

104. Da f und g konkav sind, gilt fuer alle x, y und alle $t \in [0, 1]$: $(1-t)h(x) + th(y) = (1-t)(\alpha f(x) + \beta g(x)) + t(\alpha f(y) + \beta g(y)) = \alpha((1-t)f(x) + tf(y)) + \beta((1-t)g(x) + tg(y)) = \alpha f((1-t)x + ty) + \beta g((1-t)x + ty) = h((1-t)x + ty)$, i.e., h ist konkav.

105. Da f konkav ist, gilt fuer alle x, y und alle $t \in [0, 1]$: $(1-t)f(x) + tf(y) \leq f((1-t)x + ty)$. Daher ist $(1-t)g(x) + tg(y) = -[(1-t)f(x) + tf(y)] \geq -f((1-t)x + ty) = g((1-t)x + ty)$, i.e., g ist konvex.

106. (a) logkonkav, (b) nicht logkonkav, (c) nicht logkonkav, (d) logkonkav auf $(-1, 1)$.

107. (a) $\varepsilon_g(x) = \frac{3x^3 - 4x^2}{x^3 - 2x^2}$, 1-elastisch für $x = 1$ und $x = \frac{3}{2}$, elastisch für $x < 1$ und $x > \frac{3}{2}$, unelastisch für $1 < x < \frac{3}{2}$. (b) $\varepsilon_h(x) = \beta$, die Elastizität von $h(x)$ hängt nur vom Parameter β ab und ist im gesamten Definitionsbereich gleich groß.

Hinweis: Beachten Sie bitte bei der Berechnung den Absolutbetrag.

108. Analog zur Vorlesung.

109. richtig ist (c). Die Aussage (b) stimmt nur näherungsweise.

110. Ableitungen:

| | | | | | | |
|-------------------|---|-----|------|---------|---------------------------------------|--|
| | (a) | (b) | (c) | (d) | (e) | |
| f_x | 1 | y | $2x$ | $2xy^2$ | $\alpha x^{\alpha-1}y^\beta$ | |
| f_y | 1 | x | $2y$ | $2x^2y$ | $\beta x^\alpha y^{\beta-1}$ | |
| f_{xx} | 0 | 0 | 2 | $2y^2$ | $\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}y^\beta$ | |
| $f_{xy} = f_{yx}$ | 0 | 1 | 0 | $4xy$ | $\alpha\beta x^{\alpha-1}y^{\beta-1}$ | |
| f_{yy} | 0 | 0 | 2 | $2x^2$ | $\beta(\beta-1)x^\alpha y^{\beta-2}$ | |
| | (f) | | | | | |
| f_x | $x(x^2+y^2)^{-1/2}$ | | | | | |
| f_y | $y(x^2+y^2)^{-1/2}$ | | | | | |
| f_{xx} | $(x^2+y^2)^{-1/2} - x^2(x^2+y^2)^{-3/2}$ | | | | | |
| $f_{xy} = f_{yx}$ | $-xy(x^2+y^2)^{-3/2}$ | | | | | |
| f_{yy} | $(x^2+y^2)^{-1/2} - y^2(x^2+y^2)^{-3/2}$ | | | | | |
| | (g) | | | | | |
| f_x | $x^2(x^3+y^3)^{-2/3}$ | | | | | |
| f_y | $y^2(x^3+y^3)^{-2/3}$ | | | | | |
| f_{xx} | $2x(x^3+y^3)^{-2/3} - 2x^4(x^3+y^3)^{-5/3}$ | | | | | |
| $f_{xy} = f_{yx}$ | $-2x^2y^2(x^3+y^3)^{-5/3}$ | | | | | |
| f_{yy} | $2y(x^3+y^3)^{-2/3} - 2y^4(x^3+y^3)^{-5/3}$ | | | | | |
| | (h) | | | | | |
| f_x | $x^{p-1}(x^p+y^p)^{(1-p)/p}$ | | | | | |
| f_y | $y^{p-1}(x^p+y^p)^{(1-p)/p}$ | | | | | |
| f_{xx} | $(p-1)x^{p-2}(x^p+y^p)^{(1-p)/p} - (p-1)x^{2(p-1)}(x^p+y^p)^{(1-2p)/p}$ | | | | | |
| $f_{xy} = f_{yx}$ | $-(p-1)x^{p-1}y^{p-1}(x^p+y^p)^{(1-2p)/p}$ | | | | | |
| f_{yy} | $(p-1)y^{p-2}(x^p+y^p)^{(1-p)/p} - (p-1)y^{2(p-1)}(x^p+y^p)^{(1-2p)/p}$ | | | | | |

Ableitungen an der Stelle (1,1):

| | | | | | | | | |
|-------------------|-----|-----|-----|-----|--------------------|-----------------------|--------------------------|----------------------|
| | (a) | (b) | (c) | (d) | (e) | (f) | (g) | (h) |
| f_x | 1 | 1 | 2 | 2 | α | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$ | $2^{(1-p)/p}$ |
| f_y | 1 | 1 | 2 | 2 | β | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$ | $2^{(1-p)/p}$ |
| f_{xx} | 0 | 0 | 2 | 2 | $\alpha(\alpha-1)$ | $\frac{1}{\sqrt{8}}$ | $\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$ | $(p-1)2^{(1-2p)/p}$ |
| $f_{xy} = f_{yx}$ | 0 | 1 | 0 | 4 | $\alpha\beta$ | $-\frac{1}{\sqrt{8}}$ | $-\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$ | $-(p-1)2^{(1-2p)/p}$ |
| f_{yy} | 0 | 0 | 2 | 2 | $\beta(\beta-1)$ | $\frac{1}{\sqrt{8}}$ | $\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$ | $(p-1)2^{(1-2p)/p}$ |

