Auffrischungskurs Mathematik

für das Masterstudium Volkswirtschaft

Josef Leydold

Institute for Statistics and Mathematics · WU Wien

Wintersemester 2017/18

Einleitung

Vorkenntnisse

Mathematische (und statistische) Vorkenntnisse der Studentinnen und Studenten des Masterprogramms *Volkswirtschaft* variieren sehr stark:

- Studierende mit Lehrveranstaltungen im Bachelorstudium mit Ausmaß von 25 ECTS Punkten.
- Studierende, die sich nicht daran erinnern können, ob sie überhaupt einen Mathematikkurs besucht haben oder nicht.

Wissenslücken

Folgende Aufgaben bereiten erfahrungsgemäß besondere Probleme:

- das Zeichnen (oder Skizzieren) von Funktionsgraphen,
- Äquivalenzumformungen von Gleichungen,
- das Arbeiten mit Ungleichungen,
- die korrekte Handhabung von Bruchtermen,
- das Rechnen mit Exponenten und Logarithmen,
- das unnötige Ausmultiplizieren von Produkten,
- das Verwenden der mathematischen Notation.

Die präsentierten „Lösungen“ derartiger (Teil-) Aufgaben sind überraschend oft falsch.

Lernziel

Diese Lehrveranstaltung soll helfen,

- etwaige (Vor-) Wissenslücken zu schließen und
- das Vorwissen im Bereich Mathematik auf einem höheren Niveau anzugleichen.

Ablauf der Lehrveranstaltung

- *Wiederholung* mathematischer Begriffe und Konzepte durch den Vortragenden.
- *Gemeinsames* Lösen von Aufgaben.
- Für eine positive Benotung ist Anwesenheit und eine **aktive** Mitarbeit an der Lösung der Aufgaben erforderlich.
- Kein Test.
- Der Stoff wird nicht immer linear präsentiert. (Auffrischungskurs)

Die Lösung einer Aufgabe

Eine Aufgabe ist erst dann *gelöst*, wenn die Frage also solche **beantwortet** ist.

Sie sollen damit zeigen, dass Sie in der Lage sind, die richtigen *Schlüsse* aus Ihren *Rechnungen* zu ziehen.

Fragmente von Rechnungen, die irgendwo beginnen und nirgendwo enden sind keine (Teil-) Lösung einer Aufgabe.
(Die Erstellung einer Kolonne von Zahlen ist ja auch keine vollständige Rechnungsprüfung.)

Maxima – Computer Algebra System (CAS)

Maxima ist ein so genanntes **Computer Algebra System** (CAS), d.h. man kann damit u.a.

- algebraische Ausdrücke manipulieren,
- Gleichungen, die Parameter enthalten, lösen,
- Funktionsterme symbolisch differenzieren oder integrieren,
- abstrakte Matrixalgebra betreiben,
- Graphen von Funktionen in ein oder zwei Variablen darstellen,
- ...

Das Programm *wxMaxima* bietet eine graphische Benutzeroberfläche:

`http://wxmaxima.sourceforge.net/`

Auf der Webseite dieser Lehrveranstaltung finden Sie das Skriptum *Introduction to Maxima for Economics*.

Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis / 2

Inhaltsverzeichnis / 3

Inhaltsverzeichnis / 4

Viel Erfolg!

Kapitel 1

Mengen und Abbildungen

Mengen

Der Begriff der *Menge* ist fundamental für die moderne Mathematik. Wir begnügen uns mit einer höchst einfachen Definition.

Eine **Menge** ist eine Sammlung von unterscheidbaren Objekten.

Ein Objekt a einer Menge A heißt **Element** der Menge:

$$\boxed{a \in A}$$

Mengen werden durch *Aufzählung* oder *Beschreibung* ihrer Elemente in *geschwungenen Klammern* $\{\ldots\}$ definiert.

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$B = \{x \mid x \text{ ist eine natürliche Zahl und durch 2 teilbar}\}$

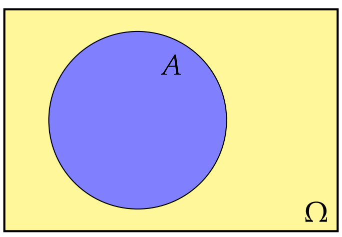
Wichtige Mengen

Symbol	Beschreibung
$\emptyset$	leere Menge (nur in der Schule: $\{\}$)
$\mathbb{N}$	natürliche Zahlen $\{1, 2, 3, \ldots\}$
$\mathbb{Z}$	ganze Zahlen $\{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$
$\mathbb{Q}$	rationale Zahlen, Bruchzahlen $\{\frac{k}{n} \mid k, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\}$
$\mathbb{R}$	reelle Zahlen
$[a, b]$	abgeschlossenes Intervall $\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$
(a, b)	offenes Intervall $\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$
$[a, b)$	halboffenes Intervall $\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$
$\mathbb{C}$	komplexe Zahlen

Venn-Diagramme

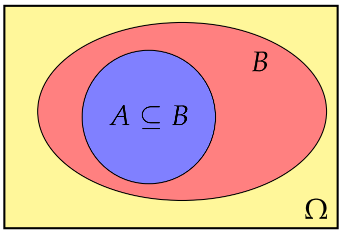
Beim Arbeiten mit Mengen nimmt man meist an, dass alle betrachteten Mengen Teilmengen einer vorgegebenen **Obermenge** Ω sind.

Mengen können durch so genannte **Venn-Diagramme** dargestellt werden. Die Obermenge wird durch ein Rechteck, die einzelnen Mengen durch Kreise oder Ovale dargestellt.



Teilmenge

Eine Menge A heißt **Teilmenge** von B, $\boxed{A \subseteq B}$, falls jedes Element von A auch Element von B ist, formal: $x \in A \Rightarrow x \in B$.



Eine Menge A heißt **echte Teilmenge** von B, $\boxed{A \subset B}$, falls $A \subseteq B$ und $A \neq B$.

Aufgabe 1.1

Welche der folgenden Mengen ist Teilmenge von
$A = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ und } 10 < x < 200\}$:

(a) $\{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ und } 10 < x \leq 200\}$

(b) $\{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ und } x^2 = 121\}$

(c) $\{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ und } 4\pi < x < \sqrt{181}\}$

(d) $\{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ und } 20 < |x| < 100\}$

Lösung 1.1

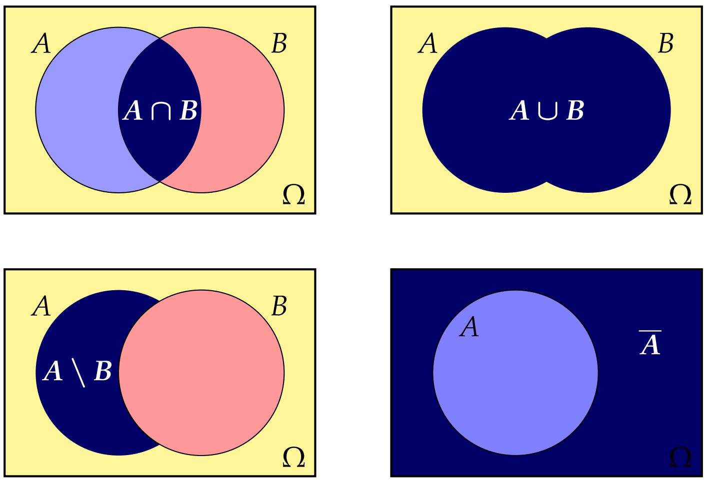
(a) keine Teilmenge;
(b) keine Teilmenge; da Menge $= \{-11, 11\}$;
(c) Teilmenge;
(d) keine Teilmenge.

Mengenverknüpfungen

Symbol	Definition	Bezeichnung
$A \cap B$	$\{x \mid x \in A$ und $x \in B\}$	Durchschnitt
$A \cup B$	$\{x \mid x \in A$ oder $x \in B\}$	Vereinigung
$A \setminus B$	$\{x \mid x \in A$ und $x \notin B\}$	Mengendifferenz
$\overline{A}$	$\Omega \setminus A$	Komplement

Zwei Mengen A und B heißen **disjunkt** falls $A \cap B = \emptyset$.

Mengenverknüpfungen



Aufgabe 1.2

Die Obermenge $\Omega = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ hat die Teilmengen $A = \{1,3,6,9\}$, $B = \{2,4,6,10\}$ und $C = \{3,6,7,9,10\}$. Zeichnen Sie das Venn-Diagramm und bilden Sie die Mengen, die durch die folgenden Ausdrücke definiert sind:

(a) $A \cup C$

(b) $A \cap B$

(c) $A \setminus C$

(d) $\overline{A}$

(e) $(A \cup C) \cap B$

(f) $(\overline{A} \cup B) \setminus C$

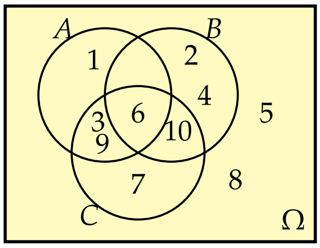
(g) $\overline{(A \cup C)} \cap B$

(h) $(\overline{A} \setminus B) \cap (\overline{A} \setminus C)$

(i) $(A \cap B) \cup (A \cap C)$

Lösung 1.2

(a) $\{1, 3, 6, 7, 9, 10\}$;
(b) $\{6\}$;
(c) $\{1\}$;
(d) $\{2, 4, 5, 7, 8, 10\}$;
(e) $\{6, 10\}$;
(f) $\{2, 4, 5, 8\}$;
(g) $\{2, 4\}$;
(h) $\{5, 8\}$;
(i) $\{3, 6, 9\}$.



Aufgabe 1.3

Zeichnen Sie im zugehörigen Venn-Diagramm die Lösungsmenge von

$$(A \cap \overline{B}) \cup (A \cap B) \,.$$

Lösung 1.3

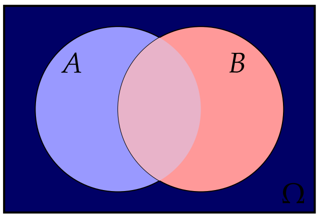
A.

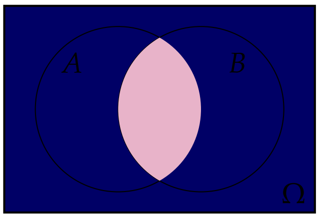
Rechenregeln für Mengenverknüpfungen

Regel	Bezeichnung
$A \cup A = A \cap A = A$	Idempotenz
$A \cup \emptyset = A$ und $A \cap \emptyset = \emptyset$	Identität
$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ und $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$	Assoziativität
$A \cup B = B \cup A$ und $A \cap B = B \cap A$	Kommutativität
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ und $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	Distributivität
$\overline{A} \cup A = \Omega$ und $\overline{A} \cap A = \emptyset$ und $\overline{\overline{A}} = A$	

Gesetz von De Morgan

$$\boxed{\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B} \quad \text{und} \quad \overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}}$$





Aufgabe 1.4

Vereinfachen Sie den folgenden Mengenausdruck:

$$(A \cap \overline{B}) \cup (A \cap B) .$$

Lösung 1.4

A.

Aufgabe 1.5

Vereinfachen Sie die folgenden Mengenausdrücke:

(a) $\overline{(A \cup B)} \cap \overline{B}$

(b) $(A \cup \overline{B}) \cap (A \cup B)$

(c) $((\overline{A} \cup \overline{B}) \cap \overline{(A \cap \overline{B})}) \cap A$

(d) $(C \cup B) \cap \overline{(\overline{C} \cap \overline{B})} \cap (C \cup \overline{B})$

Lösung 1.5

(a) $\overline{A} \cap \overline{B}$;
(b) A;
(c) $\emptyset$;
(d) C.

Cartesisches Produkt

Die Menge

$$\boxed{A \times B = \{(x,y) | x \in A,\ y \in B\}}$$

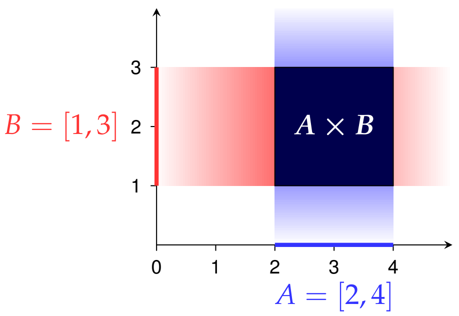
heißt das **Cartesisches Produkt** der *Mengen* A und B.

Im allgemeinen gilt: $A \times B \neq B \times A$.

Cartesisches Produkt

Das Cartesische Produkt aus $A = \{0,1\}$ und $B = \{2,3,4\}$ ist
$A \times B = \{(0,2),(0,3),(0,4),(1,2),(1,3),(1,4)\}$.

Das Cartesische Produkt aus $A = [2,4]$ und $B = [1,3]$ ist
$A \times B = \{(x,y) \mid x \in [2,4]$ und $y \in [1,3]\}$.



Aufgabe 1.6

Beschreiben Sie das Cartesische Produkt aus

(a) $A = [0,1]$ und $P = \{2\}$.

(b) $A = [0,1]$ und $Q = \{(x,y): 0 \leq x,y \leq 1\}$.

(c) $A = [0,1]$ und $O = \{(x,y): 0 < x,y < 1\}$.

(d) $A = [0,1]$ und $C = \{(x,y): x^2 + y^2 \leq 1\}$.

(e) $A = [0,1]$ und $\mathbb{R}$.

(f) $Q_1 = \{(x,y): 0 \leq x,y \leq 1\}$ und $Q_2 = \{(x,y): 0 \leq x,y \leq 1\}$.

Lösung 1.6

(a) die Strecke zwischen $(0,2)$ und $(1,2)$ im $\mathbb{R}^2$;
(b) der abgeschlossene Würfel $[0,1]^3$ im $\mathbb{R}^3$;
(c) der halboffene Würfel $[0,1] \times (0,1)^2$ im $\mathbb{R}^3$;
(d) Zylinder im $\mathbb{R}^3$;
(e) unbeschränkter Streifen im $\mathbb{R}^2$;
(f) der abgeschlossene Würfel $[0,1]^4$ im $\mathbb{R}^4$.

Abbildung

Eine **Abbildung** f ist definiert durch

(i) eine **Definitionsmenge** D,
(ii) eine **Wertemenge** W und
(iii) eine **Zuordnungsvorschrift**,
die jedem Element von D_f *genau ein* Element von W_f zuordnet.

$$\boxed{f\colon D_f \to W_f, \quad x \mapsto y = f(x)}$$

- x heißt **unabhängige** Variable, y heißt **abhängige** Variable.
- y ist das **Bild** von x, x ist das **Urbild** von y.
- $f(x)$ heißt **Funktionsterm**, x heißt **Argument** der Abbildung.

Andere Bezeichnungen: *Funktion*, *Transformation*

Aufgabe 1.7

Wie lauten

- Definitionsmenge,
- Wertemenge,
- Bildmenge,
- Funktionsterm,
- abhängige Variable,
- unabhängige Variable,

der Abbildung

$$\varphi\colon [0,\infty) \to \mathbb{R},\ x \mapsto y = x^\alpha \qquad \text{für } \alpha > 0?$$

Wie heißt diese Abbildung?

Lösung 1.7

Abbildung φ:
Definitionsmenge $= [0, \infty)$;
Wertemenge $= \mathbb{R}$;
Bildmenge $= [0, \infty)$;
Funktionsterm $\varphi(x) = x^\alpha$;
abhängige Variable $= x$;
unabhängige Variable $= y$.

Injektiv · surjektiv · bijektiv

Jedes Argument besitzt immer genau ein Bild. Die Anzahl der Urbilder eines Elementes $y \in W$ kann jedoch beliebig sein. Wir können daher Funktionen nach der Anzahl der Urbilder einteilen.

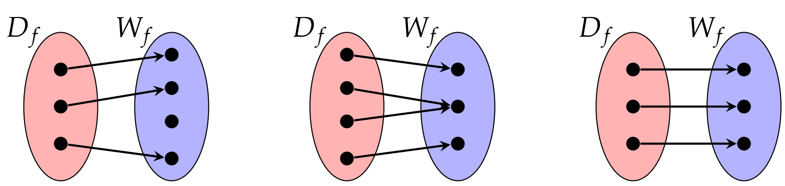
- Eine Abbildung f heißt **injektiv**, wenn jedes Element aus der Wertemenge *höchstens* ein Urbild besitzt.
- Sie heißt **surjektiv**, wenn jedes Element aus der Wertemenge *mindestens* ein Urbild besitzt.
- Sie heißt **bijektiv**, wenn sie sowohl injektiv als auch surjektiv ist.

Injektive Abbildungen haben die folgende wichtige Eigenschaft:

$$f(x) \neq f(y) \quad \Leftrightarrow \quad x \neq y$$

Injektiv · surjektiv · bijektiv

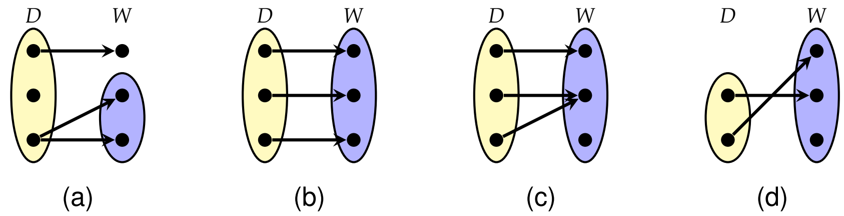
Abbildungen können durch „Pfeildiagramme“ veranschaulicht werden.



injektiv (nicht surjektiv) surjektiv (nicht injektiv) bijektiv

Aufgabe 1.8

Beschreiben die folgenden Diagramme Abbildungen? Wenn ja, ist die jeweilige Abbildung injektiv, surjektiv oder bijektiv?



Lösung 1.8

(a) keine Abbildung;
(b) bijektive Abbildung;
(c) Abbildung, weder injektiv noch surjektiv;
(d) injektive Abbildung, nicht surjektiv.

Aufgabe 1.9

Beschreiben die folgenden Strukturen Abbildungen?
Wenn ja, ist die jeweilige Abbildung injektiv, surjektiv oder bijektiv?

(a) $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$

(b) $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^{-2}$

(c) $f\colon [0,\infty) \to [0,\infty),\ x \mapsto x^2$

(d) $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R},\ x \mapsto \{y \in \mathbb{R}\colon y = x^2\}$

(e) $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R},\ x \mapsto \{y \in \mathbb{R}\colon x = y^2\}$

(f) $f\colon [0,\infty) \to [0,\infty),\ x \mapsto \{y \in \mathbb{R}\colon x = y^2\}$

Lösung 1.9

(a) injektiv;
(b) keine Abbildung, da 0^{-2} nicht definiert;
(c) bijektiv;
(d) injektiv, äquivalent zu (a);
(e) keine Abbildung, da $4 = 2^2 = (-2)^2$;
(f) bijektiv, da äquivalent zu $y = \sqrt{x}$.

Aufgabe 1.10

Sei $\mathcal{P}_k = \{\sum_{i=0}^{k} a_i x^i : a_i \in \mathbb{R}\}$ die Menge aller Polynome in x vom Grad kleiner gleich k.

Beschreiben die Strukturen Abbildungen (für $n \geq 2$)?
Wenn ja, ist die jeweilige Abbildung injektiv, surjektiv oder bijektiv?

(a) $D\colon \mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_n,\ p(x) \mapsto \frac{dp(x)}{dx}$

(b) $D\colon \mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_{n-1},\ p(x) \mapsto \frac{dp(x)}{dx}$

(c) $D\colon \mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_{n-2},\ p(x) \mapsto \frac{dp(x)}{dx}$

Lösung 1.10

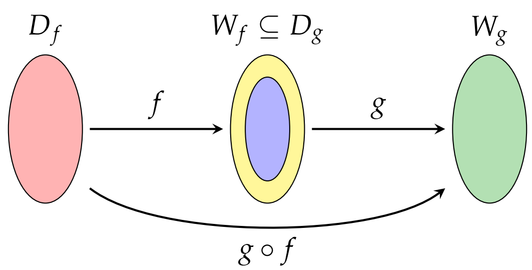
(a) Abbildung, weder injektiv (5' = 3' = 0) noch surjektiv;
(b) surjektiv.keine Abbildung, da 0^{-2} nicht definiert;
(e) keine Abbildung, da $(x^n)' = nx^{n-1} \notin \mathcal{P}_{n-2}$.