111. Wir nehmen an, dass $\|\mathbf{a}\| = 1$ ist. (a) $g(t) = f(\mathbf{x} + t\mathbf{a}) = \sum_{i=1}^n (x_i + ta_i)^2$, $g'(t) = \sum_{i=1}^n 2(x_i + ta_i) \cdot a_i$, $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{a}} = g'(0) = \sum_{i=1}^n 2x_i a_i$; (b) $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{a}} = \nabla f(\mathbf{x}) \mathbf{a} = 2\mathbf{x}^t \mathbf{a} = \sum_{i=1}^n 2x_i a_i$.

112. Der Richtungsvektor muss normiert sein, $\mathbf{a} = (1, 3)^t / \|(1, 3)^t\| = (1/\sqrt{10}, 3/\sqrt{10})^t$. $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{a}} = \nabla f(0)\mathbf{a} \leq 4$, wobei Gleichheit gilt, wenn $\nabla f(0)$ und \mathbf{a} parallel sind. Daher ist $\nabla f(0) = 4\mathbf{a} = (4/\sqrt{10}, 12/\sqrt{10})^t$.

113. Die partiellen Ableitungen sind $f_x = -400x(y-x^2) + 2(1-x)(-1)$ und $f_y = 200(y-x^2)$. (a) $(-4, 0)^t$, (b) $-\frac{4}{\sqrt{5}}$, (c) $df = -4dx$, (d) 0, (e) $\epsilon_{f,1} = 1$, $\epsilon_{f,2} = 0$.

114. f und \mathbf{g} sind \mathcal{C}^1 Funktionen, da alle partiellen Ableitungen existieren und stetig sind. Daher sind f und \mathbf{g} und somit auch $h = f \circ \mathbf{g}$ differenzierbar. $Dh(t) = Df(\mathbf{g}(t)) \cdot D\mathbf{g}(t) = (2g_1(t), 2g_2(t)) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix} = (2t, 2t^2) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix} = 2t + 4t^3$. (Die zusammengesetzte Funktion lautet $h(t) = f(\mathbf{g}(t)) = t^2 + t^4$.)

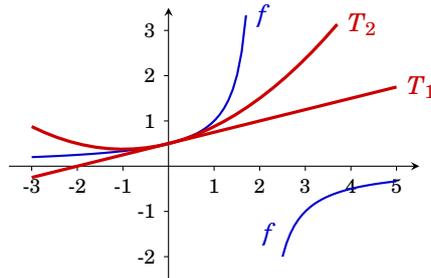
115. $D\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 3x_1^2 & -1 \\ 1 & -3x_2^2 \end{pmatrix}$, $D\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 & 2x_2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$,
 $D(\mathbf{g} \circ \mathbf{f})(\mathbf{x}) = D\mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{x}))D\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 & 2(x_1 - x_2^3) \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3x_1^2 & -1 \\ 1 & -3x_2^2 \end{pmatrix}$
 $= \begin{pmatrix} 2(x_1 - x_2^3) & 6(-x_1x_2^2 + x_2^5) \\ 3x_1^2 & -1 \end{pmatrix}$
 $D(\mathbf{f} \circ \mathbf{g})(\mathbf{x}) = D\mathbf{f}(\mathbf{g}(\mathbf{x}))D\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 3x_2^4 & -1 \\ 1 & -3x_1^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2x_2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
 $= \begin{pmatrix} -1 & 6x_2^5 \\ -3x_1^2 & 2x_2 \end{pmatrix}$.
116. Sei $\mathbf{s}(t) = \begin{pmatrix} K(t) \\ L(t) \\ t \end{pmatrix}$. Dann ist
 $\frac{dQ}{dt} = DQ(\mathbf{s}(t)) \cdot D\mathbf{s}(t) = (Q_K(\mathbf{s}(t)), Q_L(\mathbf{s}(t)), Q_t(\mathbf{s}(t))) \cdot \begin{pmatrix} K'(t) \\ L'(t) \\ 1 \end{pmatrix} = Q_K K'(t) + Q_L L'(t) + Q_t$.
117. $D\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}$.
118. $D\mathbf{f}(\mathbf{x}) = 2(\mathbf{A}\mathbf{x})^t = 2\mathbf{x}^t \mathbf{A}$.
119. $\frac{\partial x_i}{\partial b_j} = \frac{(-1)^{i+j} A_{ji}}{|\mathbf{A}|}$, wobei A_{ij} der Minor ist, wenn die i -te Zeile und j -te Spalte gestrichen wird.
120. (a) $D\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 1-x_2 & -x_1 \\ x_2 & x_1 \end{pmatrix}$, $\frac{\partial(y_1, y_2)}{\partial(x_1, x_2)} = x_1$; (b) $x_1 \neq 0$;
(c) $D(\mathbf{f}^{-1})(\mathbf{y}) = (D\mathbf{f}(\mathbf{x}))^{-1} = \begin{pmatrix} 1-x_2 & -x_1 \\ x_2 & x_1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{x_1} \begin{pmatrix} x_1 & x_1 \\ -x_2 & 1-x_2 \end{pmatrix}$;
(d) die inverse Transformation erhält man durch Auflösen nach x_1 und x_2 : $x_1 = y_1 + y_2$ und $x_2 = y_2/(y_1 + y_2)$ (falls $y_1 + y_2 \neq 0$).
121. T ist eine lineare Abbildung, die durch die Matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ beschrieben wird. Die Funktionaldeterminante ist in diesem Fall die Determinante dieser Matrix. Diese Matrix hat daher nur Rang 1, der Bildraum ist somit eindimensional.
122. Sei $J = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{vmatrix}$ die Jacobische Determinante dieser Funktion. Die Gleichung ist lokal lösbar, wenn $J \neq 0$. Es gilt dann $\frac{\partial F}{\partial u} = \frac{1}{J} \frac{\partial g}{\partial y}$ und $\frac{\partial G}{\partial u} = -\frac{1}{J} \frac{\partial g}{\partial x}$.
123. (a) $F_y = 3y^2 + 1 \neq 0$, $y' = -F_x/F_y = 3x^2/(3y^2 + 1) = 0$ für $x = 0$; (b) $F_y = 1 + x \cos(xy) = 1 \neq 0$ für $x = 0$, $y'(0) = 0$.
124. $\frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{3y^2}$, $y = f(x)$ existiert lokal in einem Intervall um $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$, falls $y_0 \neq 0$, $x = g(y)$ existiert, falls $x_0 \neq 0$.
125. (a) $z = g(x, y)$ lokal darstellbar, da $F_z = 3z^2 - xy$, $F_z(0, 0, 1) = 3 \neq 0$; $\frac{\partial g}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{3x^2 - yz}{3z^2 - xy} = -\frac{0}{3} = 0$ für $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 1)$; $\frac{\partial g}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{3y^2 - xz}{3z^2 - xy} = -\frac{0}{3} = 0$.
(b) $z = g(x, y)$ lokal darstellbar, da $F_z = \exp(z) - 2z$, $F_z(1, 0, 0) = 1 \neq 0$; $\frac{\partial g}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{-2x}{\exp(z) - 2z} = 2$ für $(x_0, y_0, z_0) = (1, 0, 0)$; $\frac{\partial g}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{-2y}{\exp(z) - 2z} = 0$ für $(x_0, y_0, z_0) = (1, 0, 0)$.
126. $\frac{dy}{dx} = -\frac{u_x}{u_y} = -\frac{\alpha c x^{\alpha-1} y^\beta}{\beta c x^\alpha y^{\beta-1}} = -\frac{\alpha y}{\beta x}$, $\frac{dx}{dy} = -\frac{\beta x}{\alpha y}$.

127. (a) $\frac{dx_i}{dx_j} = -\frac{u_{x_j}}{u_{x_i}} = -\frac{\left(x_1^{\frac{1}{2}} + x_2^{\frac{1}{2}}\right) x_j^{-\frac{1}{2}}}{\left(x_1^{\frac{1}{2}} + x_2^{\frac{1}{2}}\right) x_i^{-\frac{1}{2}}} = -\frac{x_j^{\frac{1}{2}}}{x_i^{\frac{1}{2}}};$

(b) $\frac{dx_i}{dx_j} = -\frac{u_{x_j}}{u_{x_i}} = -\frac{\frac{\theta}{\theta-1} \left(\sum_{i=1}^n x_i^{\frac{\theta-1}{\theta}}\right)^{\frac{1}{\theta-1}} \frac{\theta-1}{\theta} x_j^{-\frac{1}{\theta}}}{\frac{\theta}{\theta-1} \left(\sum_{i=1}^n x_i^{\frac{\theta-1}{\theta}}\right)^{\frac{1}{\theta-1}} \frac{\theta-1}{\theta} x_i^{-\frac{1}{\theta}}} = -\frac{x_j^{\frac{1}{\theta}}}{x_i^{\frac{1}{\theta}}}.$

128. $I = Did(\mathbf{x}) = D(\mathbf{f}^{-1} \circ \mathbf{f})(\mathbf{x}) = D\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{f}(\mathbf{x})) \cdot D\mathbf{f}(\mathbf{x})$. Daraus folgt die Behauptung.

129.



(a) $f(x) \approx T_1(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x,$

(b) $f(x) \approx T_2(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}x^2.$

Konvergenzradius $\rho = 2$.

130. $f(x) \approx 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3$. Konvergenzradius $\rho = 1$.

131. Substituieren Sie in der MacLaurin-Reihe für die Sinusfunktion:

$f(x) = \sin(x^{10}) \approx (x^{10}) - \frac{1}{6}(x^{10})^3 = x^{10} - \frac{1}{6}x^{30}.$

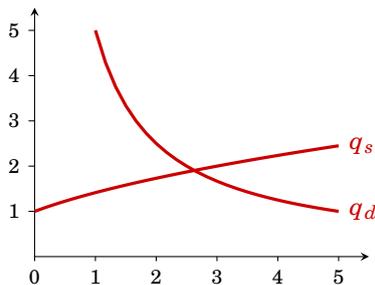
132. $f(x) \approx 0,959 + 0,284x^2 - 0,479x^4$. Taschenrechner auf Bogenmaß umschalten.