Zusammengesetzte Funktion

Seien $f\colon D_f \to W_f$ und $g\colon D_g \to W_g$ Funktionen mit $W_f \subseteq D_g$.
Dann heißt die Funktion

$$\boxed{g \circ f\colon D_f \to W_g,\ x \mapsto (g \circ f)(x) = g(f(x))}$$

zusammengesetzte Funktion („g *zusammengesetzt* f“).



Inverse Abbildung

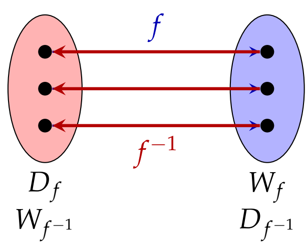
Bei einer **bijektiven** Abbildung $f\colon D_f \to W_f$ können wir jedem $y \in W_f$ sein Urbild $x \in D_f$ zuordnen.
Wir erhalten dadurch wieder eine Abbildung f^{-1} mit der Definitionsmenge W_f und der Wertemenge D_f:

$$\boxed{f^{-1}\colon W_f \to D_f,\ y \mapsto x = f^{-1}(y)}$$

Diese Abbildung heißt **Umkehrfunktion** oder **inverse Abbildung**. Sie hat die Eigenschaft, dass für alle Elemente $x \in D_f$ und $y \in W_f$ gilt:

$$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y) = x \quad \text{und} \quad f(f^{-1}(y)) = f(x) = y$$

Inverse Abbildung



Identische Abbildung

Die einfachste Funktion ist die **Einheitsfunktion** (oder **identische Abbildung** id, die das Argument auf sich selbst abbildet, d.h.

$$\boxed{\mathrm{id}\colon D \to W = D,\; x \mapsto x}$$

Die Einheitsfunktion bei zusammengesetzten Abbildungen die Rolle der Zahl 1 bei der Multiplikation von Zahlen.

$$f \circ \mathrm{id} = f \qquad \text{und} \qquad \mathrm{id} \circ f = f$$

Insbesondere gilt:

$$\boxed{f^{-1} \circ f = \mathrm{id}\colon D_f \to D_f \qquad \text{und} \qquad f \circ f^{-1} = \mathrm{id}\colon W_f \to W_f}$$

Kapitel 2

Terme

Terme

Ein mathematischer Ausdruck wie

$$B = R \cdot \frac{q^n - 1}{q^n(q-1)} \qquad \text{oder} \qquad (x+1)(x-1) = x^2 - 1$$

heißt eine **Gleichung**. Die Ausdrücke auf beiden Seiten des „=“-Zeichens heißen **Terme**.

Sie enthalten

- **Zahlen**,
- **Konstante** (das sind Symbole, die einen *fixen* Wert repräsentieren), und
- **Variable** (für die ein *beliebiger* Wert eingesetzt werden kann).

Wertebereich

Beim Rechnen mit Termen muss darauf geachtet werden, für welche Werte der Variablen der Ausdruck definiert ist.

- $\frac{1}{x-1}$ ist nur für $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ definiert.
- $\sqrt{x+1}$ nur für $x \geq -1$ definiert.

Die Menge aller erlaubten Variablenwerte heißt der **Definitionsbereich** des Terms.

Summensymbol

Terme, die viele Summanden enthalten, die gesetzmäßig zusammenhängen, lassen sich durch die Verwendung des **Summensymbols** $\sum$ vereinfachen:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n}$$

lies: „Summe über a_i von $i = 1$ bis $i = n$"

Wir können das Summensymbol auf der linke Seite auch als Abkürzung für die rechte Seite interpretieren.

Summensymbol

Die Summe der ersten 10 natürlichen Zahlen größer 2 ist in verschiedenen Notationen:

$$\sum_{i=1}^{10} (2+i) = (2+1) + (2+2) + (2+3) + \cdots + (2+10)$$

Summensymbol – Rechnen

Beim Rechnen mit dem Summensymbol gelten die üblichen Regeln der Arithmetik wie Assoziativgesetz und Distributivgesetz.

- $\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{k=1}^{n} a_k$
- $\sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i = \sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)$
- $\sum_{i=1}^{n} c\, a_i = c \sum_{i=1}^{n} b_i$

Summensymbol – Rechnen

Vereinfache

$$\sum_{i=2}^{n}(a_i + b_i)^2 - \sum_{j=2}^{n} a_j^2 - \sum_{k=2}^{n} b_k^2$$

Lösung:

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=2}^{n}(a_i + b_i)^2 - \sum_{j=2}^{n} a_j^2 - \sum_{k=2}^{n} b_k^2 \\
&= \sum_{i=2}^{n}(a_i + b_i)^2 - \sum_{i=2}^{n} a_i^2 - \sum_{i=2}^{n} b_i^2 \\
&= \sum_{i=2}^{n} \left((a_i + b_i)^2 - a_i^2 - b_i^2\right) \\
&= \sum_{i=2}^{n} 2\, a_i b_i
\end{aligned}$$

Aufgabe 2.1

Berechne:

(a) $\sum_{i=0}^{5} a^i b^{5-i}$

(b) $\sum_{i=1}^{5} (a_i - a_{i+1})$

(c) $\sum_{i=1}^{n} (a_i - a_{i+1})$

Lösung 2.1

(a) $b^5 + ab^4 + a^2b^3 + a^3b^2 + a^4b + a^5$;
(b) $a_1 - a_5$;
(c) $a_1 - a_n$.

Aufgabe 2.2

Welche der Lösungen für den Ausdruck

$$\sum_{i=2}^{10} 5(i+3)$$

ist richtig?

(a) $5(2+3+4+\ldots+9+10+3)$

(b) $5(2+3+3+3+4+3+5+3+6+3+\ldots+10+3)$

(c) $5(2+3+4+\ldots+9+10)+5\cdot 3$

(d) $5(2+3+4+\ldots+9+10)+9\cdot 5\cdot 3$

Lösung 2.2

(b) und (d).

Aufgabe 2.3

Vereinfache die folgenden Summenausdrücke:

(a) $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 + \sum_{j=1}^{n} b_j^2 - \sum_{k=1}^{n} (a_k - b_k)^2$

(b) $\sum_{i=1}^{n} (a_i b_{n-i+1} - a_{n-i+1} b_i)$

(c) $\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^2 + \sum_{j=1}^{n} (x_j - y_j)^2$

(d) $\sum_{j=0}^{n-1} x_j - \sum_{i=1}^{n} x_i$

Lösung 2.3

(a) $\sum_{i=1}^{n} 2a_i b_i$;
(b) 0;
(c) $2\sum_{i=1}^{n} (x_i^2 + y_i^2)$;
(d) $x_0 - x_n$.

Aufgabe 2.4

Arithmetisches Mittel (Mittelwert)

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

und *Varianz*

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$$

dienen als Lage- und Streumaß in der Statistik.

Zur Berechnung von σ^2 wird der *Verschiebungssatz* aus der Statistik verwendet:

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \bar{x}^2$$

Aufgabe 2.4 / 2

Verifiziere:

$$\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \bar{x}^2$$

für

(a) $n = 2$,

(b) $n = 3$,

(c) $n \geq 2$ beliebig.

Hinweise: Zeige, dass

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2\right) = 0.$$

Lösung 2.4

(a)

$$\begin{aligned}
&\big((x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2\big) - \big((x_1^2 + x_2^2) - 2\bar{x}^2\big) \\
&= x_1^2 - 2x_1\bar{x} + \bar{x}^2 + x_2^2 - 2x_2\bar{x} + \bar{x}^2 - x_1^2 - x_2^2 + 2\bar{x}^2 \\
&= -2x_1\bar{x} + \bar{x}^2 - 2x_2\bar{x} + \bar{x}^2 + 2\bar{x}^2 \\
&= -2(x_1 + x_2)\bar{x} + 4\bar{x}^2 \\
&= -2(2\bar{x})\bar{x} + 4\bar{x}^2 = 0
\end{aligned}$$

Lösung 2.4 / 2

(c)

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 - (\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2) \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\sum_{i=1}^{n} x_i\bar{x} + n\bar{x}^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + n\bar{x}^2 \\
&= -2(n\bar{x})\bar{x} + 2n\bar{x}^2 = 0
\end{aligned}$$

Aufgabe 2.5

Sei μ der “wahre” Wert eines metrischen Merkmals.
Dann heißt

$$MSE = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2$$

der *mittlere quadratische Fehler* (mean square error) der Messung dieses Merkmals.

Verifiziere:

$$MSE = \sigma^2 + (\bar{x} - \mu)^2$$

i.e., der MSE setzt sich zusammen aus einem

- zufälligen Fehler (Varianz der Messung), und einem
- systematischen Messfehlers (Verzerrung, *bias*).

Lösung 2.5

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{n}\textstyle\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2 - \left(\sigma^2 + (\bar{x} - \mu)^2\right) \\
&= \tfrac{1}{n}\textstyle\sum_{i=1}^{n}((x_i - \bar{x}) + (\bar{x} - \mu))^2 - \sigma^2 - (\bar{x} - \mu)^2 \\
&= \tfrac{1}{n}\textstyle\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 + \tfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\bar{x} - \mu)^2 \\
&\quad - \tfrac{2}{n}\textstyle\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(\bar{x} - \mu) - \sigma^2 - (\bar{x} - \mu)^2 \\
&= -\tfrac{2}{n}\textstyle\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(\bar{x} - \mu) \\
&= -\tfrac{2}{n}(\bar{x} - \mu)\textstyle\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}) \\
&= -2(\bar{x} - \mu)\left(\tfrac{1}{n}\textstyle\sum_{i=1}^{n} x_i - \tfrac{n}{n}\bar{x}\right) \\
&= -2(\bar{x} - \mu)\,(\bar{x} - \bar{x}) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Absolutbetrag

Der **Absolutbetrag** $|x|$ einer Zahl gibt den Abstand zum Nullpunkt an:

$$\boxed{|x| = \begin{cases} x & \text{für } x \geq 0, \\ -x & \text{für } x < 0. \end{cases}}$$

$|5| = 5$ und $|-3| = -(-3) = 3$.

Es gilt

$$|x| \cdot |y| = |x \cdot y|$$

Potenz

Die n-te **Potenz** von x ist definiert durch

$$\boxed{x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{n \text{ Faktoren}}}$$

Dabei heißt

- x die **Basis**, und
- n der **Exponent** von x^n.

Für *negative* Exponenten gilt:

$$\boxed{x^{-n} = \frac{1}{x^n}}$$

Wurzel

Eine Zahl y heißt die

- n-te **Wurzel** $\sqrt[n]{x}$ von x, falls $y^n = x$.

Das *Ziehen der n-ten Wurzel* stellt somit die umgekehrte Operation des *Potenzierens* dar.

Wir schreiben kurz $\sqrt{x}$ für die *Quadratwurzel* $\sqrt[2]{x}$.

Rationale Potenz

Rationale Potenzen sind definiert als:

$$\boxed{x^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{x} \qquad \text{für } m \in \mathbb{Z} \text{ und } x \geq 0.}$$

Wichtig:
Bei nicht-ganzzahligen Exponenten muss die Basis größer oder gleich 0 sein.

Potenzen lassen sich auch auf irrationale Exponenten erweitern.

Rechenregeln für Potenzen und Wurzeln

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n} \qquad x^0 = 1 \quad (x \neq 0)$$

$$x^{n+m} = x^n \cdot x^m \qquad x^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{x} \quad (x \geq 0)$$

$$x^{n-m} = \frac{x^n}{x^m} \qquad x^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{x^n} \quad (x \geq 0)$$

$$(x \cdot y)^n = x^n \cdot y^n \qquad x^{-\frac{n}{m}} = \frac{1}{\sqrt[m]{x^n}} \quad (x \geq 0)$$

$$(x^n)^m = x^{n \cdot m}$$

Achtung!
0^0 ist *nicht* definiert!

Rechenregeln für Potenzen und Wurzeln

- $\sqrt[3]{5^6} = (5^6)^{\frac{1}{3}} = 5^{(6 \cdot \frac{1}{3})} = 5^{\frac{6}{3}} = 5^2 = 25$
- $(\sqrt[3]{5})^6 = (5^{\frac{1}{3}})^6 = 5^{(\frac{1}{3} \cdot 6)} = 5^{\frac{6}{3}} = 5^2 = 25$
- $5^{4-3} = 5^1 = 5$
- $5^{4-3} = \frac{5^4}{5^3} = \frac{625}{125} = 5$
- $5^{2-2} = 5^0 = 1$
- $5^{2-2} = \frac{5^2}{5^2} = \frac{25}{25} = 1$

Rechenregeln für Potenzen und Wurzeln

- $\dfrac{(x \cdot y)^4}{x^{-2} y^3} = x^4\, y^4\, x^{-(-2)}\, y^{-3} = x^6\, y$
- $\dfrac{(2\,x^2)^3\,(3y)^{-2}}{(4\,x^2\,y)^2\,(x^3\,y)} = \dfrac{2^3\,x^{2\cdot 3}\,3^{-2}\,y^{-2}}{4^2\,x^{2\cdot 2}\,y^2\,x^3\,y} = \dfrac{\frac{8}{9}\,x^6\,y^{-2}}{16\,x^7\,y^3}$

  $= \frac{1}{18}\,x^{6-7}\,y^{-2-3} = \frac{1}{18}\,x^{-1} y^{-5} = \dfrac{1}{18\,x\,y^5}$
- $\left(3\,x^{\frac{1}{3}}\,y^{-\frac{4}{3}}\right)^3 = 3^3\,x^{\frac{3}{3}}\,y^{-\frac{12}{3}} = 27\,x\,y^{-4} = \dfrac{27\,x}{y^4}$

Rechenregeln für Potenzen und Wurzeln

Achtung!

$-x^2$ ist **nicht** gleich $(-x)^2$
$(x+y)^n$ ist **nicht** gleich $x^n + y^n$
$x^n + y^n$ kann (im Allgemeinen) **nicht** vereinfacht werden!

Aufgabe 2.6

Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke:

(a) $\dfrac{(xy)^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{6}}y^{\frac{2}{3}}} =$

(b) $\dfrac{1}{(\sqrt{x})^{-\frac{3}{2}}} =$

(c) $\left(\dfrac{|x|^{\frac{1}{3}}}{|x|^{\frac{1}{6}}}\right)^6 =$

Lösung 2.6

(a) $x^{\frac{1}{6}}y^{-\frac{1}{3}}$;
(b) $x^{\frac{3}{4}}$;
(c) $|x|$.

Monom

Ein **Monom** ist ein Produkt von Konstanten und Variablen mit nichtnegativen ganzzahligen Potenzen.

Der **Grad** eines Monoms ist die Summe der Exponenten im Ausdruck.

$6\,x^2$ ist ein Monom 2. Grades.
$3\,x^3\,y$ und $x\,y^2\,z$ sind Monome 4. Grades.
$\sqrt{x}$ und $\frac{2}{3\,x\,y^2}$ sind *keine* Monome

Polynom

Ein **Polynom** ist die Summe von ein oder mehreren Monomen.

Der **Grad** (oder die **Ordnung**) eines Polynoms ist der größte Grad unter den einzelnen Monomen.

$4\,x^2\,y^3 - 2\,x^3\,y + 4\,x + 7\,y$ ist ein Polynom 5. Grades.

Summendarstellung:

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i\,x^i = a_n\,x^n + a_{n-1}\,x^{n-1} + \cdots + a_1\,x + a_0$$

wobei x die Variable und die a_i Konstanten sind.

Binomischer Lehrsatz

$$\boxed{(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k}\,y^k}$$

wobei

$$\boxed{\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}}$$

der **Binomialkoeffizient** (lies: „n über k“) und

$$\boxed{n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n}$$

die **Fakultät** von n (lies: „n-faktorielle“) ist.

Per Definition ist $0! = 1$.

Binomialkoeffizient

Es gilt:

$$\boxed{\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \binom{n}{n-k}}$$

Berechnung:

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k \cdot (k-1) \cdot \ldots \cdot 1}$$

Der Binomialkoeffizient ist die Anzahl der k-elementigen Teilmengen einer n-elementigen Menge.

Binomischer Lehrsatz

- $(x+y)^2 = \binom{2}{0}x^2 + \binom{2}{1}xy + \binom{2}{2}y^2 = x^2 + 2xy + y^2$
- $(x+y)^3 = \binom{3}{0}x^3 + \binom{3}{1}x^2y + \binom{3}{2}xy^2 + \binom{3}{3}y^3$

  $= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$

Multiplikation

Das Produkt zweier Polynome von Grad n und m ergibt ein Polynom vom Grad $n+m$.

$$\begin{aligned}
(2\,x^2 + 3\,x - 5) \cdot (x^3 - 2\,x + 1) = \\
&= 2\,x^2 \cdot x^3 + 2\,x^2 \cdot (-2\,x) + 2\,x^2 \cdot 1 \\
&\quad + 3\,x \cdot x^3 + 3\,x \cdot (-2\,x) + 3\,x \cdot 1 \\
&\quad + (-5) \cdot x^3 + (-5) \cdot (-2\,x) + (-5) \cdot 1 \\
&= 2\,x^5 + 3\,x^4 - 9\,x^3 - 4\,x^2 + 13\,x - 5
\end{aligned}$$

Dividieren

Die **Division zweier Polynome** geschieht in analoger Weise wie die Division natürlicher Zahlen.

$$
\begin{array}{rl}
 & (\,x^3 + x^2 \quad + 0\,x - 2\,) : (x-1) = \mathbf{x^2 + 2\,x + 2} \\
\mathbf{x^2} \cdot (x-1) \longrightarrow & \underline{x^3 - x^2} \\
 & \qquad 2\,x^2 + 0\,x \\
\mathbf{2\,x} \cdot (x-1) \longrightarrow & \qquad \underline{2\,x^2 - 2\,x} \\
 & \qquad\qquad 2\,x - 2 \\
\mathbf{2} \cdot (x-1) \longrightarrow & \qquad\qquad \underline{2\,x - 2} \\
 & \qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

Wir erhalten daher $x^3 + x^2 - 2 = (x-1) \cdot (x^2 + 2\,x + 2)$.

Falls der *Divisor* kein Faktor des *Dividenden* ist, erhalten wir einen *Divisionsrest*.

Faktorisieren

Die *Zerlegung* eines Polynoms in ein Produkt von Polynomen niedrigerer Ordnung (**Faktor**) heißt **Faktorisierung**.

$$2\,x^2 + 4\,x\,y + 8\,x\,y^3 = 2\,x \cdot (x + 2\,y + 4\,y^3)$$

$$x^2 - y^2 = (x+y) \cdot (x-y)$$

$$x^2 - 1 = (x+1) \cdot (x-1)$$

$$x^2 + 2\,x\,y + y^2 = (x+y) \cdot (x+y) = (x+y)^2$$

$$x^3 + y^3 = (x+y) \cdot (x^2 - x\,y + y^2)$$

Einfache Verifikation durch Ausmultiplizieren der rechten Seite.

Der Ausmultiplizierreflex

Achtung!

Das Faktorisieren eines Polynoms ist oft sehr schwierig während das Ausmultiplizieren immer rasch und einfach geht.

Die Faktoren eines Polynoms enthalten aber mehr Informationen als die ausmultiplizierte Form.

(Auf dieses Prinzip bauen kryptographische Methoden mit privatem und öffentlichem Schlüssel auf.)

Meiner Erfahrung nach besitzen aber viele Studentinnen und Studenten einen **antrainierten Ausmultiplizierreflex**:
Alles wird *zuallererst* (und gedankenlos) *ausmultipliziert*
(und dabei oft einfache Probleme in schwierige verwandelt).

Der Ausmultiplizierreflex

Zügeln Sie Ihren Ausmultiplizierreflex!

Linearer Term

Ein Polynom *ersten Grades* wird auch als **linearer Term** bezeichnet.

- $a + b\,x + y + a\,c$ ist ein linearer Term in x und y, falls wir a, b und c als Konstante auffassen.
- $xy + x + y$ ist nicht linear, da xy Grad 2 besitzt.

Linearfaktor

Ein Faktor (Polynom) 1. Grades wird als **Linearfaktor** bezeichnet.