133. Durch Substitution: $f(x) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 + O(x^9)$. Konvergenzradius $\rho = 1$.

134. Die Verteilungsfunktion $\Phi(x)$ der Standardnormalverteilung ist gegeben durch das Integral ihrer Dichte $\phi(x) = 1/\sqrt{2\pi} \exp(-x^2/2)$, i.e., $\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \phi(x) dx$. Durch Substitution erhalten wir die MacLaurinreihe $\phi(x) = 1/\sqrt{2\pi} (1 + x^2/2 + x^4/8 + O(x^6))$. Durch Integrieren und durch Einsetzen von $\Phi(0) = 1/2$ erhalten wir $\Phi(x) = 1/2 + 1/\sqrt{2\pi} (x + x^3/6 + x^5/40 + O(x^7))$.

135. Die Ableitung der MacLaurinreihe für $\sin(x)$ ergibt die MacLaurinreihe für $\cos(x)$.

136.



Gleichgewichtspreis laut Zeichung $\approx 2,6$.

Taylorreihen erster Ordnung an der Stelle $p_0 = 3$:

$q_s(p) \approx 2 + \frac{1}{4}(p-3), q_d(p) \approx \frac{5}{3} - \frac{5}{9}(p-3).$

Gleichgewichtspreis laut Taylorapproximation: $\bar{p} = \frac{75}{29} \approx 2,586$

137. $q_s(p) \approx 2 + \frac{1}{4}(p-3) - \frac{1}{64}(p-3)^2, q_d(p) \approx \frac{5}{3} - \frac{5}{9}(p-3) + \frac{5}{27}(p-3)^2$. Gleichgewichtspreis laut Taylorapproximation: $\bar{p} \approx 2,62$ (die zweite Lösung 7,39 ist zu weit von $p_0 = 3$ entfernt).

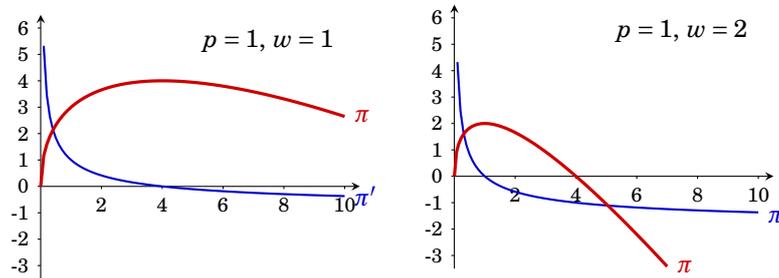
138. $f(0,0) = 1, \nabla f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{H}_f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$

$f(x,y) \approx f(0,0) + (0,0) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(x,y) \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1 + x^2 + y^2.$

139. (a) $\frac{1}{4}x^4 + c$; (b) $-\frac{3}{x} + c$; (c) $\frac{2}{5}\sqrt{x^5} + c$; (d) $2\sqrt{x} + c$; (e) $\frac{1}{2}e^{2x} + c$; (f) $\frac{1}{3\ln(2)}2^{3x} + c$; (g) $\frac{1}{2}\ln|x| + c$;
 (h) $5x + c$; (i) $-\frac{1}{\pi}\cos(\pi x) + c$; (j) $\frac{1}{2\pi}\sin(2\pi x) + c$.
140. (a) $\frac{1}{5}x^5 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 3x + c$; (b) $\frac{7}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4 + 6\ln|x+1| + c$; (c) $e^x + \frac{1}{e+1}x^{e+1} + ex + \frac{1}{2}x^2 + c$;
 (d) $\frac{2}{3}x^{3/2} + 2\sqrt{x} + c$; (e) $x^4 + x^3 + x^2 + x + \ln|x| - \frac{1}{2x^2} + c$.
141. (a) $\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + c$; (b) $\frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5} + c$; (c) $2\ln|x| + c$; (d) $-\cos(x) - 3\sin(x) + c$.
142. (a) $2(x-1)e^x + c$; (b) $-(x^2+2x+2)e^{-x} + c$; (c) $\frac{1}{2}x^2\ln(x) - \frac{1}{4}x^2 + c$; (d) $\frac{1}{4}x^4\ln(x) - \frac{1}{16}x^4 + c$;
 (e) $\frac{1}{2}x^2(\ln(x))^2 - \frac{1}{2}x^2\ln(x) + \frac{1}{4}x^2 + c$; (g) $2x\sin(x) + (2-x^2)\cos(x)$.
143. (a) $z = x^2: \frac{1}{2}e^{x^2} + c$; (b) $z = x^2 + 6: \frac{2}{3}(x^2+6)^{3/2} + c$; (c) $z = 3x^2 + 4: \frac{1}{6}\ln|3x^2+4| + c$;
 (d) $z = x+1: \frac{2}{5}(x+1)^{5/2} - \frac{2}{3}(x+1)^{3/2} + c$; (e) $z = \ln(x): \frac{1}{2}(\ln(x))^2 + c$ (f) $z = \ln(x): \ln|\ln(x)| + c$;
 (g) $z = x^3 + 1: \frac{2}{9}(x^3+1)^{3/2} + c$; (h) $z = 5-x^2: -\sqrt{5-x^2} + c$;
 (i) $z = x-3: 7\ln|x-3| + \frac{1}{2}x^2 + 2x + c$; (j) $z = x-8: \frac{2}{5}(x-8)^{5/2} + \frac{16}{3}(x-8)^{3/2} + c$.
144. (a) $\frac{3}{2}x^2 + 4\ln|x| + c$; (b) $e^{2x}(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}) + c$; (c) $\frac{1}{9}(6x+1)e^{3x}$; (d) $-(x^2+2)e^{-\frac{x^2}{2}} + c$; (e) $\frac{1}{3}e^{3x+2} + c$;
 (f) $-\frac{1}{2}\ln|3-2x| + c$; (g) $\frac{1}{3}e^{3x-5} + c$; (h) $\frac{1}{2}e^{t^2} + c$; (i) $\frac{1}{4}(\ln(x))^4 + c$; (j) $\sqrt{1+y^2} + c$.
145. (a) $4\sqrt{x} + 2x^{3/2} + \frac{2}{5}x^{5/2} + c$; (b) $x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + c$; (c) $2\sqrt{x} + \frac{2}{3}x^{3/2} + c$;
 (d) $-\frac{2}{3}x^{-3/2} - \frac{1}{x} + 4\sqrt{x} + 2x + c$; (e) $\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{7}x^7 + c$; (f) $-\frac{2}{\sqrt{x}} + c$.
146. $-\ln|\cos(x)| + c$.
147. $C(x) = 2000 + 30x - 0,025x^2$.
148. Kostenfunktion: $C(x) = 2500 + 24x - 0,015x^2 + 0,002x^3$;
 Fixkosten: $C(0) = 2500$; Gesamtkosten von 500 Stück: $C(500) = 260750$.
149. $R(x) = 4x - 0,005x^2$.
150. $C(x) = 1000 + 10x - 0,05x^2 + 0,001x^3$; Fixkosten: $C(0) = 1000$.
151. (a) $\int_0^1 f(x)dx = 1 \cdot (0,2-0) + 0,5 \cdot (0,5-0,2) + 2,5 \cdot (0,6-0,5) + 3,5 \cdot (0,7-0,6) + (-3,5) \cdot (1-0,7) = -0,1$;
 (b) $\int_0^1 f(x)dx = \dots = -0,55$.
152. $\int_0^{10} f(x)dx = \frac{1}{2}(5+0) \cdot (2-0) + \frac{1}{2}(2+5) \cdot (6-2) + \frac{1}{2}(-5+2) \cdot (10-6) = 13$.
153. (a) 39; (b) $3e^2 - 3 = 19,17$; (c) 93; (d) $-\frac{1}{6}$ (Taschenrechner auf Bogenmaß umschalten!);
 (e) $\frac{1}{2}\ln(8) \approx 1,0397$.
154. (a) $\frac{1}{2}$; (b) $\frac{781}{10}$; (c) $\frac{8}{3}$; (d) $\frac{1}{2}\ln(5) - \frac{1}{2}\ln(2) \approx 0,4581$; (e) $1 - e^{-2} \approx 0,8647$; (f) $\frac{27}{4}$; (g) 1;
 (h) $2e^2 - 2 \approx 12,778$; (i) $\frac{8}{3}\ln(2) - \frac{7}{9} \approx 1,07061$.
155. (a) $\int_0^\infty -e^{-3x} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t -e^{-3x} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{3}e^{-3t} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}$;
 (b) $\int_0^1 \frac{2}{\sqrt{x^3}} dx = \lim_{t \rightarrow 0} \int_t^1 \frac{2}{\sqrt{x^3}} dx = \lim_{t \rightarrow 0} 8 - 8t^{1/4} = 8$;
 (c) $= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \frac{x}{x^2+1} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \int_1^{t^2+1} \frac{1}{z} dz = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2}(\ln(t^2+1) - \ln(1)) = \infty$,
 das uneigentliche Integral existiert nicht.
156. (a) $\lim_{t \rightarrow \infty} -\frac{1}{1+t} + 1 = 1$; (b) $\lim_{t \rightarrow \infty} -(2+2t+t^2)e^{-t} + 2 = 2$;
 (c) $\lim_{t \rightarrow \infty} -e^{-t^2/2} + 1 = 1$;
 (d) $\lim_{t \rightarrow \infty} \ln(t) - \ln(1+t) - \frac{\ln(t)}{1+t} + \ln(2) = \lim_{t \rightarrow \infty} \ln\left(\frac{t}{1+t}\right) - \frac{\ln(t)}{1+t} + \ln(2) = \ln(2)$.
157. (a) $\lim_{t \rightarrow \infty} \ln(\ln(t)) - \ln(\ln(2)) = \infty$, das uneigentliche Integral existiert nicht;
 (b) $\lim_{t \rightarrow -1} \ln(\ln(2)) - \ln(\ln(t)) = -\infty$, das uneigentliche Integral existiert nicht;
 (c) $\lim_{t \rightarrow 0} -1 + \frac{1}{t} = \infty$, das uneigentliche Integral existiert nicht;
 (d) $\lim_{t \rightarrow \infty} -\frac{1}{t} + 1 = 1$; (e) $\lim_{t \rightarrow 0} 2 - 2\sqrt{t} = 2$;
 (f) $\lim_{t \rightarrow \infty} 2\sqrt{t} - 2 = \infty$, das uneigentliche Integral existiert nicht.