Für Polynome in einer Variable mit der Nullstelle x_1 erhalten wir mit $(x - x_1)$ einen Linearfaktor.

Wenn ein Polynom n-ten Grades $P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i\,x^i$ die n reellen Nullstellen $x_1, x_2, \dots, x_n$ besitzt, so lässt sich dieses Polynom als Produkt der n Linearfaktoren $(x - x_i)$ zerlegen:

$$\boxed{P(x) = a_n \prod_{i=1}^{n} (x - x_i)}$$

Aufgabe 2.7

Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke:

(a) $(x+h)^2 - (x-h)^2 =$

(b) $(a+b)c - (a+bc) =$

(c) $(A-B)(A^2+AB+B^2) =$

(d) $(x+y)^4 - (x-y)^4 =$

Lösung 2.7

(a) $4xh$;
(b) $a(c-1)$;
(c) $A^3 - B^3$;
(d) $8xy(x^2+y^2)$.

Aufgabe 2.8

(a) Geben Sie ein Polynom 4. Grades mit den Nullstellen -1, 2, 3 und 4 an.

(b) Wie lautet die Menge aller Polynome mit diesen Nullstellen?

(c) Kann so ein Polynom noch andere Nullstellen haben?

Lösung 2.8

Alle Polynome 4. Grades mit diesen Nullstellen haben die Form $c\,(x+1)\,(x-2)\,(x-3)\,(x-4)$ mit $c \neq 0$. Ein Polynom 4. Grades kann nicht mehr als 4 Nullstellen haben.

Aufgabe 2.9

Zeigen Sie, dass

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

Lösung 2.9

Durch direktes Ausrechnen von $2^n = (1+1)^n$ mittels Binomischen Lehrsatzes.

Bruchterm

Ein **rationaler Term** (**Bruchterm**) ist ein Ausdruck der Form

$$\boxed{\frac{P(x)}{Q(x)}}$$

wobei $P(x)$ und $Q(x)$ Polynome sind und **Zähler** bzw. **Nenner** heißen.

Der Definitionsbereich eines Bruchterms ist $\mathbb{R}$ ohne die Nullstellen des Nenners. Eine alternative Schreibweise ist $P(x)/Q(x)$.

$\frac{x^2+x-4}{x^3+5}$ ist ein Bruchterm mit Definitionsbereich $\mathbb{R} \setminus \{\sqrt[3]{5}\}$.

Rechenregeln für Brüche und Bruchterme

Seien $b, c, e \neq 0$.

$\frac{c \cdot a}{c \cdot b} = \frac{a}{b}$	*Kürzen*
$\frac{a}{b} = \frac{c \cdot a}{c \cdot b}$	*Erweitern*
$\frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$	*Multiplizieren*
$\frac{a}{b} : \frac{e}{c} = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{e}$	*Dividieren*
$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{e}{c}} = \frac{a \cdot c}{b \cdot e}$	*Doppelbruch Auflösen*

Rechenregeln für Brüche und Bruchterme

Seien $b, c \neq 0$.

$\frac{a}{b} + \frac{d}{b} = \frac{a+d}{b}$	*Addition bei gleichem Nenner*
$\frac{a}{b} + \frac{d}{c} = \frac{a \cdot c + d \cdot b}{b \cdot c}$	*Addition*

Wichtig!
Bei der *Addition* immer zuerst auf **gemeinsamen Nenner** bringen!

Achtung!
Der Ausdruck $\frac{0}{0}$ ist nicht definiert.

Rechenregeln für Brüche und Bruchterme

- $\dfrac{x^2-1}{x+1} = \dfrac{(x+1)(x-1)}{x+1} = x-1$
- $\dfrac{4\,x^3+2\,x^2}{2\,x\,y} = \dfrac{2\,x^2(2\,x+1)}{2\,x\,y} = \dfrac{x(2\,x+1)}{y}$
- $\dfrac{x+1}{x-1} + \dfrac{x-1}{x+1} = \dfrac{(x+1)^2+(x-1)^2}{(x-1)(x+1)}$

$$= \frac{x^2+2\,x+1+x^2-2\,x+1}{(x-1)(x+1)} = 2\,\frac{x^2+1}{x^2-1}$$

Rechenregeln für Brüche und Bruchterme

Es sei an dieser Stelle darauf hingewiesen, dass beim Rechnen mit Bruchtermen immer wieder eklatante Rechenfehler passieren!

Die folgenden Beispiele für derartige Irrtümer stammen aus der Prüfungspraxis des Autors.

Rechenregeln für Brüche und Bruchterme

Achtung!

$\dfrac{a+c}{b+c}$ ist **nicht** gleich $\dfrac{a}{b}$

$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}$ ist **nicht** gleich $\dfrac{x+y}{a+b}$

$\dfrac{a}{b+c}$ ist **nicht** gleich $\dfrac{a}{b}+\dfrac{a}{c}$

$\dfrac{x+2}{y+2} \neq \dfrac{x}{y}$ $\qquad$ $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3} \neq \dfrac{1}{5}.$

$\dfrac{1}{x^2+y^2} \neq \dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}$

Aufgabe 2.10

Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke:

(a) $\dfrac{1}{1+x} + \dfrac{1}{x-1} =$

(b) $\dfrac{s}{st^2 - t^3} - \dfrac{1}{s^2 - st} - \dfrac{1}{t^2} =$

(c) $\dfrac{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}{xy + xz + y(z-x)} =$

(d) $\dfrac{\frac{x+y}{y}}{\frac{x-y}{x}} + \dfrac{\frac{x+y}{x}}{\frac{x-y}{y}} =$

Lösung 2.10

(a) $\frac{2x}{x^2-1}$;
(d) $\frac{1}{st}$;
(c) $\frac{1}{xyz}$;
(d) $\frac{(x^2+y^2)(x+y)}{xy(x-y)}$.

Aufgabe 2.11

Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke:

(a) $y(xy + x + 1) - \dfrac{x^2y^2 - 1}{x - \frac{1}{y}} =$

(b) $\dfrac{\frac{x^2+y}{2x+1}}{\frac{2xy}{2x+y}} =$

(c) $\dfrac{\frac{a}{x} - \frac{b}{x+1}}{\frac{a}{x+1} + \frac{b}{x}} =$

(d) $\dfrac{2x^2y - 4xy^2}{x^2 - 4y^2} + \dfrac{x^2}{x+2y} =$

Lösung 2.11

(a) xy;
(b) $\frac{(x^2+y)(2x+y)}{(2x+1)\,2xy}$;
(c) $\frac{x(a-b)+a}{x(a+b)+b}$;
(d) x.

Aufgabe 2.12

Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke:

(a) $\dfrac{x^{\frac{1}{4}} - y^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{8}} + y^{\frac{1}{6}}} =$

(b) $\dfrac{\sqrt{x} - 4}{x^{\frac{1}{4}} - 2} =$

(c) $\dfrac{\frac{2}{x^{-\frac{1}{7}}}}{x^{-\frac{7}{2}}} =$

Lösung 2.12

(a) $x^{\frac{1}{8}} - y^{\frac{1}{6}}$;
(b) $x^{\frac{1}{4}} + 2$;
(c) $2\,x^{\frac{51}{14}}$.

Aufgabe 2.13

Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke:

(a) $\dfrac{(\sqrt{x}+y)^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{6}}}$

(b) $\dfrac{1}{3\sqrt{x}-1}\cdot\dfrac{1}{1+\frac{1}{3\sqrt{x}}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{x}}=$

(c) $\dfrac{(xy)^{\frac{1}{6}}-3}{(xy)^{\frac{1}{3}}-9}=$

(d) $\dfrac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=$

Lösung 2.13

(a) $(1+\frac{y}{\sqrt{x}})^{\frac{1}{3}}$;
(b) $\frac{1}{3x-\frac{1}{3}}$;
(c) $\frac{1}{(xy)^{\frac{1}{6}}+3}$;
(d) $\sqrt{x}+\sqrt{y}$.

Exponent und Logarithmus

Eine Zahl y heißt **Logarithmus** von x zur Basis a, falls $a^y = x$. Der Logarithmus ist der *Exponent einer Zahl bezüglich einer Basis* a. Wir schreiben dafür

$$y = \log_a(x) \qquad \Leftrightarrow \qquad x = a^y$$

Wichtige Logarithmen:

- **natürlicher Logarithmus** $\ln(x)$ zur Basis $e = 2,7182818\ldots$ (*Eulersche Zahl*)
- **dekadischer Logarithmus** $\lg(x)$ zur Basis 10

Exponent und Logarithmus

- $\log_{10}(100) = 2,$ da $10^2 = 100$
- $\log_{10}\left(\frac{1}{1000}\right) = -3,$ da $10^{-3} = \frac{1}{1000}$
- $\log_2(8) = 3,$ da $2^3 = 8$
- $\log_{\sqrt{2}}(16) = 8,$ da $\sqrt{2}^8 = 2^{8/2} = 2^4 = 16$

Rechnen mit Exponenten und Logarithmus

Umrechnungsformel:

$$\boxed{a^x = e^{x \ln(a)} \qquad \log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}}$$

$$\log_2(123) = \frac{\ln(123)}{\ln(2)} = \frac{4,812184}{0,6931472} = 6,942515$$

Rechnen mit Exponenten und Logarithmus

Achtung:
Oft schreibt man nur $\log(x)$ ohne Angabe der Basis.

In diesem Fall ist (sollte) die verwendete Basis aus dem Zusammenhang oder einer Konvention ersichtlich (sein).

- Im *mathematischen* Bereich: *natürlicher* Logarithmus
  Finanzmathematik, Programme wie R, *Mathematica*, Maxima, …
- Im *technischen* Bereich: *dekadischer* Logarithmus
  Wirtschaftswissenschaften, Taschenrechner, Excel, …

Rechenregeln für Exponenten und Logarithmus

$a^{x+y} = a^x \cdot a^y$	$\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)$
$a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$	$\log_a(\frac{x}{y}) = \log_a(x) - \log_a(y)$
$(a^x)^y = a^{x \cdot y}$	$\log_a(x^\beta) = \beta \cdot \log_a(x)$
$(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$	
$a^{\log_a(x)} = x$	$\log_a(a^x) = x$
$a^0 = 1$	$\log_a(1) = 0$

$\log_a(x)$ ist (innerhalb der reellen Zahlen) nur für $x > 0$ definiert!

Aufgabe 2.14

Berechnen Sie ohne Taschenrechner:

(a) $\log_2(2) =$

(b) $\log_2(4) =$

(c) $\log_2(16) =$

(d) $\log_2(0) =$

(e) $\log_2(1) =$

(f) $\log_2\left(\frac{1}{4}\right) =$

(g) $\log_2\left(\sqrt{2}\right) =$

(h) $\log_2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) =$

(i) $\log_2(-4) =$

Lösung 2.14

(a) 1;
(b) 2;
(c) 4;
(d) nicht definiert;
(e) 0;
(f) -2;
(g) $\frac{1}{2}$;
(h) $-\frac{1}{2}$;
(i) nicht reell.

Aufgabe 2.15

Berechnen Sie ohne Taschenrechner:

(a) $\log_{10}(300) =$

(b) $\log_{10}(3^{10}) =$

Verwenden Sie $\log_{10}(3) = 0,47712$.

Lösung 2.15

(a) $2,47712$;
(b) $4,7712$.

Aufgabe 2.16

Berechnen (vereinfachen) Sie ohne Taschenrechner:

(a) $0{,}01^{-\log_{10}(100)} =$

(b) $\log_{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{25}\right) =$

(c) $10^{3\log_{10}(3)} =$

(d) $\frac{\log_{10}(200)}{\log_{\frac{1}{\sqrt{7}}}(49)} =$

(e) $\log_8\left(\frac{1}{512}\right) =$

(f) $\log_{\frac{1}{3}}(81) =$

Lösung 2.16

(a) $10\,000$;
(b) -4;
(c) 27;
(d) $-\frac{\log_{10}(2)}{4} - \frac{1}{2}$;
(e) -3;
(f) -4.

Aufgabe 2.17

Schreiben Sie in der Form $y = A\,e^{cx}$
(i.e., bestimmen Sie A und c):

(a) $y = 10^{x-1}$

(b) $y = 4^{x+2}$

(c) $y = 3^x 5^{2x}$

(d) $y = 1{,}08^{x-\frac{x}{2}}$

(e) $y = 0{,}9 \cdot 1{,}1^{\frac{x}{10}}$

(f) $y = \sqrt{q}\,2^{x/2}$

Lösung 2.17

(a) $y = \frac{1}{10}\,e^{x\,\ln 10}$;
(b) $y = 16\,e^{x\,\ln 4}$;
(c) $y = e^{x(\ln 3 + \ln 25)}$;
(d) $y = e^{x\,\ln\sqrt{1{,}08}}$;
(e) $y = 0{,}9\,e^{x\,\frac{1}{10}\ln 1{,}1}$;
(f) $y = \sqrt{q}\,e^{x\,\ln\sqrt{2}}$.

Kapitel 3

Gleichungen und Ungleichungen

Gleichung

Eine **Gleichung** erhalten wir durch **Gleichsetzen** zweier Terme.

$\boxed{\textit{linke Seite} = \textit{rechte Seite}}$

- **Grundmenge**: Menge aller Zahlen, die wir als Lösung der Gleichung zulassen. (Im folgenden: $\mathbb{R}$ oder $[0, \infty)$)
- **Definitionsbereich**: Durchschnitt aller Definitionsmengen der Terme der Gleichung.
- **Lösungsmenge**: Menge aller Zahlen aus dem Definitionsbereich, die diese Gleichung erfüllen.

Äquivalenzumformung

Zum Lösen einer Gleichung versuchen wir die gesuchte Größe durch **Äquivalenzumformung** auf einer Seite der Gleichung zu isolieren.

- Addieren oder Subtrahieren einer Zahl oder eines beliebigen Term auf beiden Seiten der Gleichung
- Multiplizieren beider Seiten mit einer Zahl oder Term **ungleich** Null.
- Dividieren beider Seiten durch eine Zahl oder Term **ungleich** Null.
- Logarithmieren oder Exponenzieren beider Seiten.

Fehlerquellen

Achtung!
Beim Logarithmieren muss darauf geachtet werden, dass beide Seiten größer Null sind.

Achtung!
Ein Term, der die gesuchte Variable enthält, kann auch Null werden.

- Beim Multiplizieren erhält man möglicherweise eine zusätzliche falsche “Lösung”.
- Beim Dividieren verliert man möglicherweise eine Lösung.

Achtung!
Beim Kürzen eines Bruchterms muss darauf geachtet werden, dass die Nullstellen des Nenners nicht zum Definitionsbereich des Bruchterms gehören.

Multiplizieren

Durch Multiplizieren von

$$\frac{x^2+x-2}{x-1}=1$$

mit $(x-1)$ erhalten wir

$$x^2+x-2=x-1$$

mit der Lösungsmenge $L=\{-1,1\}$.

$x=1$ ist aber nicht im Definitionsbereich von $\frac{x^2+x-2}{x-1}$ und daher keine Lösung der (ursprünglichen) Gleichung.

Dividieren

Wenn wir die Gleichung

$$(x-1)(x-2)=0 \qquad \text{(Lösungsmenge } L=\{1,2\})$$

durch $(x-1)$ dividieren erhalten wir die Gleichung

$$x-2=0 \qquad \text{(Lösungsmenge } L=\{2\})$$

Die Lösung $x=1$ geht durch das Dividieren „verloren“.

Dividieren

Achtung
Beim Dividieren ist eine Fallunterscheidung durchzuführen:

1. Fall: Die Division ist erlaubt (der Divisor ist **ungleich** Null).

2. Fall: Die Division ist nicht erlaubt (der Divisor ist **gleich** Null).

Lösung von $(x-1)(x-2)=0$:
Fall $x-1 \neq 0$: Wir erhalten durch Dividieren die Lösung $x_1 = 2$.
Fall $x-1=0$: Daraus folgt die Lösung $x_2 = 1$.

Wir werden später noch eine bessere Methode für diese Gleichung kennen lernen.

Dividieren

$$\begin{cases} x\,y - x = 0 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases}$$

Erste Gleichung:
Addition und Division ergibt

$$x\,y = x \;\rightsquigarrow\; y = \frac{x}{x} = 1$$

Und daher $x = \pm 1$.
Vermeintliche Lösungsmenge $L = \{(-1,1),(1,1)\}$.

Aber: Division ist nur erlaubt, falls $x \neq 0$ ist.

$x=0$ erfüllt aber ebenfalls die erste Gleichung.
Tatsächliche Lösungsmenge $L = \{(-1,1),(1,1),(0,\sqrt{2}),(0,-\sqrt{2})\}$.

Faktorisieren

Es ist oft besser einen Term zu *Faktorisieren* anstatt zu Dividieren.

$$\begin{cases} x\,y - x = 0 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases}$$

Erste Gleichung $\quad x \cdot (y-1) = 0 \quad$ impliziert

$$x = 0 \quad \textit{oder} \quad y - 1 = 0 \quad \text{(oder beides).}$$

Fall $x=0$: $\quad y = \pm\sqrt{2}$

Fall $y-1=0$: $\quad y = 1$ und $x = \pm 1$.

Lösungsmenge $L = \{(-1,1),(1,1),(0,\sqrt{2}),(0,-\sqrt{2})\}$.

Verifizieren

Wenn eine (angebliche) Lösung einer Gleichung vorliegt, ist es meist einfach diese durch *Einsetzen* zu verifizieren (“**Probe**”).

Wenn Sie unsicher sind, machen Sie die Probe.

Hinweis:
Falls Sie in einer Aufgabe eine angegebene Lösung verifizieren sollen, machen sie einfach die Probe.

Aufgabe 3.1

Wie müssen die Konstanten a, b und c gewählt werden, damit die folgenden Gleichungen für alle x erfüllt sind:

(a) $\dfrac{x}{1+x} - \dfrac{2}{2-x} = -\dfrac{2a+bx+cx^2}{2+x-x^2}$

(b) $\dfrac{x^2+2x}{x+2} - \dfrac{x^2+3}{x+3} = \dfrac{a(x-b)}{x+c}$

Lösung 3.1

(a) $a = 1$, $b = 0$, $c = 1$;
(b) $a = 3$, $b = 1$, $c = 3$.

Lineare Gleichung

Lineare Gleichungen enthalten nur *lineare Terme* und sind (fast) immer lösbar.

Aus der Barwertformel für eine nachschüssige Rente

$$B_n = R \cdot \frac{q^n - 1}{q^n(q-1)}$$

soll die Rente R ausgedrückt werden. Da R nur in 1. Potenz vorkommt, müssen wir eine lineare Gleichung lösen.
Durch Division durch die Konstante $\frac{q^n-1}{q^n(q-1)}$ ($\neq 0$) erhalten wir als Lösung:

$$R = B_n \cdot \frac{q^n(q-1)}{q^n - 1}$$

Betragsgleichung

Eine Gleichung mit Absolutbetrag können wir als eine Abkürzung für zwei Gleichungen sehen:

$$\boxed{|x| = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1 \text{ oder } -x = 1}$$

Lösung von $|2x - 3| = |x + 1|$.

Alle Lösungen von jeder der beiden Gleichungen:

$$\begin{aligned} (2x-3) &= (x+1) &\Rightarrow\ & x = 4 \\ -(2x-3) &= (x+1) &\Rightarrow\ & x = \tfrac{2}{3} \end{aligned}$$

(Die Gleichungen $-(2x-3) = -(x+1)$ und $(2x-3) = -(x+1)$ sind äquivalent.)

Die Lösungsmenge lautet daher $L = \left\{\frac{2}{3}, 4\right\}$.

Aufgabe 3.2

Lösen Sie die folgenden Gleichungen:

(a) $|x(x-2)| = 1$

(b) $|x+1| = \dfrac{1}{|x-1|}$

(c) $\left|\dfrac{x^2-1}{x+1}\right| = 2$

Lösung 3.2

(a) $\{1-\sqrt{2}, 1, 1+\sqrt{2}\}$;
(b) $\{-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}\}$;
(c) $\{3\}$ (-1 nicht im Definitionsbereich).

Gleichungen mit Exponenten

Wenn die gesuchte Variable im Exponenten lassen sich (manchmal) durch Logarithmieren lösen:

- Der Term mit der Variable wird auf einer Seite der Gleichung isoliert. Er darf dabei keine Addition enthalten.
- Durch **Logarithmieren** beider Seiten erhalten wir dann die gesuchte Lösung.

Lösung der Gleichung $2^x = 32$.
Durch Logarithmieren beider Seiten erhalten wir

$$\begin{aligned} & 2^x = 32 \\ \Leftrightarrow\quad & \ln(2^x) = \ln(32) \\ \Leftrightarrow\quad & x\,\ln(2) = \ln(32) \\ \Leftrightarrow\quad & x = \tfrac{\ln(32)}{\ln(2)} = 5 \end{aligned}$$

Gleichungen mit Exponenten

Aus der Formel für die Kreditrate

$$X = K \cdot q^n \frac{q-1}{q^n-1}$$

soll die Dauer n eines Kredits bei vorgegebener Kredithöhe K, Kreditrate X und Aufzinsungsfaktor q berechnet werden.

$$\begin{array}{rcll} X & = & K \cdot q^n \frac{q-1}{q^n-1} & \mid \cdot (q^n-1) \\ X\,(q^n-1) & = & K\,q^n\,(q-1) & \mid -K\,q^n\,(q-1 \\ q^n\,(X-K(q-1)) - X & = & 0 & \mid +X \\ q^n\,(X-K(q-1)) & = & X & \mid : (X-K(q- \\ q^n & = & \frac{X}{X-K(q-1)} & \mid\ \ln \\ n\,\ln(q) & = & \ln(X) - \ln(X-K(q-1)) & \mid : \ln(q) \\ n & = & \frac{\ln(X)-\ln(X-K(q-1))}{\ln(q)} & \end{array}$$

Gleichungen mit Logarithmen

Gleichungen mit Logarithmen lassen sich (manchmal) durch Exponenzieren beider Seiten lösen.

Die Lösung von $\ln(x+1) = 0$ erhalten wir durch Exponenzieren beider Seiten der Gleichung.

$$\begin{aligned} & \ln(x+1) = 0 \\ \Leftrightarrow\quad & e^{\ln(x+1)} = e^0 \\ \Leftrightarrow\quad & x+1 = 1 \\ \Leftrightarrow\quad & x = 0 \end{aligned}$$

Aufgabe 3.3

Lösen Sie die folgenden Gleichungen:

(a) $2^x = 3^{x-1}$

(b) $3^{2-x} = 4^{\frac{x}{2}}$

(c) $2^x 5^{2x} = 10^{x+2}$

(d) $2 \cdot 10^{x-2} = 0{,}1^{3x}$

(e) $\frac{1}{2^{x+1}} = 0{,}2^x 10^4$

(f) $(3^x)^2 = 4 \cdot 5^{3x}$

Lösung 3.3

(a) $x = \frac{\ln 3}{\ln 3 - \ln 2} \approx 2{,}710$;
(b) $x = \frac{\ln 9}{\ln 6} \approx 1{,}226$;
(c) $x = \frac{\ln 100}{\ln 5} \approx 2{,}861$;
(d) $x = \frac{\ln 50}{4\ \ln 10} \approx 0{,}425$;
(e) $x = -\frac{\ln 2 + 4\ \ln 10}{\ln 0{,}4} \approx 10{,}808$;
(f) $x = \frac{\ln 4}{\ln 9 - \ln 125} \approx -0{,}527$.

Aufgabe 3.4

Lösen Sie die Gleichung

$$\ln\left(x^2\left(x-\frac{7}{4}\right)+\left(\frac{x}{4}+1\right)^2\right)=0$$

Lösung 3.4

$x_1 = 0,$
$x_2 = \frac{27}{32} + \frac{\sqrt{217}}{32} \approx 1{,}304,$
$x_3 = \frac{27}{32} - \frac{\sqrt{217}}{32} \approx 0{,}383.$

Potenzgleichung

Gleichungen, die **nur eine** *ganzzahlige* Potenz der gesuchten Variable enthalten, lassen sich durch **Wurzelziehen** lösen.

Achtung
Achten Sie bitte darauf, dass im Falle einer geraden Potenz die Gleichung (in $\mathbb{R}$) nicht immer lösbar, oder die Lösung nicht immer eindeutig ist. Im Falle einer ungeraden Potenz ist die Gleichung (in $\mathbb{R}$) immer eindeutig lösbar.

Die Lösungsmenge von $x^2 = 4$ lautet $L = \{-2, 2\}$.

Die Gleichung $x^2 = -4$ hat keine (reelle) Lösung.

Die Lösungsmenge von $x^3 = -8$ ist $L = \{-2\}$.

Wurzelgleichungen

Wurzelgleichungen lassen sich lösen, indem wir beide Seiten quadrieren oder potenzieren.

Die Lösung von $\sqrt[3]{x-1} = 2$ erhalten wir durch Potenzieren:

$$\sqrt[3]{x-1} = 2 \quad \Leftrightarrow \quad x-1 = 2^3 \quad \Leftrightarrow \quad x = 9$$

Quadratwurzel

Bei Wurzelgleichungen mit geraden Radices (z.B. Quadratwurzel) stellt das Potenzieren keine Äquivalenzumformung dar.

Aus der „Nicht-Gleichung“ $-3 \neq 3$ wird durch Quadrieren die Gleichung $(-3)^2 = 3^2$.

Wir könnten (wie beim Multiplizieren mit einem Term) eine „zusätzliche Lösung“ erzeugen.

Der Definitionsbereich der Gleichung ist meist nur mehr eine kleine Teilmenge der reellen Zahlen:
Der Radikand unter der Wurzel darf nicht negativ sein darf.

Quadratwurzel

Achtung!

Wir müssen bei Wurzelgleichungen daher **immer** eine *Probe* durchführen.

Quadratwurzel

Wir wollen die Gleichung $\sqrt{x-1} = 1 - \sqrt{x-4}$ lösen.

Die Definitionsmenge ist $D = \{x | x \geq 4\}$.

Durch Quadrieren erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\sqrt{x-1} &= 1 - \sqrt{x-4} && |^2 \\
x-1 &= 1 - 2 \cdot \sqrt{x-4} + (x-4) && | - x + 3 \quad | : 2 \\
1 &= -\sqrt{x-4} && |^2 \\
1 &= x - 4 \\
x &= 5
\end{aligned}$$

Die Probe ergibt aber $\sqrt{5-1} = 1 - \sqrt{5-4} \quad \Leftrightarrow \quad 2 = 0$,
eine **falsche** Aussage. Die Lösungsmenge ist daher $L = \emptyset$.

Aufgabe 3.5

Lösen Sie die folgenden Gleichungen:

(a) $\sqrt{x+3} = x + 1$

(b) $\sqrt{x-2} = \sqrt{x+1} - 1$

Lösung 3.5

(a) 1, (-2 erfüllt nicht die Wurzelgleichung);
(b) 3.

Quadratische Gleichung

Eine **quadratische Gleichung** ist eine Gleichung der Form

$$a\,x^2 + b\,x + c = 0 \qquad \text{Lösungen:}\quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

bzw. in Standardform

$$x^2 + p\,x + q = 0 \qquad \text{Lösungen:}\quad x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Nullstellen von Polynomen

Quadratische Gleichungen sind ein Spezialfall von **algebraischen Gleichungen** n-ter Ordnung

$$P_n(x) = 0$$

wobei $P_n(x)$ ein Polynom vom Grad n ist.

Für die Lösungen von Gleichungen 3. Grades (*kubische Gleichungen*) und 4. Grades gibt es allgemeine Verfahren, die aber sehr aufwendig sind.

Für Polynome ab dem 5. Grad kann man beweisen, dass keine derartigen Verfahren existieren.

Nullstellen von Polynomen

Polynomgleichungen lassen sich schrittweise durch *Abspalten von Linearfaktoren* (durch Division, oder mittels Horner-Schema) lösen:

1. Wir suchen eine Nullstelle x_1 von $P_n(x)$ (z.B. durch gezieltes Ausprobieren (Satz von Vieta), oder mit dem Newton-Verfahren)
2. Mit $(x - x_1)$ erhalten wir einen Linearfaktor von $P_n(X)$.
3. $P_n(x) : (x - x_1)$ ergibt ein Polynom $P_{n-1}(x)$ von Grad $n - 1$.
4. Falls $n - 1 = 2$ erhalten wir eine quadratische Gleichung. Andernfalls gehe zu Schritt 1.

Nullstellen von Polynomen

Wir suchen die Lösungen von

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0.$$

Durch Ausprobieren erhalten wir die Lösung $x_1 = 1$.

Wir dividieren nun durch den Linearfaktor $(x - 1)$ und erhalten:

$$(x^3 - 6x^2 + 11x - 6) : (x - 1) = x^2 - 5x + 6$$

Die quadratische Gleichung $x^2 - 5x + 6 = 0$ hat die Lösungen $x_2 = 2$, $x_3 = 3$.

Die Lösungsmenge lautet daher $L = \{1, 2, 3\}$.

Nullstellen eines Produkts

Ein *Produkt* zweier (oder mehrerer) Terme $f(x) \cdot g(x)$ wird genau dann Null, wenn mindestens ein Faktor gleich Null ist, also

$$f(x) = 0 \quad \textit{oder} \quad g(x) = 0 \quad \text{(oder beides).}$$

Die Gleichung $x^2 \cdot (x - 1) \cdot e^x = 0$ ist genau dann erfüllt, wenn

- $x^2 = 0$ $\quad(\Rightarrow x = 0)$ *oder*
- $x - 1 = 0$ $\quad(\Rightarrow x = 1)$ *oder*
- $e^x = 0$ $\quad$(keine Lösung).

Die Lösungsmenge dieser Gleichung lautet daher $L = \{0, 1\}$.

Nullstellen eines Produkts

Achtung

Wenn ein Polynom bereits als Produkt zweier oder mehrerer Faktoren vorliegt, dann sollte man der Versuchung widerstehen, dieses Produkt auszumultiplizieren.

Die Nullstellen von

$$(x - 1) \cdot (x + 2) \cdot (x - 3) = 0$$

sind offensichtlich, jene von

$$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$$

hingegen nicht.

Aufgabe 3.6

Berechnen Sie die Nullstellen und zerlegen Sie in Linearfaktoren:

(a) $f(x) = x^2 + 4x + 3$

(b) $f(x) = 3x^2 - 9x + 2$

(c) $f(x) = x^3 - x$

(d) $f(x) = x^3 - 2x^2 + x$

(e) $f(x) = (x^2 - 1)(x - 1)^2$

Lösung 3.6

(a) $(x + 1)(x + 3)$;
(b) $3\left(x - \frac{9+\sqrt{57}}{6}\right)\left(x - \frac{9-\sqrt{57}}{6}\right)$
(c) $x(x + 1)(x - 1)$;
(d) $x(x + 1)^2$;
(e) $(x + 1)(x - 1)^3$.

Aufgabe 3.7

Lösen Sie nach y und nach x auf:

(a) $xy + x - y = 0$

(b) $3xy + 2x - 4y = 1$

(c) $x^2 - y^2 + x + y = 0$

(d) $x^2y + xy^2 - x - y = 0$

(e) $x^2 + y^2 + 2xy = 4$

(f) $9x^2 + y^2 + 6xy = 25$

(g) $4x^2 + 9y^2 = 36$

(h) $4x^2 - 9y^2 = 36$

(i) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$

Lösung 3.7

Die meisten Lösungen erhalten wir durch Einsetzen in die Formel für quadratische Gleichungen oder durch Umformen (Faktorisieren) der Gleichungen (in eckigen Klammern [...]).
(a) $x = \frac{y}{y+1}$, $y = \frac{x}{1-x}$, $[x(y+1) = y$ bzw. $y(x-1) = -x]$;
(b) $x = \frac{4y+1}{3y+2}$, $y = \frac{1-2x}{3x-4}$, $[x(3y+2) = 1+4y$ bzw. $y(3x-4) = 1-2x]$;
(c) $x = y-1$ und $x = -y$, bzw. $y = x+1$ und $y = -x$, $[(x-y+1)(x+y) = 0]$;
(d) $x = -y$ und $x = \frac{1}{y}$, bzw. $y = -x$ und $y = \frac{1}{x}$, $[(x+y)\cdot(xy-1) = 0]$;
(e) $x = 2-y$ und $x = -2-y$, bzw. $y = 2-x$ und $y = -2-x$, $[(x+y)^2 = 4]$;
(f) $x = -\frac{1}{3}y + \frac{5}{3}$ und $x = -\frac{1}{3}y - \frac{5}{3}$, bzw. $y = 5-3x$ und $y = -5-3x$, $[(3x+y)^2 = 25]$;

Lösung 3.7 / 2

(g) $x = \pm\frac{3}{2}\sqrt{4-y^2}$, $y = \pm\frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}$;
(h) $x = \pm\frac{3}{2}\sqrt{4+y^2}$, $y = \pm\frac{2}{3}\sqrt{x^2-9}$;
(i) $x = y - 2\sqrt{y} + 1$, $y = x - 2\sqrt{x} + 1$.

Aufgabe 3.8

Lösen Sie nach y und nach x auf:

(a) $xy^2 + yx^2 = 6$

(b) $xy^2 + (x^2-1)y - x = 0$

(c) $\frac{x}{x+y} = \frac{y}{x-y}$

(d) $\frac{y}{y+x} = \frac{y-x}{y+x^2}$

(e) $\frac{1}{y-1} = \frac{y+x}{2y+1}$

(f) $\frac{yx}{y+x} = \frac{1}{y}$

(g) $(y+2x)^2 = \frac{1}{1+x} + 4x^2$

(h) $y^2 - 3xy + (2x^2 + x - 1) = 0$

(i) $\frac{y}{x+2y} = \frac{2x}{x+y}$

Lösung 3.8

Die meisten Lösungen erhalten wir durch Umformen der Gleichungen und Einsetzen in die Formel für quadratische Gleichungen In eckigen Klammern [...] stehen Ausdrücke, die durch Umformungen (Faktorisieren) erhalten werden können.
(a) $x = -\frac{1}{2}\,y \pm \frac{1}{2y}\sqrt{y^4 + 24\,y}$, $y = -\frac{1}{2}\,x \pm \frac{1}{2x}\sqrt{x^4 + 24\,x}$;
(b) $x = -y$ und $x = \frac{1}{y}$, bzw. $y = -x$ und $y = \frac{1}{x}$,
$[(x+y)\cdot(xy-1) = 0]$;
(c) $x = (1 \pm \sqrt{2})y$, $y = \frac{1}{1\pm\sqrt{2}}x$, $[x^2 - 2xy - y^2 = 0]$;
(d) $x \in \mathbb{R} \setminus \{-y, \pm\sqrt{-y}\}$ beliebig falls $y = -1$ und $x = 0$ sonst,
$y \in \mathbb{R} \setminus \{-x, -x^2\}$ beliebig falls $x = 0$ und $y = -1$ sonst,
$[x^2(1+y) = 0]$;
(e) $x = \frac{1+3y-y^2}{y-1}$, $y = \frac{1}{2}(3-x) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(x-3)^2 + 4(x+1)}$,
$[y^2 - 3\,y + x\,y - x - 1 = 0]$;
(f) $x = \frac{y}{y^2-1}$, $y = \frac{1\pm\sqrt{1+4x^2}}{2x}$, $[x(y^2-1) = y$ bzw. $xy^2 - y - x = 0]$;

Lösung 3.8 / 2

(g) $x = -\frac{1}{8}(y+4) \pm \sqrt{\frac{1}{64}(y+4)^2 - \frac{1}{4}\left(y + \frac{1}{y}\right)}$,
$y = -2x \pm \sqrt{4x^2 + \frac{1}{x+1}}$,
$[4x^2y + 4xy + xy^2 + y^2 - 1 = 0]$;
(h) $x = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}$ und $x = y - 1$, bzw. $y = 2x - 1$ und $y = y + 1$,
$[(2x - y - 1)\cdot(x - y + 1) = 0]$;
(i) $x = \frac{-3+\sqrt{17}}{4}y$ und $x = \frac{-3-\sqrt{17}}{4}y$, bzw. $y = \frac{3+\sqrt{17}}{2}x$ und
$y = \frac{3-\sqrt{17}}{2}x$,
$[2x^2 + 3xy - y^2 = 0]$.

Ungleichungen

Eine **Ungleichung** erhalten wir durch Vergleichen zweier Terme mit einem der Ungleichheitszeichen $\leq$, $<$, $>$ oder $\geq$.

linke Seite $\leq$ rechte Seite

Die **Lösungsmenge** einer Ungleichung ist die Menge aller Zahlen aus dem Definitionsbereich die die Ungleichung erfüllen.
Sie besteht — im Gegensatz zu Gleichungen — meist aus einem Intervall oder der Vereinigung von Intervallen.

Äquivalenzumformungen

Zum Lösen einer Ungleichung versuchen wir diese zu *vereinfachen*. Idealerweise wird dabei die gesuchte Größe auf einer Seite *isoliert*.

Achtung
Beim *Multiplizieren* mit einer **negativen** Zahl dreht sich die Richtung des *Ungleichheitszeichens* um.

Fallunterscheidung bei Multiplikation (Division) mit einem Term:

- Term ist **größer** Null:
  Das Ungleichheitszeichen dreht sich *nicht um*.
- Term ist **kleiner** Null:
  Das Ungleichheitszeichen dreht sich *um*.
- Term ist **gleich** Null:
  Die Multiplikation oder Division ist *nicht erlaubt*!

Äquivalenzumformungen

Wir suchen die Lösung von $\frac{2x-1}{x-2} \leq 1$.

Wir multiplizieren mit die Ungleichung mit $(x-2)$.

- Fall $x-2>0 \Leftrightarrow x>2$:
  Wir erhalten $2x-1 \leq x-2 \Leftrightarrow x \leq -1$,
  ein Widerspruch zur Annahme $x>2$.
- Fall $x-2<0 \Leftrightarrow x<2$:
  Das Ungleichheitszeichen dreht sich um.
  Daher ist $2x-1 \geq x-2 \Leftrightarrow x \geq -1$.
  Also $x<2$ und $x \geq -1$.
- Fall $x-2=0 \Leftrightarrow x=2$:
  Liegt nicht im Definitionsbereich.

Die Lösungsmenge ist daher das Intervall $L=[-1,2)$.

Fehlerquelle

Polynomungleichungen lassen sich nicht einfach durch Äquivalenzumformungen lösen.

Man **darf auch nicht** einfach das „=“-Zeichen in der Lösungsformel der quadratischen Gleichung durch das Ungleichheitszeichens ersetzen!

Wir suchen die Lösung von

$$x^2-3x+2 \leq 0$$

Falsche Lösung: $x_{1,2} \leq \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}-2} = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}$

und somit $x \leq 1$ (und damit auch $x \leq 2$).

0 ist zwar kleiner als 1 (oder 2),
erfüllt aber trotzdem nicht die Ungleichung!

Polynomungleichung

1. **1.** Wir bringen alle Terme auf die linke Seite und erhalten einen Ausdruck der Form $T(x) \leq 0$ (bzw. $T(x) < 0$).
2. **2.** Wir bestimmen alle Nullstellen $x_1 < \ldots < x_k$ von $T(x)$. D.h., wir lösen die Gleichung $T(x) = 0$.
3. **3.** Diese Nullstellen zerlegen den *Definitionsbereich* in Intervalle I_j. Im Falle von **echten** Ungleichungen (mit $<$ oder $>$) sind diese Intervalle sind **offen**, andernfalls abgeschlossen.

   In jedem dieser Intervalle ist nun die Ungleichung **entweder** *überall* **oder** in *keinem* einzigen Punkt erfüllt.
4. **4.** Wir wählen einen Punkt $z_j \in I_j$ aus, der *nicht* am Rand liegt. Ist die (strikte) Ungleichung in z_j erfüllt, so ist sie im gesamten Intervall I_j erfüllt, andernfalls nicht.

Polynomungleichung

Wir suchen (noch einmal) die Lösung von

$$x^2 - 3\,x + 2 \leq 0$$

Der Definitionsbereich ist $\mathbb{R}$.

Die Lösungen von $x^2 - 3\,x + 2 = 0$ sind $x_1 = 1$ und $x_2 = 2$.