- 158.** (a) Es müssen drei Fälle unterschieden werden:
 $\alpha < -1$: $\int_0^1 x^\alpha dx = \lim_{t \rightarrow 0} \int_t^1 x^\alpha dx = \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\alpha+1} - \frac{1}{\alpha+1} t^{\alpha+1} \right) = \infty$, da $\alpha+1 < 0$ ist;
 $\alpha = -1$: $\int_0^1 x^{-1} dx = \lim_{t \rightarrow 0} (\ln(1) - \ln(t)) = \infty$;
 $\alpha > -1$: $\int_0^1 x^\alpha dx = \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\alpha+1} - \frac{1}{\alpha+1} t^{\alpha+1} \right) = \frac{1}{\alpha+1}$;
Das uneigentliche Integral existiert genau dann, wenn $\alpha > -1$;
(b) analog: $\int_1^\infty x^\alpha dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^t x^\alpha dx = \frac{1}{1+\alpha}$ falls $\alpha < -1$ und ∞ sonst;
(c) $\int_0^\infty x^\alpha dx = \lim_{t \rightarrow 0} \int_t^1 x^\alpha dx + \lim_{s \rightarrow \infty} \int_1^s x^\alpha dx = \infty$ für alle α .
- 159.** $E(x) = \int_0^\infty x f(x) dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) x dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$. (Integral mittels Substitutionsregel)
- 160.** $E(X) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} + \sqrt{\frac{2}{\pi}} = 0$.
- 161.** Wie Aufgabe 155(c); die beiden Intervalle $(-\infty, 0)$ und $(0, \infty)$ werden getrennt betrachtet. Der angegebene Ansatz ist falsch, da beiden Limiten (obere und untere Grenze) unabhängig voneinander berechnet werden müssen.
- 162.** Leibniz-Formel:
 $\frac{d}{dx} \int_0^{g(x)} U(x) e^{-(t-T)} dt = U(x) e^{-(g(x)-T)} g'(x) + \int_0^{g(x)} U'(x) e^{-(t-T)} dt$.
- 163.** Leibniz-Formel: $M'(t) = \int_{-\infty}^\infty x e^{tx} f(x) dx$.
Daher: $M'(0) = \int_{-\infty}^\infty x f(x) dx = E(X)$.
- 164.** (a) $z \Gamma(z) = z \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt = \int_0^\infty z t^{z-1} e^{-t} dt = t^z e^{-t} \Big|_{t=0}^\infty - \int_0^\infty t^z (-e^{-t}) dt = 0 + \Gamma(z+1) = \Gamma(z+1)$;
(b) $\Gamma'(z) = \int_0^\infty t^{z-1} \ln(t) e^{-t} dt$.
- 165.** (a) 16; (b) $\frac{a^2 b^2}{4}$; (c) $\frac{\pi-2}{8\pi}$.
- 166.** (a) $\mathbf{H}_f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$, $H_1 = 2 > 0$, $H_2 = 4 > 0$, f ist streng konvex;
(b) $\mathbf{H}_g(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$, $H_1 = 4 > 0$, $H_2 = -1 < 0$, f ist weder konvex noch konkav;
(c) $\mathbf{H}_h(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 4 & -8 \end{pmatrix}$, $\tilde{H}_1 = -2 < 0$, $\tilde{H}_2 = -8 < 0$, $\tilde{H}_{12} = 0 \geq 0$, f ist konkav aber nicht streng konkav.
- 167.** $\mathbf{H}_f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 2a & 2b \\ 2b & 2c \end{pmatrix}$, $H_1 = 2a$, $H_2 = 4(ac - b^2)$. f ist streng konkav falls $H_1 < 0$ und $H_2 > 0$ und streng konvex falls $H_1 > 0$ und $H_2 > 0$. Daraus folgt die Behauptung.
Analog: f ist konkav genau dann, wenn $a \leq 0$, $c \leq 0$ und $ac - b^2 \geq 0$. f ist konvex genau, dann wenn $a \geq 0$, $c \geq 0$ und $ac - b^2 \geq 0$.
- 168.** (a) lokales Minimum in $x = 3$ ($f''(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$). (b) lokales Minimum in $x = 1$, lokales Maximum in $x = -1$.
- 169.** (a) globales Minimum in $x = 1$, kein globales Maximum; (b) globales Maximum in $x = \frac{1}{4}$, kein globales Minimum; (c) globales Minimum in $x = 0$, kein globales Maximum
- 170.** globales Maximum bei 20 Einheiten.

171.



(c) $\pi(x) = 4p\sqrt{x} - wx$. kritische Punkte: $x_0 = 4\frac{p^2}{w^2}$, $\pi''(x) < 0$, $\Rightarrow x_0$ ist Maximum, für $p = 1$ und $w = 1$: $x_0 = 4$. (d) analog, das Maximum ist bei $x = 1$.

172. —

173. (a) kritischer Punkt: $\mathbf{p}_0 = (0, 0)$, $\mathbf{H}_f = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$,

$H_2 = -5 < 0$, $\Rightarrow \mathbf{p}_0$ ist Sattelpunkt.

(b) kritischer Punkt: $\mathbf{p}_0 = (e, 0)$, $\mathbf{H}_f(\mathbf{p}_0) = \begin{pmatrix} -e^{-3} & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$,

$H_1 = -e^{-3} < 0$, $H_2 = 2e^{-3} > 0$, $\Rightarrow \mathbf{p}_0$ ist lokales Maximum.