Wir erhalten drei Intervalle und überprüfen anhand dreier Punkte, ob die Ungleichung in den einzelnen Intervallen erfüllt ist:

$(-\infty, 1]$	nicht erfüllt:	$0^2 - 3 \cdot 0 + 2 = 2 \not\leq 0$
$[1, 2]$	erfüllt:	$\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 3 \cdot \frac{3}{2} + 2 = -\frac{1}{4} < 0$
$[2, \infty)$	nicht erfüllt:	$3^2 - 3 \cdot 3 + 2 = 2 \not\leq 0$

Die Lösungsmenge lautet daher $L = [1, 2]$.

Stetige Terme

Dieses Verfahren funktioniert in Prinzip auch für andere Ungleichungen, wenn alle beteiligten Terme **stetig** sind.

Enthält der Term $T(x)$ Unstetigkeitsstellen, so müssen wir diese im Punkt 3 bei der Zerlegung des Definitionsbereichs in Intervalle berücksichtigen.

Es muss eventuell auch berücksichtigt werden, dass der Definitionsbereich der Ungleichung aus der Vereinigung disjunkte Intervalle und Punkten besteht.

Stetige Terme

Wir suchen die Lösung von

$$\frac{x^2 + x - 3}{x - 2} \geq 1$$

Die Definitionsmenge besteht aus zwei Intervallen: $(-\infty, 2) \cup (2, \infty)$.

Die Lösung von $\frac{x^2 + x - 3}{x - 2} = 1$ erhalten wir durch

$$\frac{x^2 + x - 3}{x - 2} = 1 \;\Leftrightarrow\; x^2 + x - 3 = x - 2 \;\Leftrightarrow\; x^2 - 1 = 0$$

und somit

$$x_1 = -1,\ x_2 = 1$$

Wir erhalten insgesamt vier Intervalle:
$(-\infty, -1]$, $[-1, 1]$, $[1, 2)$ und $(2, \infty)$.

Stetige Terme

Wir überprüfen an hand von vier Punkten, ob die Ungleichung in den einzelnen Intervallen erfüllt ist:

$(-\infty, -1]$	nicht erfüllt:	$\frac{(-2)^2+(-2)-3}{(-2)-2} = \frac{1}{4} \not\geq 1$
$[-1, 1]$	erfüllt:	$\frac{0^2-0-3}{0-2} = \frac{3}{2} > 1$
$[1, 2)$	nicht erfüllt:	$\frac{1{,}5^2+1{,}5-3}{1{,}5-2} = -\frac{3}{2} \not\geq 1$
$(2, \infty)$	erfüllt:	$\frac{3^2+3-3}{3-2} = 9 > 1$

Die Lösungsmenge lautet daher $L = [-1, 1] \cup (2, \infty)$.

Betragsungleichung

Ungleichungen mit **Absolutbeträgen** lassen sich ebenfalls nach dem oben beschriebenen Verfahren lösen.

Wir können aber eine Betragsungleichung auch lesen als eine Abkürzung für zwei Ungleichungen:

$|x| < 1 \quad \Leftrightarrow \quad x < 1$ und $x > -1$

$|x| > 1 \quad \Leftrightarrow \quad x > 1$ oder $x < -1$

Aufgabe 3.9

Lösen Sie folgende Ungleichungen:

(a) $x^3 - 2x^2 - 3x \geq 0$

(b) $x^3 - 2x^2 - 3x > 0$

(c) $x^2 - 2x + 1 \leq 0$

(d) $x^2 - 2x + 1 \geq 0$

(e) $x^2 - 2x + 6 \leq 1$

Lösung 3.9

(a) $L = [-1, 0] \cup [3, \infty)$;
(b) $L = (-1, 0) \cup (3, \infty)$;
(c) $L = \{1\}$;
(d) $L = \mathbb{R}$;
(e) $L = \emptyset$.

Aufgabe 3.10

Stellen Sie die Lösungsmenge als Vereinigung von Intervallen dar:

(a) $7 \leq |12x + 1|$

(b) $\dfrac{x+4}{x+2} < 2$

(c) $\dfrac{3(4-x)}{x-5} \leq 2$

(d) $25 < (-2x + 3)^2 \leq 50$

(e) $42 \leq |12x + 6| < 72$

(f) $5 \leq \dfrac{(x+4)^2}{|x+4|} \leq 10$

Lösung 3.10

(a) $(-\infty, -\frac{2}{3}] \cup [\frac{1}{2}, \infty)$;
(b) $(-\infty, -2) \cup (0, \infty)$;
(c) $(-\infty, \frac{22}{5}] \cup (5, \infty)$;
(d) $\left[\frac{3}{2} - \sqrt{\frac{25}{2}}, -1\right) \cup \left(4, \frac{3}{2} + \sqrt{\frac{25}{2}}\right]$;
(e) $(-\frac{13}{2}, -4] \cup [3, \frac{11}{2})$;
(f) $[-14, -9] \cup [1, 6]$.

Kapitel 4

Folgen und Reihen

Folgen

Eine **Folge** ist eine Anordnung von reellen Zahlen. Die einzelnen *Zahlen* heißen **Glieder** der Folge.

Formal: Eine **Folge** ist eine *Abbildung*

$$\boxed{a\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R},\ n \mapsto a_n}$$

Folgen werden mit $\langle a_i \rangle_{i=1}^{n}$ oder kurz $\langle a_i \rangle$ bezeichnet.
Auch: $(a_i)_{i=1}^{n}$ bzw. (a_i).

Folgen

Folgen können definiert werden

- durch **Aufzählen** der Glieder,
- durch Angabe eines **Bildungsgesetzes** oder
- durch **Rekursion**.
  Jedes Folgenglied wird durch seine(n) Vorgänger bestimmt.

Aufzählung: $\langle a_i \rangle = \langle 1, 3, 5, 7, 9, \dots \rangle$

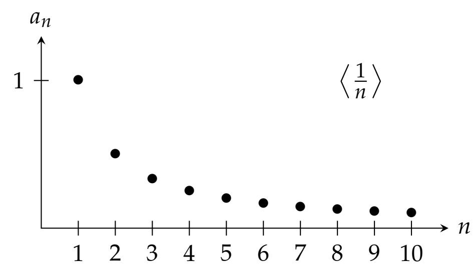
Bildungsgesetz: $\langle a_i \rangle = \langle 2\,i - 1 \rangle$

Rekursion: $\langle a_i \rangle$, $a_1 = 1$, $a_{i+1} = a_i + 2$

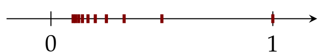
Graphische Darstellung

Eine Folge $\langle a_i \rangle$ kann graphisch dargestellt werden, indem man

(1) die einzelnen Folgenglieder in der Zahlengerade aufträgt, oder



(2) die Zahlenpaare (n, a_n) in der Zahlenebene einzeichnet.



Eigenschaften

Charakteristische Eigenschaften von Folgen $\langle a_i \rangle$:

Bezeichnung	Definition	
monoton steigend	$a_{i+1} \geq a_i$	für alle $i \in \mathbb{N}$
monoton fallend	$a_{i+1} \leq a_i$	
alternierend	$a_{i+1} \cdot a_i < 0$,	d.h. das Vorzeichen wechselt.
beschränkt	$\lvert a_i \rvert \leq M$,	für ein $M \in \mathbb{R}$.

Die Folge $\langle \frac{1}{n} \rangle$ ist

- monoton fallend, und
- beschränkt, da für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, dass $\lvert a_n \rvert = \lvert 1/n \rvert \leq 1$ gilt.
  (Wir hätten auch $M = 1000$ wählen können.)
- Sie ist aber *nicht* alternierend.

Reihen

Die Summe der ersten k Elemente der $\langle a_i \rangle$

$$s_k = \sum_{i=1}^{k} a_i$$

heißt die k-te **Teilsumme** (oder **Partialsumme**) der *Folge*

Die Folge $\langle s_k \rangle$ aller Teilsummen einer Folge $\langle a_i \rangle$ heißt die **Reihe** der Folge $\langle a_i \rangle$.

Die Reihe der Folge $\langle a_i \rangle = \langle 2\,i - 1 \rangle$ lautet

$$\langle s_k \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{k} (2\,i - 1) \right\rangle = \langle 1, 4, 9, 16, 25, \ldots \rangle = \langle k^2 \rangle.$$

Aufgabe 4.1

Berechne die ersten fünf Partialsummen der Folgen und stellen Sie diese graphisch dar:

(a) $2n$

(b) $\frac{1}{2+n}$

(c) $2^{n/10}$

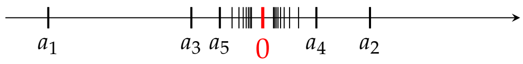
Lösung 4.1

(a) $\langle 2, 6, 12, 20, 30 \rangle$;
(b) $\langle 0{,}333; 0{,}583; 0{,}783; 0{,}95; 1{,}093 \rangle$;
(c) $\langle 1{,}072; 2{,}220; 3{,}452; 4{,}771; 6{,}185 \rangle$.

Grenzwert einer Folge

Betrachten wir die Folge von Zahlen

$$(a_n)_{n=1}^{\infty} = \left((-1)^n \tfrac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty} = (-1, \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{4}, -\tfrac{1}{5}, \tfrac{1}{6}, \dots)$$



Die Folgenglieder *„streben"* mit wachsendem n gegen 0.
Wir sagen, die Folge (a_n) **konvergiert** gegen 0.

Wir schreiben dafür

$$\boxed{(a_n) \to 0 \quad \text{oder} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = 0}$$

Grenzwert einer Folge / Definition

Definition:
Eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ heißt **Grenzwert** (Limes) einer Folge (a_n), wenn es für jedes noch so kleine Intervall $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ ein N gibt, sodass $a_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ für alle $n \geq N$.
M.a.W.: alle Folgenglieder ab a_N liegen im Intervall.

Äquivalente Formulierung:
Eine Folge (a_n) konvergiert gegen den Grenzwert $a \in \mathbb{R}$, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein N existiert, sodass $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$.

[Mathematiker verwenden gerne ε für eine ganz kleine positive Zahl.]

Eine Folge, die einen Grenzwert besitzt, heißt **konvergent**.
Sie **konvergiert** gegen ihren Grenzwert.

Nicht jede Folge besitzt einen Grenzwert.
So eine Folge heißt **divergent**.

Grenzwert / Beispiel

Im Beispiel

$$(a_n)_{n=1}^{\infty} = \left((-1)^n \tfrac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty} = (-1, \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{4}, -\tfrac{1}{5}, \tfrac{1}{6}, \dots)$$

ist $a = 0$.

Falls $\varepsilon = 0{,}3$ dann liegen alle Folgenglieder ab a_4 im Intervall $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$.

Falls $\varepsilon = \frac{1}{1\,000\,000}$ dann liegen alle Folgenglieder ab dem 1 000 001-ten Glied in diesem Intervall.

Daher

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0\,.$$

Grenzwert / Beispiele

Die Folge $(a_n)_{n=1}^{\infty} = (\frac{1}{2^n})_{n=1}^{\infty} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots)$ konvergiert gegen 0:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

Die Folge $(b_n)_{n=1}^{\infty} = (\frac{n-1}{n+1})_{n=1}^{\infty} = (0, \frac{1}{3}, \frac{2}{4}, \frac{3}{5}, \frac{4}{6}, \frac{5}{7}, \dots)$ ist konvergent:

$$\lim_{n\to\infty} b_n = 1$$

Die Folge $(c_n)_{n=1}^{\infty} = ((-1)^n)_{n=1}^{\infty} = (-1, 1, -1, 1, -1, 1, \dots)$ ist divergent.

Die Folge $(d_n)_{n=1}^{\infty} = (2^n)_{n=1}^{\infty} = (2, 4, 8, 16, 32, \dots)$ ist divergent, strebt aber gegen ∞. Man schreibt daher (nicht ganz korrekt):

$$\lim_{n\to\infty} d_n = \infty$$

Grenzwerte wichtiger Folgen

$$\lim_{n\to\infty} n^a = \begin{cases} 0 & \text{für } a < 0 \\ 1 & \text{für } a = 0 \\ \infty & \text{für } a > 0 \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 0 & \text{für } |q| < 1 \\ 1 & \text{für } q = 1 \\ \infty & \text{für } q > 1 \\ \nexists & \text{für } q \leq -1 \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^a}{q^n} = \begin{cases} 0 & \text{für } |q| > 1 \\ \infty & \text{für } 0 < q < 1 \\ \nexists & \text{für } -1 < q < 0 \end{cases} \qquad (|q| \notin \{0, 1\})$$

Rechenregeln

Seien $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ und $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergente Folgen mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$; und $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ eine beschränkte Folge.

$$\begin{array}{lll}
(1) & \lim\limits_{n\to\infty} (k \cdot a_n + d) = k \cdot a + d & \\
(2) & \lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b & \\
(3) & \lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b & \\
(4) & \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{a}{b} & \text{für } b \neq 0 \\
(5) & \lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot c_n) = 0 & \text{falls } a = 0 \\
(6) & \lim\limits_{n\to\infty} a_n^k = a^k &
\end{array}$$

Rechenregeln / Beispiele

$$\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{3}{n^2}\right) = 2+3\underbrace{\lim_{n\to\infty} n^{-2}}_{=0} = 2+3\cdot 0 = 2$$

$$\lim_{n\to\infty}(2^{-n}\cdot n^{-1}) = \lim_{n\to\infty}\frac{n^{-1}}{2^n} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{2-\frac{3}{n^2}} = \frac{\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})}{\lim_{n\to\infty}(2-\frac{3}{n^2})} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\underbrace{\sin(n)}_{\text{beschränkt}}\cdot\underbrace{\frac{1}{n^2}}_{\to 0} = 0$$

Rechenregeln

Achtung
Wir müssen beim Anwenden dieser Rechenregeln darauf achten, dass wir keine Ausdrücke der Form $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$ oder $0\cdot\infty$ erhalten.

Diese Ausdrücke sind **nicht definiert**!

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+1}{n^2-1} = \frac{\lim_{n\to\infty} n^2+1}{\lim_{n\to\infty} n^2-1} = \frac{\infty}{\infty} \quad \text{(nicht definiert)}$$

Trick: Kürzen durch die *höchste vorkommende Potenz* im **Nenner**.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+1}{n^2-1} = \lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{n^2}}{\cancel{n^2}}\cdot\frac{1+n^{-2}}{1-n^{-2}} = \frac{\lim_{n\to\infty} 1+n^{-2}}{\lim_{n\to\infty} 1-n^{-2}} = \frac{1}{1} = 1$$

Die Eulersche Zahl

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e = 2{,}7182818284590\ldots}$$

Dieser Grenzwert ist in der Finanzmathematik wichtig (stetige Verzinsung).

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n &= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n/x}\right)^n \\
&= \lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{mx} && \left(m=\frac{n}{x}\right) \\
&= \left(\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m\right)^x = e^x
\end{aligned}$$

Aufgabe 4.2

Berechne die folgenden Grenzwerte:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(7+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right) =$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n^3-6n^2+3n-1}{7n^3-16}\right) =$

(c) $\lim_{n\to\infty}\left(n^2-(-1)^n n^3\right) =$

(d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+1}{n+1}\right) =$

(e) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n \bmod 10}{(-2)^n}\right) =$

Lösung 4.2

(a) 7;
(b) $\frac{2}{7}$;
(c) unbestimmt divergent;
(d) bestimmt divergent gegen ∞;
(e) 0.

Aufgabe 4.3

Bestimme die folgenden Grenzwerte:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{nx} =$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n =$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{nx}\right)^n =$

Lösung 4.3

(a) e^x;
(b) e^x;
(c) $e^{1/x}$.

Arithmetische Folge

Bildungsgesetz:

$$\boxed{a_n = a_1 + (n-1) \cdot d}$$

Differenz aufeinander folgender Glieder ist konstant:

$$\boxed{a_{n+1} - a_n = d}$$

Jedes Glied ist das *arithmetische Mittel* seiner Nachbarglieder:

$$\boxed{a_n = \tfrac{1}{2}(a_{n+1} + a_{n-1})}$$

Arithmetische Reihe:

$$\boxed{s_n = \tfrac{n}{2}(a_1 + a_n)}$$

Geometrische Folge

Bildungsgesetz:

$$\boxed{a_n = a_1 \cdot q^{n-1}}$$

Quotient aufeinander folgender Glieder ist konstant:

$$\boxed{\frac{a_{n+1}}{a_n} = q}$$

Jedes Glied ist das *geometrische Mittel* seiner Nachbarglieder:

$$\boxed{a_n = \sqrt{a_{n+1} \cdot a_{n-1}}}$$

Geometrische Reihe:

$$\boxed{s_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \qquad \text{für } q \neq 1}$$

Fehlerquelle

Es ist manchmal üblich, bei Folgen und Reihen bei 0 anstatt bei 1 zu zählen zu beginnen.
Bildungsgesetze und Summenformel für die arithmetische Folge lauten dann

$$a_n = a_0 + n \cdot d \qquad \text{bzw.} \qquad s_n = \tfrac{n+1}{2}(a_0 + a_n)$$

und für die geometrische Folge

$$a_n = a_0 \cdot q^n \qquad \text{bzw.} \qquad s_n = a_0 \cdot \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} \quad (\text{für } q \neq 1)$$

Aufgabe 4.4

$\langle a_n \rangle$ sei eine geometrische Folge mit $a_1 = 2$ und relativer Zuwachsrate $0{,}1$. Wie lautet das Bildungsgesetz von $\langle a_n \rangle$ und wie lautet a_7?

Lösung 4.4

$a_n = 2 \cdot 1{,}1^{n-1}$;
$a_7 = 3{,}543$.

Aufgabe 4.5

Berechnen Sie die ersten 10 Partialsummen der arithmetischen Reihe für

(a) $a_1 = 0$ und $d = 1$,

(b) $a_1 = 1$ und $d = 2$.

Lösung 4.5

(a) $\langle s_n \rangle = \left\langle \frac{n(n-1)}{2} \right\rangle = \langle 0, 1, 3, \dots, 45 \rangle$;
(b) $\langle s_n \rangle = \langle n^2 \rangle = \langle 1, 4, 9, \dots, 100 \rangle$.

Aufgabe 4.6

Berechne $\sum_{n=1}^{N} a_n$ für

(a) $N = 7$ und $a_n = 3^{n-2}$

(b) $N = 7$ und $a_n = 2(-1/4)^n$

Lösung 4.6

(a) $s_7 = \frac{1}{3} \cdot \frac{3^7-1}{3-1} = 364{,}33$;
(b) $s_7 = -\frac{1}{2} \cdot \frac{(-1/4)^7-1}{-1/4-1} = -0{,}400$.

Endwert (nachschüssig)

Eine Zahlung, die in gleicher Höhe in regelmäßigen Abständen erfolgt, heißt eine **Rente**.

Wird die Rente jeweils zum Ende einer Periode bezahlt, so heißt sie **nachschüssig**

Der **Endwert** ist die Summe aller Zahlungen auf den *Endzeitpunkt* der Rente *aufgezinst*:

$$E_n = \underbrace{R \cdot q^{n-1}}_{\text{erste Zahlung}} + \underbrace{R \cdot q^{n-2}}_{\text{zweite Zahlung}} + \dots + \underbrace{R \cdot q^0}_{\text{letzte Zahlung}}$$
$$= \sum_{k=1}^{n} R q^{k-1} = R \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

wobei R die Rente, q der Aufzinsungsfaktor und n die Anzahl der Zahlungen ist.

Barwert (nachschüssig)

Der **Barwert** die Summe aller Rentenzahlungen auf den *Beginn* der Rente *abgezinst*.

$$\boxed{B_n = \frac{E_n}{q^n} = R \cdot \frac{q^n - 1}{q^n (q - 1)}}$$

wobei R die Rente, q der Aufzinsungsfaktor und n die Anzahl der Zahlungen ist.

Aufgabe 4.7

Die **ewige Rente** wird *unendlich* oft (und lang) gezahlt.
Ihr Endwert ist immer unendlich.

Berechne ihren Barwert.

(Wir nehmen hier – wie vor der Finanzkrise üblich – an, dass der Zinssatz positiv ist.)

Lösung 4.7

Grenzwert: $B_\infty = \lim_{n\to\infty} B_n = \lim_{n\to\infty} R \cdot \frac{q^n-1}{q^n(q-1)} = \frac{R}{q-1}$.

Aufgabe 4.8

Bei der Tilgung von Darlehen muss der Barwert der Tilgungszahlungen der ursprünglichen Darlehenssumme entsprechen.

Berechne die Tilgungsraten X eines Kredits bei konstanten Rückzahlungsraten.
Dabei sei K die Kredithöhe, p der Zinssatz, und n die Laufzeit des Kredits (Anzahl der Zahlungen).

Lösung 4.8

$K = B_n = X \cdot \frac{q^n - 1}{q^n(q-1)}$ impliziert $X = K \cdot q^n \frac{q-1}{q^n - 1}$.

Aufgabe 4.9

Berechne bei gegebener Kredithöhe K, Zinssatz p und maximaler Tilgungszahlung X die Mindestlaufzeit n des Kredits.

Lösung 4.9

$n = \frac{\ln X - \ln(X - K(q-1))}{\ln q}$. Achtung: es muss immer aufgerundet werden.

Kapitel 5

Reelle Funktionen

Reelle Funktion

Reelle Funktionen sind Abbildungen, in denen sowohl die *Definitionsmenge* als auch die *Wertemenge* Teilmengen von $\mathbb{R}$ (üblicherweise Intervalle) sind.

Bei reellen Funktionen wird meist weder Definitionsmenge noch Wertemenge angegeben. In diesem Fall gilt:

- Die *Definitionsmenge* ist die größtmögliche *sinnvolle* Teilmenge von $\mathbb{R}$, in der die Zuordnungsvorschrift definiert ist.
- Die *Wertemenge* ist die **Bildmenge**

$$f(D) = \{y \mid y = f(x) \text{ für ein } x \in D_f\} .$$

Beispiel

Die Produktionsfunktion $f(x) = \sqrt{x}$ ist eine Abkürzung für

$$f\colon [0,\infty) \to [0,\infty),\ x \mapsto f(x) = \sqrt{x}$$

(Es gibt keine „negativen“ Produktionsmengen.
Außerdem ist $\sqrt{x}$ für $x < 0$ nicht reell!)

Die abgeleitete Funktion $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ ist eine Abkürzung für

$$f'\colon (0,\infty) \to (0,\infty),\ x \mapsto f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

(Beachten sie das offene Intervall $(0,\infty)$.
$\frac{1}{2\sqrt{x}}$ ist für $x = 0$ nicht definiert!)

Aufgabe 5.1

Was ist der größtmögliche Definitionsbereich einer reellen Funktion mit dem angegeben Funktionsterm?

(a) $h(x) = \frac{x-1}{x-2}$

(b) $D(p) = \frac{2p+3}{p-1}$

(c) $f(x) = \sqrt{x-2}$

(d) $g(t) = \frac{1}{\sqrt{2t-3}}$

(e) $f(x) = 2 - \sqrt{9-x^2}$

(f) $f(x) = 1 - x^3$

(g) $f(x) = 2 - |x|$

(h) $f(x) = \frac{|x-3|}{x-3}$

(i) $f(x) = \ln(1+x)$

(j) $f(x) = \ln(1+x^2)$

Aufgabe 5.1 / 2

(k) $f(x) = \ln(1-x^2)$

(l) $f(x) = \exp(-x^2)$

(m) $f(x) = (e^x - 1)/x$

Lösung 5.1

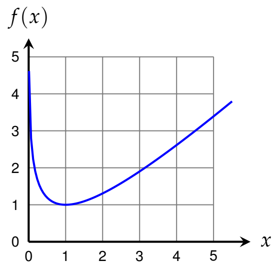
(a) $D_h = \mathbb{R} \setminus \{2\}$;
(b) $D_D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$;
(c) $D_f = [2, \infty)$;
(d) $D_g = (\frac{3}{2}, \infty)$;
(e) $D_f = [-3, 3]$;
(f) $D_f = \mathbb{R}$;
(g) $D_f = \mathbb{R}$;
(h) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{3\}$;
(i) $D_f = (-1, \infty)$;
(j) $D_f = \mathbb{R}$;
(k) $D_f = (-1, 1)$;
(l) $D_f = \mathbb{R}$;
(m) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Graph einer Funktion

Jedem Paar $(x, f(x))$ entspricht ein Punkt in der xy-Ebene. Die Menge aller dieser Punkte bildet eine Kurve und heißt **Graph** der Funktion.

$$\mathcal{G}_f = \{(x, y) \mid y = f(x) \text{ für ein } x \in D_f\}$$

Wir können Funktionen mit Hilfe des Graphen veranschaulichen. Viele Eigenschaften von Funktionen lassen sich bereits aus deren Graphen herauslesen.



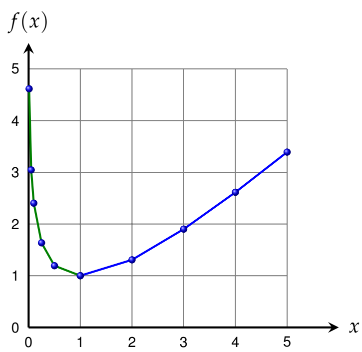
$$f(x) = x - \ln(x)$$

Zeichnen eines Graphen

1. Wir überlegen uns zuerst wie der Graph wahrscheinlich aussehen wird. Graphen von elementaren Funktionen sollten bereits aus dem Gedächtnis skizziert werden können.
2. Wir wählen einen geeigneten Bereich auf der x-Achse aus. (Er sollte einen charakteristischen Ausschnitt zeigen.)
3. Wir erstellen eine Wertetabelle und zeichnen die entsprechenden Zahlenpaare in der xy-Ebene ein.

   Charakteristische Punkte wie etwa lokale Extrema oder Wendepunkte sollten verwendet werden.
4. Wir überprüfen, ob aus den gezeichneten Punkten der Verlauf der Kurve ersichtlich ist. Andernfalls verlängern wir die Wertetabelle um einige geeignete Werte.
5. Die eingezeichneten Punkte werden in geeigneter Weise miteinander verbunden.

Zeichnen eines Graphen



Graph der Funktion

$$f(x) = x - \ln x$$

Wertetabelle:

x	$f(x)$
0	ERROR
1	1
2	1,307
3	1,901
4	2,614
5	3,391
0,5	1,193
0,25	1,636
0,1	2,403
0,05	3,046

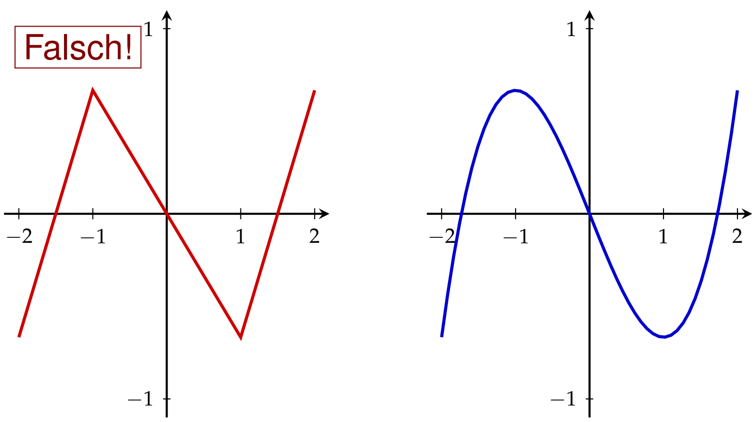
Fehlerquellen

Häufige Fehler beim Zeichnen eines Graphen:

- **Zu kleine Wertetabelle:**
  Aus den gegebenen Daten lässt sich der Kurvenverlauf nicht konstruieren.
- **Ignorieren von wichtigen Punkten:**
  Extrema und Wendepunkte sollten idealerweise bekannt sein („Kurvendiskussion“) und zur Konstruktion benutzt werden.
- **Ungeeigneter Bereich für x und y-Achse:**
  Der Funktionsgraph ist winzig oder wichtige Details verschwinden im „Rauschen“ der Bleistiftstriches.

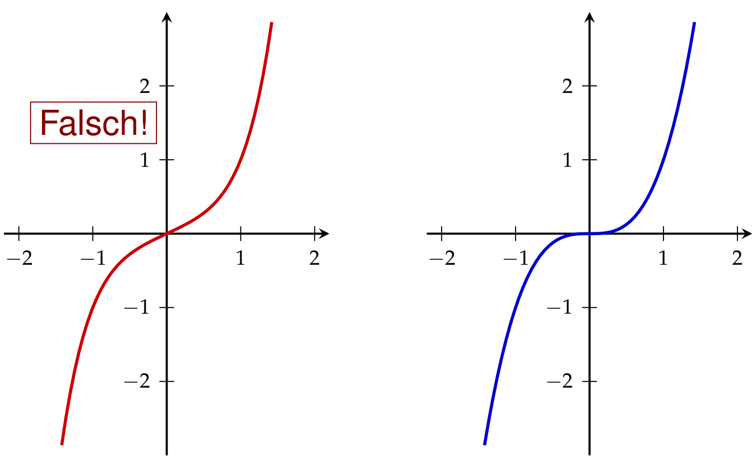
Fehlerquellen

Der Graph der Funktion $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x$ im Intervall $[-2, 2]$:



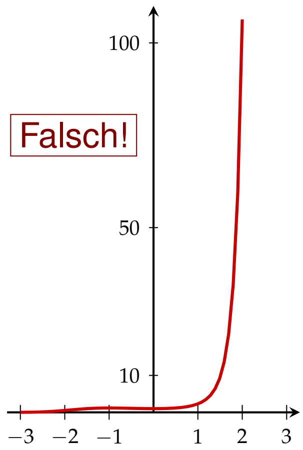
Fehlerquellen

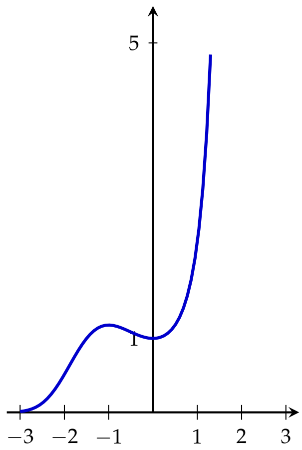
Der Graph von $f(x) = x^3$ hat im Ursprung Anstieg 0:



Fehlerquellen

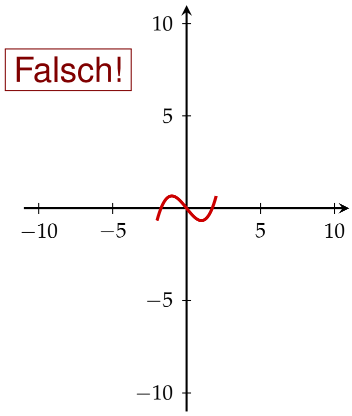
Die Funktion $f(x) = \exp(\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2)$ hat ein lokales Maximum in -1:

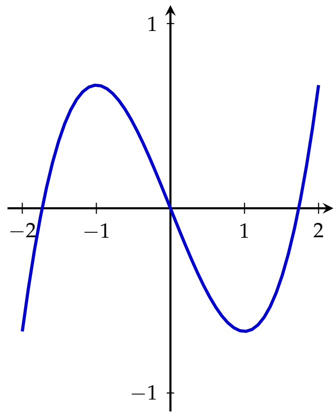




Fehlerquellen

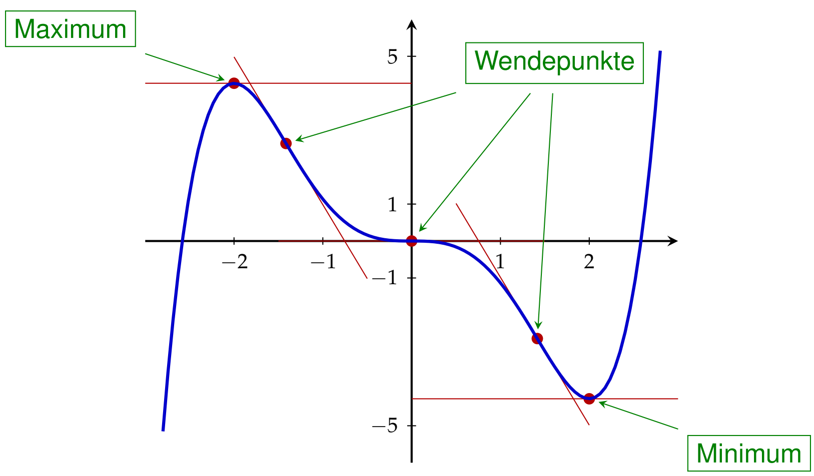
Der Graph der Funktion $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x$ im Intervall $[-2, 2]$:





Extrema und Wendetangenten

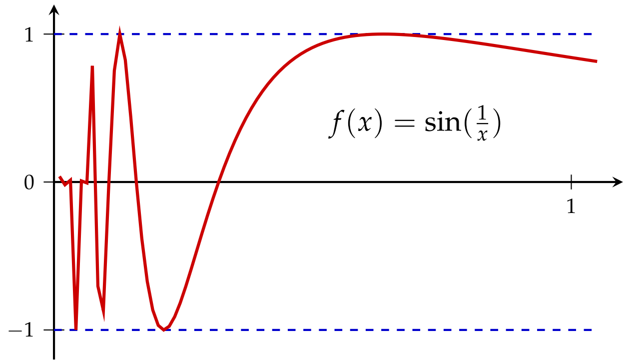
Graph der Funktion $f(x) = \frac{1}{15}(3x^5 - 20x^3)$:



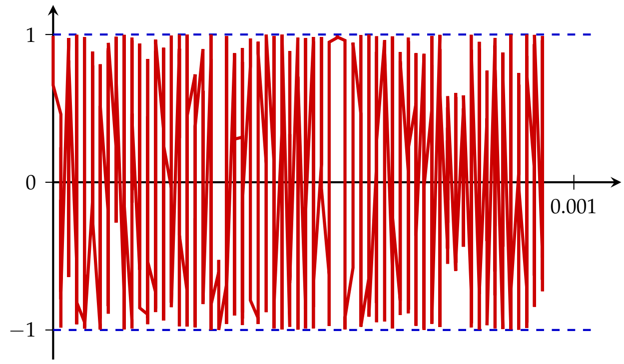
Fehlerquellen

Es sei nochmals auf die Wichtigkeit hingewiesen, sich *zuerst* Gedanken über das mögliche Aussehen des Graphen zu machen.

Im Extremfall kann nämlich auch ein mit Computerhilfe erzeugter Graph wenig mit dem tatsächlichen Graphen gemeinsam haben.



Fehlerquellen



Skizze eines Funktionsgraphs

Bei einer **Skizze** kommt es nicht auf die Genauigkeit der Funktionswerte an, die Skalen an den beiden Achsen werden meist nicht gezeichnet.

Allerdings ist es wichtig, dass die Skizze alle wesentlichen Eigenschaften und Punkte (wie etwa Extrema) der Funktion widerspiegelt.

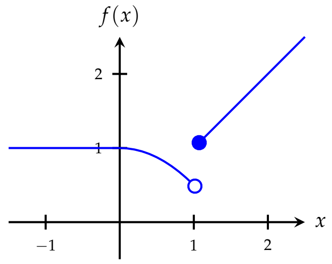
Skizzen können auch so etwas wie eine Karikatur sein: Sie heben die markanten, charakteristischen Eigenschaften der Funktion hervor.

Stückweise definierte Funktionen

Die Zuordnungsvorschrift einer Funktion kann auch in verschiedenen Intervallen des Definitionsbereichs verschieden definiert sein.

An den Intervallgrenzen müssen wir dann kennzeichnen, welche Punkte Bestandteil des Graphen sind:

- $\bullet$ (Bestandteil) und $\circ$ (nicht Bestandteil).



$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{für } x < 0 \\ 1 - \frac{x^2}{2}, & \text{für } 0 \leq x < 1 \\ x, & \text{für } x \geq 1 \end{cases}$$

Aufgabe 5.2

Ordnen Sie die Funktionsterme den Funktionsgraphen $\boxed{1}$ – $\boxed{18}$ zu:

(a) $f(x) = x^2$

(b) $f(x) = \frac{x}{x+1}$

(c) $f(x) = \frac{1}{x+1}$

(d) $f(x) = \sqrt{x}$

(e) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$

(f) $f(x) = \sqrt{|2x - x^2|}$

(g) $f(x) = -x^2 - 2x$

(h) $f(x) = (x^3 - 3x^2 + 2x)\text{sgn}(1 - x) + 1$

(i) $f(x) = e^x$

(j) $f(x) = e^{x/2}$

(k) $f(x) = e^{2x}$

Aufgabe 5.2 / 2

(l) $f(x) = 2^x$

(m) $f(x) = \ln(x)$

(n) $f(x) = \log_{10}(x)$

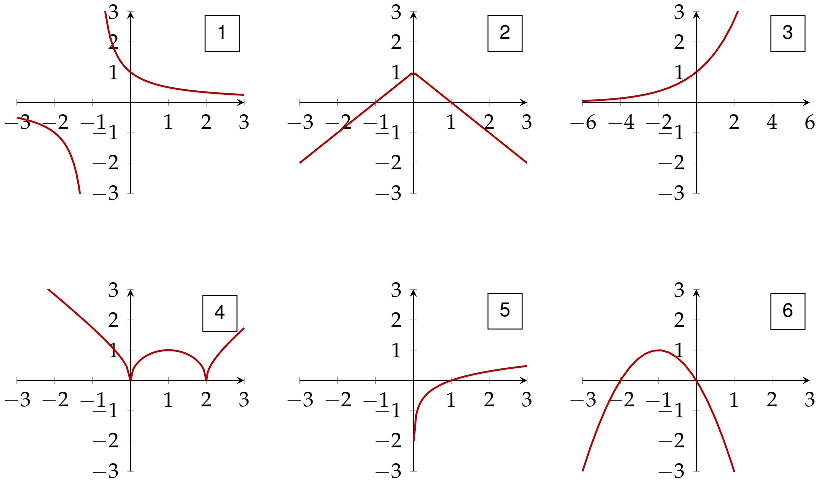
(o) $f(x) = \log_2(x)$

(p) $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$

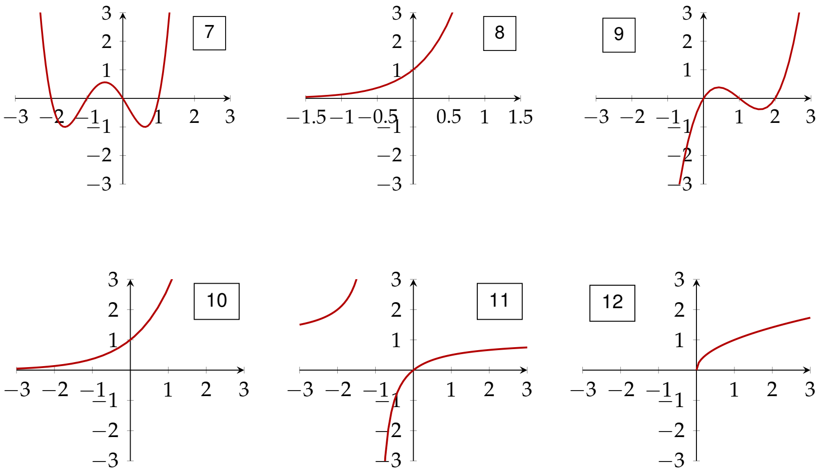
(q) $f(x) = 1 - |x|$

(r) $f(x) = \prod_{k=-1}^{2}(x + k)$

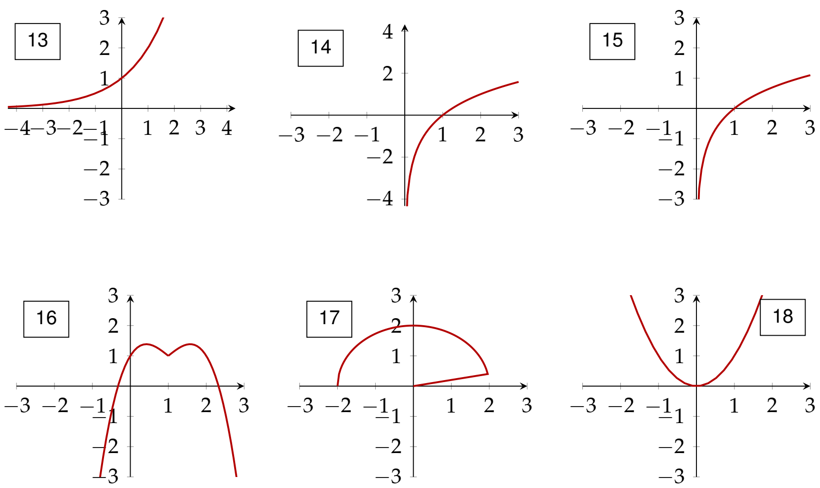
Aufgabe 5.2 / 3



Aufgabe 5.2 / 4



Aufgabe 5.2 / 5



Lösung 5.2

(a) $\boxed{18}$;
(b) $\boxed{11}$;
(c) $\boxed{1}$;
(d) $\boxed{12}$;
(e) $\boxed{9}$;
(f) $\boxed{4}$;
(g) $\boxed{6}$;
(h) $\boxed{16}$;
(i) $\boxed{10}$;
(j) $\boxed{3}$;
(k) $\boxed{8}$;
(l) $\boxed{13}$;
(m) $\boxed{15}$;
(n) $\boxed{5}$;
(o) $\boxed{14}$;
(p) $\boxed{17}$;
(q) $\boxed{2}$;
(r) $\boxed{7}$.