(c) kritischer Punkt: $\mathbf{p}_0 = (1, 1)$, $\mathbf{H}_f(\mathbf{p}_0) = \begin{pmatrix} 802 & -400 \\ -400 & 200 \end{pmatrix}$,

$H_1 = 802 > 0$, $H_2 = 400 > 0$, $\Rightarrow \mathbf{p}_0$ ist lokales Minimum.

174. kritischer Punkt: $\mathbf{p}_0 = (\ln(3), \ln(4))$, $\mathbf{H}_f = \begin{pmatrix} -e^{x_1} & 0 \\ 0 & -e^{x_2} \end{pmatrix}$, Hauptminoren: $H_1 = -e^{x_1} <$

0 , $H_2 = e^{x_1} \cdot e^{x_2} > 0$,

\Rightarrow (a) lokales Maximum in $\mathbf{p}_0 = (\ln(3), \ln(4))$, (b) f ist streng konkav, (c) \mathbf{p}_0 ist globales Maximum, kein globales Minimum.

175. kritische Punkte: $\mathbf{p}_1 = (0, 0, 0)$, $\mathbf{p}_2 = (1, 0, 0)$, $\mathbf{p}_3 = (-1, 0, 0)$,

$$\mathbf{H}_f = \begin{pmatrix} 6x_1x_2 & 3x_1^2 - 1 & 0 \\ 3x_1^2 - 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

Hauptminoren für kritische Punkte: $H_1 = 6x_1x_2 = 0$, $H_2 = -(3x_1^2 - 1)^2 < 0$ (da $x_1 \in \{0, -1, 1\}$), $H_3 = -2(3x_1^2 - 1)^2 < 0$,

\Rightarrow alle drei kritischen Punkte sind Sattelpunkte. Die Funktion ist im Definitionsbereich \mathbb{R}^2 weder konvex noch konkav.

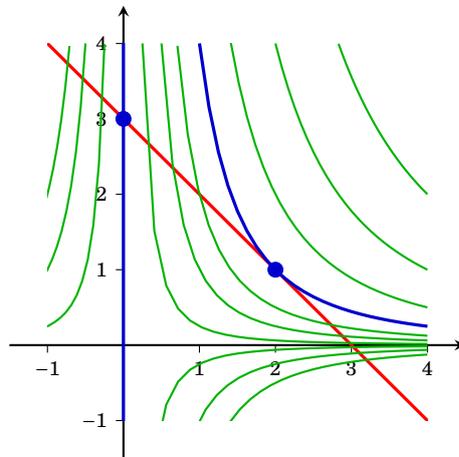
176. Die zu optimierende Gewinnfunktion lautet:

$$G(q_1, q_2, q_3) = R - C = q_1(63 - 4q_1) + q_2(105 - 5q_2) + q_3(75 - 6q_3) - (20 + 15(q_1 + q_2 + q_3)) = 48q_1 - 4q_1^2 + 90q_2 - 5q_2^2 + 60q_3 - 6q_3^2 - 20, \text{ kritischer Punkt: } \mathbf{q}^* = (q_1^*, q_2^*, q_3^*) =$$

$$(6, 9, 5), \mathbf{H}_G = \begin{pmatrix} -8 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & -12 \end{pmatrix}, H_1 = -8 < 0, H_2 = 80 > 0, H_3 = -960 < 0, \Rightarrow G \text{ ist}$$

konkav, $\Rightarrow \mathbf{q}^*$ ist globales Maximum. optimale Gesamtproduktion $q_{opt} = q_1^* + q_2^* + q_3^* = 6 + 9 + 5 = 20$, Umsätze: $R_1 = p_1^* q_1^* = (63 - 4q_1^*) q_1^* = 36 \cdot 6 = 234$, $R_2 = 540$, $R_3 = 225$.

177.



lokales Minimum in (0,3)

lokales Maximum in (2,1)

(b) Lagrangefunktion: $L(x, y; \lambda) = x^2 y + \lambda(3 - x - y)$,
stationäre Punkte $\mathbf{x}_1 = (2, 1; 4)$ und $\mathbf{x}_2 = (0, 3; 0)$,

(c) geränderte Hesse-Matrix: $\bar{\mathbf{H}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2y & 2x \\ 1 & 2x & 0 \end{pmatrix}$,

$\bar{\mathbf{H}}(\mathbf{x}_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$, $\det(\bar{\mathbf{H}}(\mathbf{x}_1)) = 6 > 0$, $\Rightarrow \mathbf{x}_1$ ist ein lokales Maximum, $\bar{\mathbf{H}}(\mathbf{x}_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

$\det(\bar{\mathbf{H}}(\mathbf{x}_2)) = -6 \Rightarrow \mathbf{x}_2$ ist ein lokales Minimum.

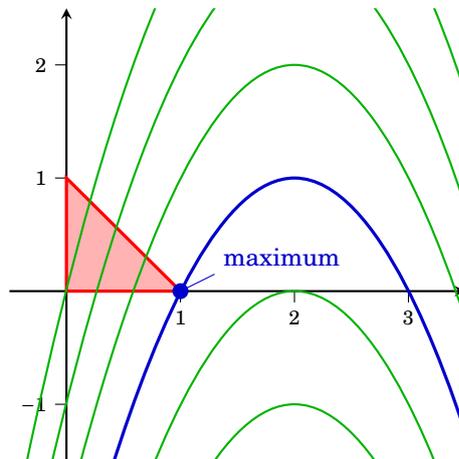
178. Lagrangefunktion: $L(x_1, x_2, x_3; \lambda_1, \lambda_2) = f(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{3}(x_1 - 3)^3 + x_2 x_3 + \lambda_1(4 - x_1 - x_2) + \lambda_2(5 - x_1 - x_3)$,
zwei stationäre Punkte: $\mathbf{x}_1 = (0, 4, 5; 5, 4)$ und $\mathbf{x}_2 = (4, 0, 1; 1, 0)$.

179. $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = 2$; $\lambda = 4$

180. (a) $x_1 = \alpha \frac{m}{p_1}$, $x_2 = (1 - \alpha) \frac{m}{p_2}$ und $\lambda = \frac{1}{m}$, (c) Änderungsrate für Optimum: $\frac{1}{m}$.

181. (a) ja, (b) nein, (c) nein.

182.



183. Lösung mittels Satz von Kuhn-Tucker: $L(x, y; \lambda) = -(x - 2)^2 - y + \lambda(1 - x - y)$, $x = 1$, $y = 0$, $\lambda = 2$.

184. (a) $y = C t^k$, (b) $y = C t - 1$, (c) $y = C e^{\frac{1}{2} t^2}$, (d) $y = -\ln(t + c)$, (e) $y = -\frac{1}{t + c}$, (f) $y = (\frac{1}{5} t^{\frac{5}{2}} + c)^2$

- 185.** (a) $y = t^k$, (b) $y = 2t - 1$, (c) $y = \frac{1}{\sqrt{e}} e^{\frac{t^2}{2}}$, (d) $y = -\ln(t - 1 + \frac{1}{e})$, (e) $y = -\frac{1}{t-2}$, (f) $y = (\frac{1}{5} t^{\frac{5}{2}} + \frac{4}{5})^2$.
- 186.** (a) $U' = \frac{\alpha}{U}$, für ein $\alpha > 0$; (b) $U(x) = \sqrt{2\alpha x + c}$; (c) $U(0) = 0$, $U(x) = \sqrt{2\alpha x}$.
- 187.** $p(t) = (p_0 - \bar{p}) \exp(-j \frac{\beta + \delta}{1 - jv} t) + \bar{p}$; $p_0 = p(0)$, $\bar{p} = \frac{\alpha + \gamma}{\beta + \delta}$ ist der Gleichgewichtspreis.
- 188.** (a) $A(t) = \frac{L}{1 + C \exp(-Lk t)}$, t Anzahl der Monate. $L = 96\,000$, durch Einsetzen von $A(0) = 4000$ und $A(2) = 12\,000$: $C = 23$ und $k = 0,000\,006\,196$.
 $A(t) = \frac{96\,000}{1 + 23 \exp(-0,59479t)}$; (b) $A(6) = 58\,238$; (c) $t_{\frac{3}{4}} = 7,12$ Monate.
- 189.** Durch Einsetzen in die DG.
- 190.** (a) $y(x) = \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + c_1x + c_2$, (b) $y(x) = \frac{1}{12}(x^4 + 4x^3 - 30x^2 + 36x)$.
- 191.** allgemeine Lösung: $y(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-2t} - \frac{3}{2}$,
spezielle Lösung: $y(t) = 2e^t + \frac{1}{2}e^{-2t} - \frac{3}{2}$.
- 192.** allgemeine Lösung: $y(t) = (C_1 + C_2 t)e^{3t}$, spezielle Lösung: $y(t) = (2 - 6t)e^{3t}$.
- 193.** $y(x) = e^{-t}[C_1 \cos 4t + C_2 \sin 4t]$, der Fixpunkt $\bar{y} = 0$ ist asymptotisch stabil.
- 194.** $\mathcal{H}(t, y, u, \lambda) = e^t y - u^2 + \lambda(-u)$; $\lambda^*(t) = -e^t + e^2$; $y^*(t) = \frac{1}{2}(e^2 t - e^t + 1)$;
optimale Kontrollfunktion: $u^*(t) = \frac{1}{2}e^t - \frac{1}{2}e^2$.
- 195.** $\mathcal{H}(t, y, u, \lambda) = 1 - u^2 + \lambda(y + u)$; $\lambda^*(t) = 0$; $y^*(t) = e^t$;
optimale Kontrollfunktion: $u^*(t) = 0$.
- 196.** $\mathcal{H}(t, y, u, \lambda) = -(y + u^2) + \lambda(-u)$ (Minimierungsproblem!);
 $\lambda^*(t) = t - 1$; $y^*(t) = \frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{2}t$; optimale Kontrollfunktion: $u^*(t) = -\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}$.
- 197.** $\mathcal{H}(t, y, u, \lambda) = 1 - 4y - 2u^2 + \lambda u$; $\lambda^*(t) = 4t - 40$; $y^*(t) = \frac{1}{2}t^2 - 10t$;
optimale Kontrollfunktion: $u^*(t) = t - 10$.
- 198.** $\mathcal{H}(t, y, u, \lambda) = y - u^2 + \lambda(y + u)$; $\lambda^*(t) = e^{T-t} - 1$; $y^*(t) = \frac{1}{4}e^{T+t} - \frac{1}{4}e^{T-t} - \frac{1}{2}e^t + \frac{1}{2}$;
optimale Kontrollfunktion: $u^*(t) = \frac{1}{2}(e^{T-t} - 1)$.