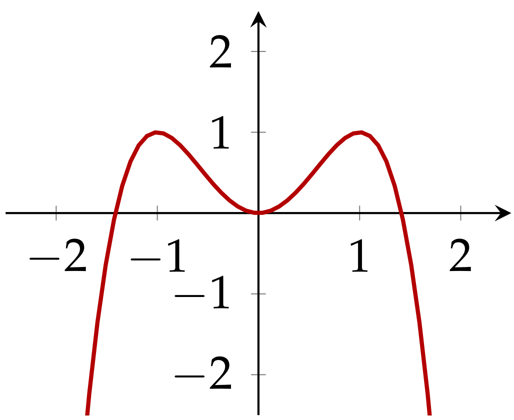
Aufgabe 5.3

Zeichnen Sie den Graphen der Funktion

$$f(x) = -x^4 + 2x^2$$

im Intervall $[-2, 2]$.

Lösung 5.3



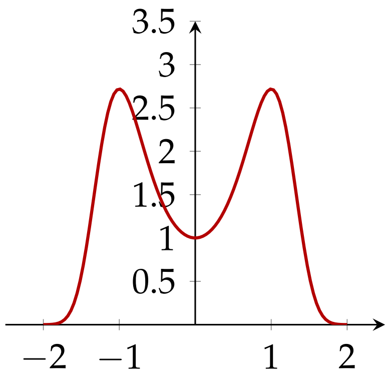
Aufgabe 5.4

Zeichnen Sie den Graphen der Funktion

$$f(x) = e^{-x^4+2x^2}$$

im Intervall $[-2, 2]$.

Lösung 5.4



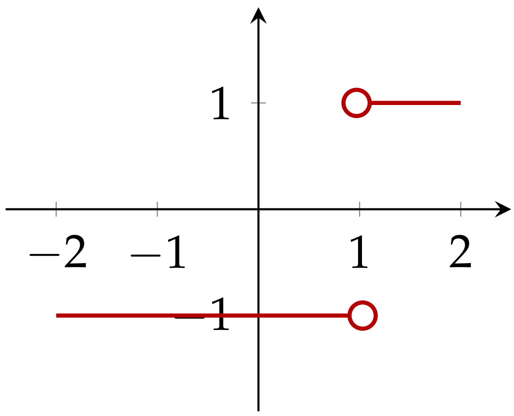
Aufgabe 5.5

Zeichnen Sie den Graphen der Funktion

$$f(x) = \frac{x-1}{|x-1|}$$

im Intervall $[-2, 2]$.

Lösung 5.5



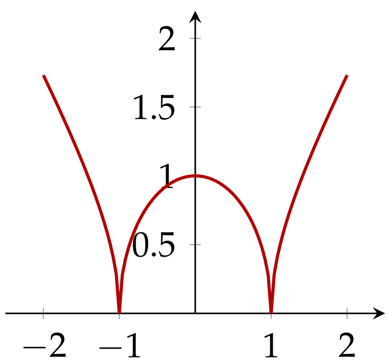
Aufgabe 5.6

Zeichnen Sie den Graphen der Funktion

$$f(x) = \sqrt{|1 - x^2|}$$

im Intervall $[-2, 2]$.

Lösung 5.6



Bijektivität

Jedes Argument besitzt immer genau ein Bild. Die Anzahl der Urbilder eines Elementes $y \in W$ kann jedoch beliebig sein. Wir können daher Funktionen nach der Anzahl der Urbilder einteilen.

- Eine Abbildung f heißt **injektiv**, wenn jedes Element aus der Wertemenge *höchstens* ein Urbild besitzt.
- Sie heißt **surjektiv**, wenn jedes Element aus der Wertemenge *mindestens* ein Urbild besitzt.
- Sie heißt **bijektiv**, wenn sie sowohl injektiv als auch surjektiv ist.

Eine Funktion besitzt genau dann eine *Umkehrfunktion* wenn sie *bijektiv* ist.

Horizontalen-Test

Wie kann man feststellen, ob eine reelle Funktion injektiv / surjektiv ist? Wie viele Urbilder kann ein $y \in W_f$ besitzen?

(1) Wir zeichnen den Graphen der zu untersuchenden Funktion.

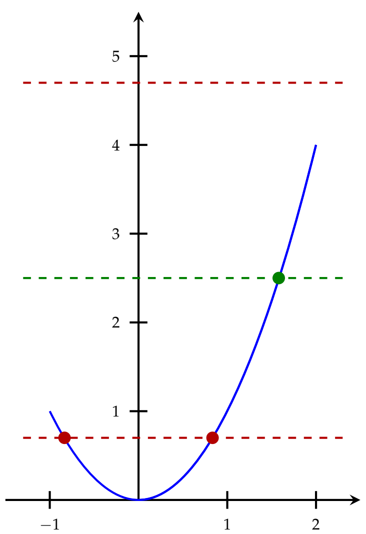
(2) Wir zeichnen ein $y \in W$ auf der y-Achse ein und legen eine Gerade parallel zur x-Achse (Horizontale) durch diesen y-Wert.

(3) Die Anzahl der Schnittpunkte von Horizontale und Graph ist die Anzahl der Urbilder von y.

(4) Wir wiederholen (2) und (3) für eine *repräsentative* Auswahl von y-Werten.

(5) Interpretation: Schneidet jede Horizontale den Graphen in
- **(a)** *höchstens* einem Punkt, so ist f **injektiv**;
- **(b)** *mindestens* einem Punkt, so ist f **surjektiv**;
- **(c)** *genau* einem Punkt, so ist f **bijektiv**.

Beispiel



$f\colon [-1,2] \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$
- ist nicht injektiv;
- ist nicht surjektiv;

$f\colon [0,2] \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$
- ist injektiv;
- ist nicht surjektiv;

$f\colon [0,2] \to [0,4],\ x \mapsto x^2$
- ist bijektiv;

Definitions- und Wertemenge sind Bestandteil der Funktion!

Aufgabe 5.7

Zeichnen Sie die Graphen der folgenden Funktionen und überprüfen Sie, ob Injektivität, Surjektivität oder Bijektivität vorliegt.

(a) $f\colon [-2,2] \to \mathbb{R},\ x \mapsto 2\,x+1$

(b) $f\colon \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{x}$

(c) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^3$

(d) $f\colon [2,6] \to \mathbb{R},\ x \mapsto (x-4)^2-1$

(e) $f\colon [2,6] \to [-1,3],\ x \mapsto (x-4)^2-1$

(f) $f\colon [4,8] \to [-1,15],\ x \mapsto (x-4)^2-1$

Lösung 5.7

(a) injektiv, nicht surjektiv;
(b) injektiv, nicht surjektiv;
(c) bijektiv;
(d) nicht injektiv, nicht surjektiv;
(e) nicht injektiv, surjektiv;
(f) bijektiv.
Beachten Sie, dass Definitions- und Wertemenge Bestandteil der Funktion sind.

Die zusammengesetzte Funktion

Seien $f\colon D_f \to W_f$ und $g\colon D_g \to W_g$ Funktionen mit $W_f \subseteq D_g$.
Dann heißt die Funktion

$$\boxed{g\circ f\colon D_f \to W_g,\ x \mapsto (g\circ f)(x) = g(f(x))}$$

zusammengesetzte Funktion („*g zusammengesetzt f*“).

Seien $g\colon \mathbb{R} \to [0,\infty),\ x \mapsto g(x) = x^2,$
$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x) = 3x-2.$

Dann ist $(g\circ f)\colon \mathbb{R} \to [0,\infty),$
$x \mapsto (g\circ f)(x) = g(f(x)) = g(3x-2) = (3x-2)^2$

und $(f\circ g)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},$
$x \mapsto (f\circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2) = 3x^2-2$

Aufgabe 5.8

Es sei $f(x) = x^2 + 2x - 1$ und $g(x) = 1 + |x|^{\frac{3}{2}}$.
Berechnen Sie

(a) $(f \circ g)(4)$

(b) $(f \circ g)(-9)$

(c) $(g \circ f)(0)$

(d) $(g \circ f)(-1)$

Lösung 5.8

(a) $(f \circ g)(4) = f(g(4)) = f(9) = 98$;
(b) $(f \circ g)(-9) = f(g(-9)) = f(28) = 839$;
(c) $(g \circ f)(0) = g(f(0)) = g(-1) = 2$;
(d) $(g \circ f)(-1) = g(f(-1)) = g(-2) \approx 3{,}828$.

Aufgabe 5.9

Bestimmen Sie $f \circ g$ und $g \circ f$.
Bestimmen Sie die Definitionsbereiche von f, g, $f \circ g$ und $g \circ f$.

(a) $f(x) = x^2, \quad g(x) = 1 + x$

(b) $f(x) = \sqrt{x} + 1, \quad g(x) = x^2$

(c) $f(x) = \frac{1}{x+1}, \quad g(x) = \sqrt{x} + 1$

(d) $f(x) = 2 + \sqrt{x}, \quad g(x) = (x-2)^2$

(e) $f(x) = x^2 + 2, \quad g(x) = x - 3$

(f) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad g(x) = \frac{1}{x}$

(g) $f(x) = \ln(x), \quad g(x) = \exp(x^2)$

(h) $f(x) = \ln(x-1), \quad g(x) = x^3 + 1$

Lösung 5.9

(a) $(f \circ g)(x) = (1+x)^2$,
$(g \circ f)(x) = 1 + x^2$,
$D_f = D_g = D_{f\circ g} = D_{g\circ f} = \mathbb{R}$;

(b) $(f \circ g)(x) = |x| + 1$,
$(g \circ f)(x) = (\sqrt{x} + 1)^2$,
$D_f = D_{g\circ f} = [0, \infty)$, $D_g = D_{f\circ g} = \mathbb{R}$;

(c) $(f \circ g)(x) = \frac{1}{\sqrt{x}+2}$,
$(g \circ f)(x) = \sqrt{\frac{1}{x+1} + 1}$,
$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $D_g = D_{f\circ g} = [0, \infty)$, $D_{g\circ f} = (-1, \infty)$;

(d) $(f \circ g)(x) = 2 + |x - 2|$,
$(g \circ f)(x) = |x|$,
$D_f = D_{g\circ f} = [0, \infty)$, $D_g = D_{f\circ g} = \mathbb{R}$;

Lösung 5.9 / 2

(e) $(f \circ g)(x) = (x-3)^2 + 2$,
$(g \circ f)(x) = x^2 - 1$,
$D_f = D_g = D_{f\circ g} = D_{g\circ f} = \mathbb{R}$;

(f) $(f \circ g)(x) = \frac{1}{1+(\frac{1}{x})^2}$,
$(g \circ f)(x) = 1 + x^2$,
$D_f = D_{g\circ f} = \mathbb{R}$, $D_g = D_{f\circ g} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$;

(g) $(f \circ g)(x) = x^2$,
$(g \circ f)(x) = \exp(\ln(x)^2) = x^{\ln x}$,
$D_f = D_{g\circ f} = (0, \infty)$, $D_g = D_{f\circ g} = \mathbb{R}$;

(h) $(f \circ g)(x) = \ln(x^3)$,
$(g \circ f)(x) = (\ln(x-1))^3 + 1$,
$D_f = D_{g\circ f} = (1, \infty)$, $D_g = \mathbb{R}$, $D_{f\circ g} = (0, \infty)$.

Inverse Funktion

Eine **bijektive** Funktion $f\colon D_f \to W_f$ besitzt eine **Umkehrfunktion** $f^{-1}\colon W_f \to D_f$ mit der Eigenschaft $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}$ und $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}$, i.e.,

$$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y) = x \quad \text{und} \quad f(f^{-1}(y)) = f(x) = y$$

Die Zuordnungsvorschrift der inversen Abbildung einer reellen Funktion erhalten wir durch Vertauschen der Rollen von Argument x und Bild y.

Beispiel

Zur Berechnung der inversen Funktion drücken wir x als Funktion von y aus.

Wir suchen die Umkehrfunktion von

$$y = f(x) = 2x - 1$$

Durch Umformung erhalten wir:

$$y = 2x - 1 \quad \Leftrightarrow \quad y + 1 = 2x \quad \Leftrightarrow \quad \tfrac{1}{2}(y+1) = x$$

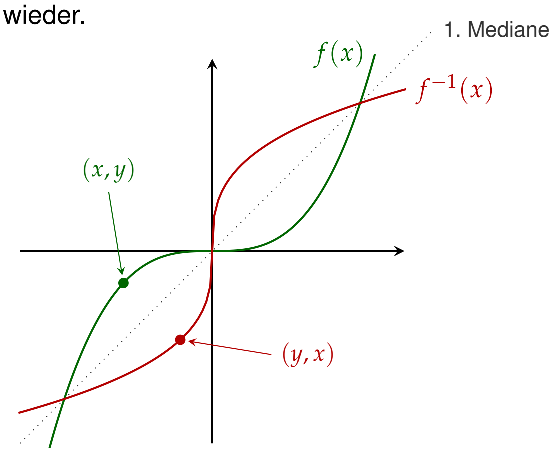
Die Umkehrfunktion lautet daher $f^{-1}(y) = \frac{1}{2}(y+1)$.
Da es üblich ist, das Argument mit x zu bezeichnen, schreiben wir

$$f^{-1}(x) = \tfrac{1}{2}(x+1)$$

Die Umkehrfunktion von $f(x) = x^3$ ist $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$.

Geometrische Interpretation

Das Vertauschen von x und y spiegelt sich auch im Graphen der Umkehrfunktion wieder.



(Graph der Funktion $f(x) = x^3$ und ihrer Inversen.)

Aufgabe 5.10

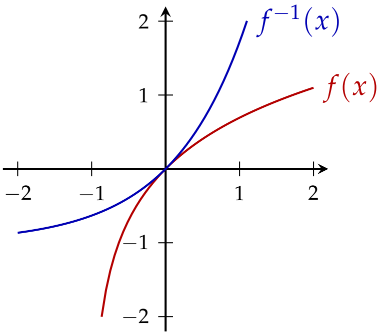
Bestimmen Sie die Inverse der Funktion

$$f(x) = \ln(1 + x)$$

Zeichnen Sie den Funktionsgraphen von f und f^{-1}.

Lösung 5.10

$f^{-1}(x) = e^x - 1$

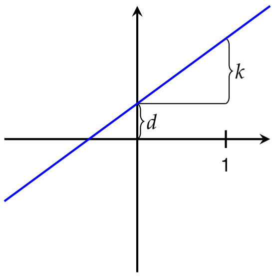


Lineare Funktion und Absolutbetrag

- **lineare Funktion**

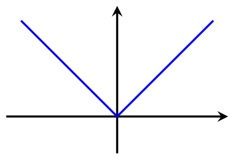
  $$\boxed{f(x) = k\,x + d}$$

  k ... **Steigung**
  d ... **konstantes Glied**



- **Betragsfunktion**

  $$\boxed{f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{für } x \geq 0 \\ -x & \text{für } x < 0 \end{cases}}$$



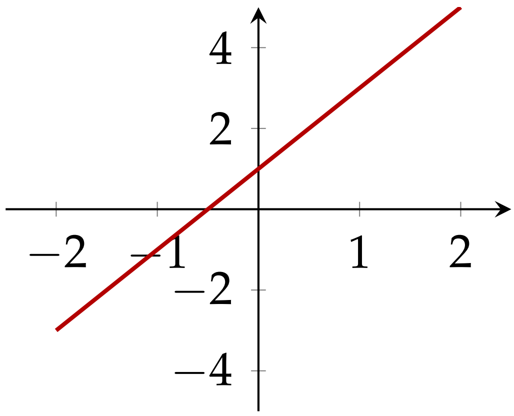
Aufgabe 5.11

Zeichnen Sie den Graphen der Funktion

$$f(x) = 2x + 1$$

im Intervall $[-2, 2]$.

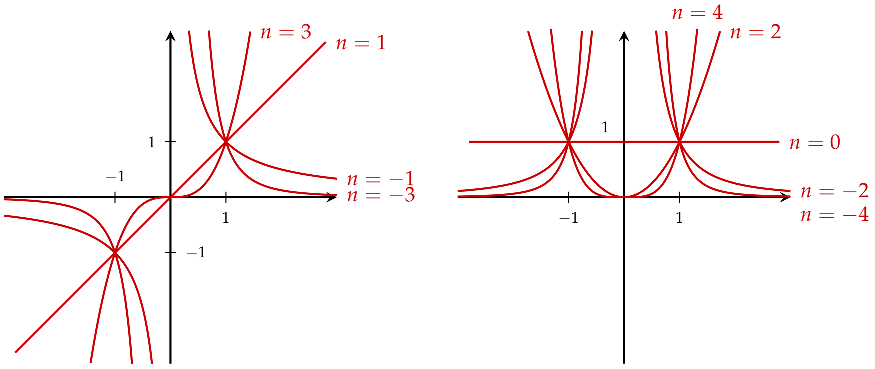
Lösung 5.11



Potenzfunktion

Potenzfunktion mit ganzzahligen Exponenten:

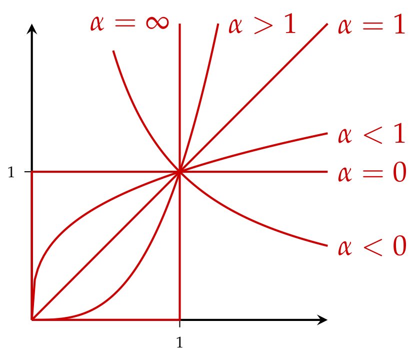
$$\boxed{f\colon x \mapsto x^n \quad n \in \mathbb{Z}} \qquad D = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{falls } n \geq 0 \\ \mathbb{R} \setminus \{0\} & \text{falls } n < 0 \end{cases}$$



Potenzfunktion

Potenzfunktion mit reellen Exponenten:

$$\boxed{f\colon x \mapsto x^\alpha \qquad \alpha \in \mathbb{R}}$$



Aufgabe 5.12

Zeichnen Sie die Graphen der Potenzfunktion

$$f(x) = x^n$$

im Intervall $[0, 2]$ für

$$n = -4, -2, -1, -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{4}, 0, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{2}, 1, 2, 4 .$$

Lösung 5.12

– Fehlt –

Polynome und rationale Funktionen

- **Polynome** von Grad n:

$$\boxed{f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k\, x^k}$$

$a_i \in \mathbb{R}$, für $i = 1, \dots, n$
$a_n \neq 0$

- **Rationale Funktionen:**

$$\boxed{D \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{p(x)}{q(x)}}$$

$p(x)$ und $q(x)$ sind Polynome
$D = \mathbb{R} \setminus \{\text{Nullstellen von } q\}$

Aufgabe 5.13

Zeichnen Sie die Graphen folgender Funktionen im Intervall $[-2, 2]$:

(a) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$

(b) $f(x) = \dfrac{x}{x^2-1}$

(c) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1}$

(d) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2-1}$

Lösung 5.13

– Fehlt –

Exponentialfunktion

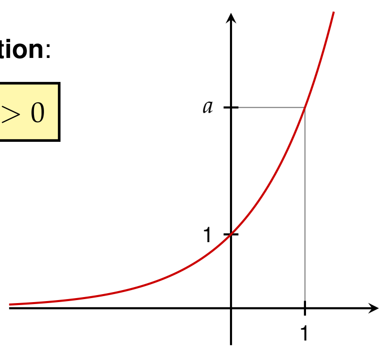
- **Exponentialfunktion**:

  $$\boxed{\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+, \quad x \mapsto \exp(x) = e^x}$$

  $e = 2{,}7182818\ldots$ *Eulersche Zahl*

- **Allgemeine Exponentialfunktion**:

  $$\boxed{\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+, \quad x \mapsto a^x \qquad a > 0}$$



Aufgabe 5.14

Zeichnen Sie die Graphen folgender Funktionen:

(a) $f(x) = e^x$

(b) $f(x) = 3^x$

(c) $f(x) = e^{-x}$

(d) $f(x) = e^{x^2}$

(e) $f(x) = e^{-x^2}$

(f) $f(x) = e^{-1/x^2}$

(g) $\cosh(x) = (e^x + e^{-x})/2$

(h) $\sinh(x) = (e^x - e^{-x})/2$

Lösung 5.14

– Fehlt –

Logarithmusfunktion

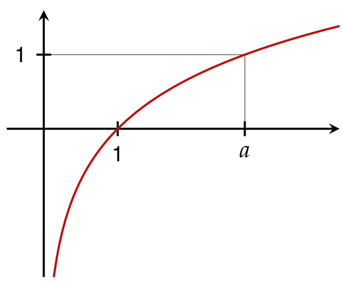
- **Logarithmusfunktion**:

  Inverse Funktion zur *Exponentialfunktion*.

  $$\boxed{\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \log(x) = \ln(x)}$$

- **Allgemeine Logarithmusfunktion** zur Basis a

  $$\boxed{\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \log_a(x)}$$



Aufgabe 5.15

Zeichnen Sie die Funktionsgraphen folgender Funktionen:

(a) $f(x) = \ln(x)$

(b) $f(x) = \ln(x+1)$

(c) $f(x) = \ln\left(\frac{1}{x}\right)$

(d) $f(x) = \log_{10}(x)$

(e) $f(x) = \log_{10}(10x)$

(f) $f(x) = (\ln(x))^2$

Lösung 5.15

– Fehlt –

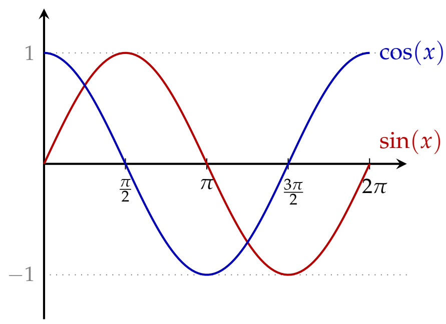
Winkelfunktionen

- **Sinusfunktion**:

  $\boxed{\mathbb{R} \to [-1,1],\ x \mapsto \sin(x)}$

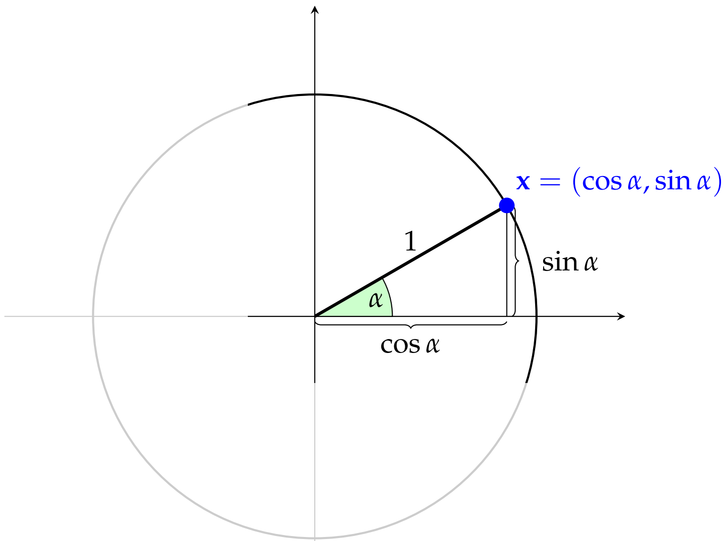
- **Cosinusfunktion**:

  $\boxed{\mathbb{R} \to [-1,1],\ x \mapsto \cos(x)}$



Achtung!
x wird im *Bogenmaß* (*Radiant*) angegeben, d.h., ein rechter Winkel entspricht $x = \pi/2$.

Sinus und Cosinus



Sinus und Cosinus

Wichtige Formel:

Periodisch: Es gilt für alle $k \in \mathbb{Z}$

$$\boxed{\begin{aligned}\sin(x + 2k\pi) &= \sin(x)\\ \cos(x + 2k\pi) &= \cos(x)\end{aligned}}$$

Zusammenhang zwischen $\sin$ und $\cos$:

$$\boxed{\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1}$$

Funktionen in mehreren Variablen

Eine **reelle Funktion in mehreren Variablen** ist eine Abbildung, die jedem Vektor $\mathbf{x}$ eine reelle Zahl zuordnet.

$$\boxed{f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \mathbf{x} \mapsto f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)}$$

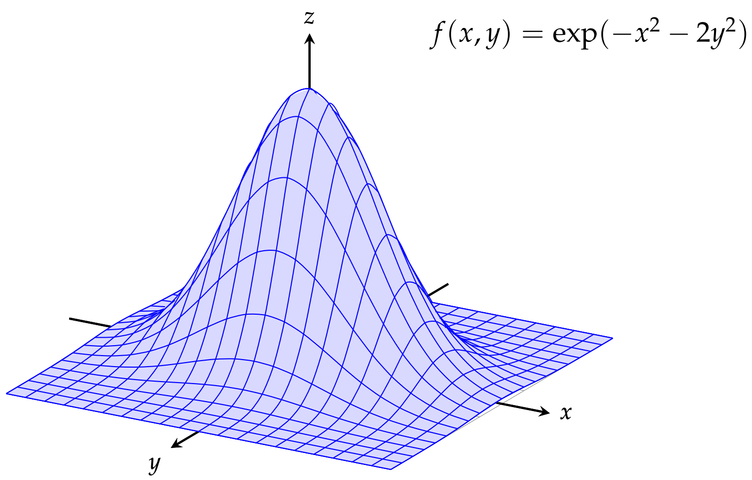
Die Komponenten x_i des Vektors $\mathbf{x}$ heißen die **Variablen** der Funktion f.

Funktionen in *zwei* Variablen lassen sich durch den **Graphen** (Funktionengebirge) veranschaulichen:

$$\mathcal{G}_f = \{(\mathbf{x}, y) \mid y = f(\mathbf{x}) \text{ für ein } \mathbf{x} \in D_f\}$$

(Der Graph einer Funktion mit vielen Variablen ist analog definiert, er dient aber nicht mehr zur Veranschaulichung.)

Graph einer bivariaten Funktion



Niveaulinien einer bivariaten Funktion

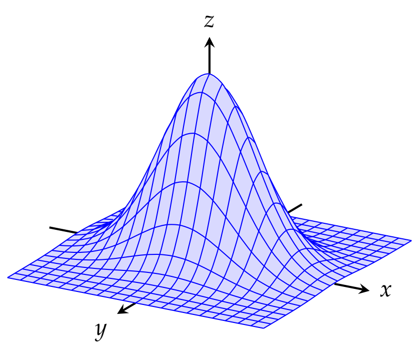
Die Menge aller Punkte (x, y) mit $f(x, y) = c$ für ein $c \in \mathbb{R}$ wird als **Niveaulinie** der Funktion f bezeichnet.

Die Funktion f hat daher auf einer Höhenlinie den gleichen Funktionswert.

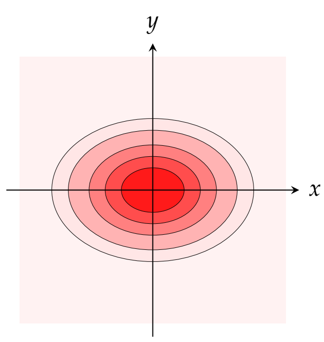
Andere Bezeichnungen:

- *Indifferenzkurve*
- *Isoquante* (Isonutzenlinie)
- *Höhenlinie*
- *Contourlinie*

Niveaulinien einer bivariaten Funktion



Graph



Niveaulinien

$f(x, y) = \exp(-x^2 - 2y^2)$

Aufgabe 5.16

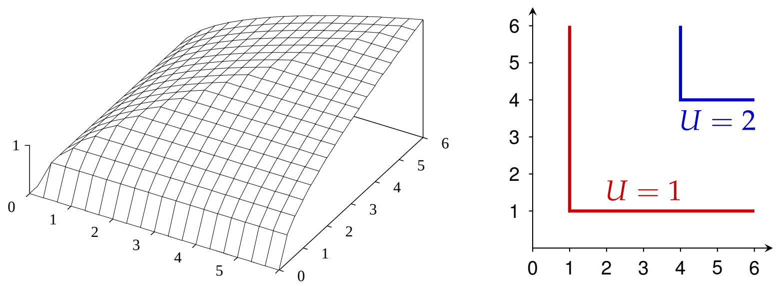
Gegeben ist die Nutzenfunktion U eines Haushalts bezüglich zweier komplementärer Güter, Gut 1 und Gut 2 (z.B. linker Schuh und rechter Schuh eines Paares).

$$U(x_1, x_2) = \sqrt{\min\{x_1, x_2\}}, \quad x_1, x_2 \geq 0.$$

(a) Skizzieren Sie den Funktionsgraphen.

(b) Zeichnen Sie die Isonutzenlinien für $U = U_0 = 1$ und $U = U_1 = 2$.

Lösung 5.16



Implizite Funktionen

Indifferenzkurven sind *mathematisch* gesehen implizite Funktionen. Der Zusammenhang zwischen zwei Variablen x und y wird durch eine Gleichung beschrieben:

$$F(x, y) = 0$$

Zum Zeichnen von *Graphen* von impliziten Funktionen kann versuchen, eine der Variablen als (explizite) Funktion der anderen auszudrücken.

Den Graphen dieser univariate Funktion können wir dann wie oben beschrieben zeichnen.

Cobb-Douglas-Funktion

Zum Zeichnen des Graphen von

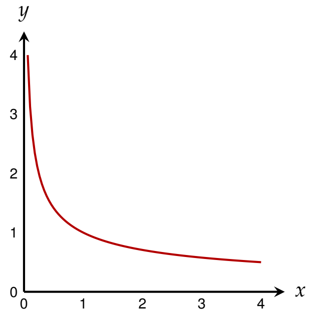
$$x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{2}{3}} = 1\,, \qquad x, y > 0,$$

können wir x durch y ausdrücken:

$$x = \frac{1}{y^2}$$

Alternativ können wir auch y durch x ausdrücken:

$$y = \frac{1}{\sqrt{x}}$$



CES-Funktion

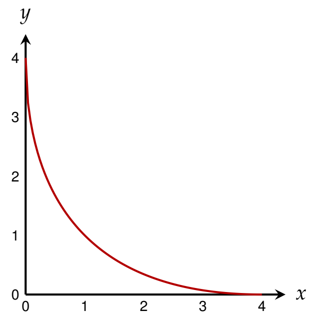
Zum Zeichnen des Graphen von

$$\left(x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}\right)^2 = 4\,, \qquad x, y > 0,$$

können wir y durch x ausdrücken:

$$y = \left(2 - x^{\frac{1}{2}}\right)^2$$

(Achten Sie auf den Definitionsbereich!)



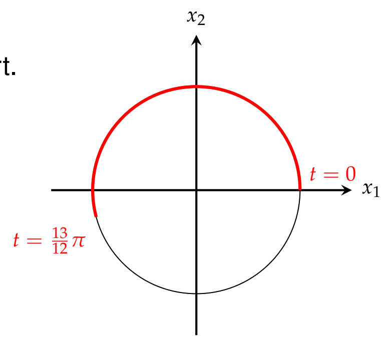
Weg

Eine Funktion

$$\boxed{s\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n,\ t \mapsto s(t) = \begin{pmatrix} s_1(t) \\ \vdots \\ s_n(t) \end{pmatrix}}$$

heißt ein **Weg** (oder *Pfad*) im $\mathbb{R}^n$.
Die Variable t wird oft als *Zeit* interpretiert.

$$[0, \infty) \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$$



Aufgabe 5.17

Skizzieren Sie folgende Wege:

(a) $s\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$

(b) $s\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(2\pi t) \\ \sin(2\pi t) \end{pmatrix}$

(c) $s\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto \begin{pmatrix} t\ \cos(2\pi t) \\ t\ \sin(2\pi t) \end{pmatrix}$

Lösung 5.17

– Fehlt –

Vektorwertige Funktion

Allgemeine vektorwertige Funktionen:

$$\mathbf{f}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m,\ \mathbf{x} \mapsto \mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} f_1(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ f_m(\mathbf{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x_1,\dots,x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1,\dots,x_n) \end{pmatrix}$$

- Univariate Funktionen:
  $\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto y = x^2$
- Multivariate Funktionen:
  $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ \mathbf{x} \mapsto y = x_1^2 + x_2^2$
- Wege:
  $[0,1) \to \mathbb{R}^n,\ s \mapsto (s, s^2)^t$
- Lineare Abbildungen:
  $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m,\ \mathbf{x} \mapsto \mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ $\qquad$ $\mathbf{A} \dots\ m \times n$-Matrix

Kapitel 6

Grenzwert und Stetigkeit

Grenzwert einer Funktion

Was passiert mit dem Funktionswert einer Funktion f, wenn das Argument x gegen einen bestimmten Wert x_0 strebt?
(Wobei x_0 nicht zum Definitionsbereich von f gehören muss.)

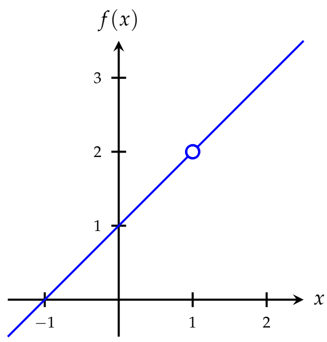
Die Funktion

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$$

ist in $x = 1$ nicht definiert.

Durch Faktorisieren und Kürzen erhalten wir die Funktion

$$g(x) = x + 1 = \begin{cases} f(x), & \text{falls } x \neq 1 \\ 2, & \text{falls } x = 1 \end{cases}$$



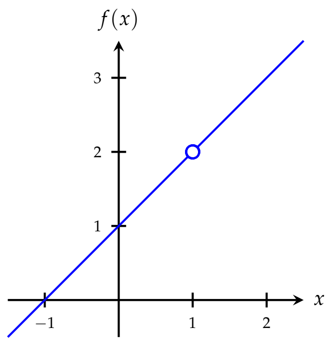
Grenzwert einer Funktion

Wenn wir uns in der Funktion $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$ dem Argument $x_0 = 1$ nähern (egal wie), und uns ansehen, was mit dem Funktionswert geschieht, dann landen wir bei $y = 2$.

Wir sagen: $f(x)$ **konvergiert** gegen 2, wenn x gegen 1 strebt

und schreiben:

$$\boxed{\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 2}$$



Grenzwert einer Funktion

Mathematisch wird das so formuliert:

Wenn für jede konvergente Folge von Argumenten $(x_n) \to x_0$ die Folge der Funktionswerte $(f(x_n))$ gegen eine Zahl a konvergiert, so heißt a der **Grenzwert** (oder **Limes**) der Funktion f *an der Stelle* x_0.

Wir schreiben dafür

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = a \quad \text{oder} \quad f(x) \to a \text{ für } x \to x_0}$$

x_0 muss nicht in der Definitionsmenge liegen.
Genauso muß a nicht in der Wertemenge der Funktion liegen.

Rechenregeln

Für Limiten von Funktionen gelten analoge Rechenregeln wie für Grenzewerte von Folgen.
Seien $\lim_{x \to x_0} f(x) = a$ und $\lim_{x \to x_0} g(x) = b$.

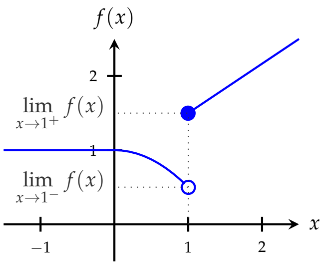
$$
\begin{array}{lll}
(1) & \lim_{x \to x_0} (c \cdot f(x) + d) = c \cdot a + d & \\
(2) & \lim_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = a + b & \\
(3) & \lim_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = a \cdot b & \\
(4) & \lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{a}{b} & \text{für } b \neq 0 \\
(6) & \lim_{x \to x_0} (f(x))^k = a^k & \text{für } k \in \mathbb{N}
\end{array}
$$

Bestimmen eines Grenzwertes

Für einfache Funktionen eignet sich folgende Vorgangsweise:

1. Wir zeichnen den Graphen der Funktion.
2. Wir zeichnen den Wert x_0 auf der x-Achse ein.
3. Wir setzen den Bleistift auf dem Graphen und führen ihn auf dem Graphen von *rechts* bis zum x_0-Wert.
4. Wir lesen den y-Wert dieses Punktes von y-Achse ab. Dieser Wert heißt der **rechtsseitige Grenzwert** von f an der Stelle x_0: $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$.
5. Analog erhalten wir von der *linken* Seite den **linksseitige Grenzwert** von f an der Stelle x_0: $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$.
6. Wenn beide Limiten *gleich* sind, so existiert der Grenzwert und es gilt
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

Beispiel



$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{für } x < 0 \\ 1 - \frac{x^2}{2}, & \text{für } 0 \le x < 1 \\ \frac{x}{2} + 1, & \text{für } x \ge 1 \end{cases}$$

$0{,}5 = \lim_{x\to1^-} f(x) \neq \lim_{x\to1^+} f(x) = 1{,}5$
d.h., der Grenzwert an der Stelle $x_0 = 1$ existiert nicht.

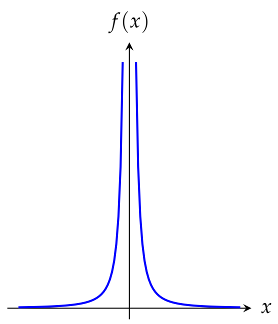
Der Grenzwert an anderen Stellen existiert hingegen,
z.B. $\lim\limits_{x\to0} f(x) = 1$.

Unbeschränkte Funktion

Es gibt gegen ∞ (oder $-\infty$) wenn x gegen x_0 strebt.

Wir schreiben dann (in abuse of language):

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty}$$



$$\lim_{x\to0} \frac{1}{x^2} = \infty$$

Grenzwert gegen ∞

Der Grenzwertbegriff gilt analog, wenn wir $x_0 = \infty$ oder $x_0 = -\infty$ setzen.

$$\lim_{x\to\infty} f(x)$$

existiert, falls $f(x)$ gegen einen Wert y konvergiert, wenn x immer größer wird.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2} = 0 \qquad \text{und} \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

Aufgabe 6.1

Zeichnen Sie den Graphen der Funktion

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{x^2}{2} & \text{für } x \leq -2 \\ x+1 & \text{für } -2 < x < 2 \\ \frac{x^2}{2} & \text{für } x \geq 2 \end{cases}$$

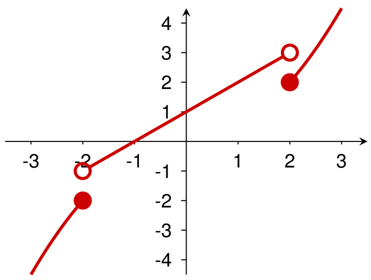
Berechnen Sie $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$, $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$ und $\lim_{x \to x_0} f(x)$
für $x_0 = -2$, 0 und 2:

$$\lim_{x \to -2^+} f(x) = \qquad \lim_{x \to -2^-} f(x) = \qquad \lim_{x \to -2} f(x) =$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \qquad \lim_{x \to 0^-} f(x) = \qquad \lim_{x \to 0} f(x) =$$

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \qquad \lim_{x \to 2^-} f(x) = \qquad \lim_{x \to 2} f(x) =$$

Lösung 6.1



$\lim_{x \to -2^+} f(x) = -1$, $\lim_{x \to -2^-} f(x) = -2$, $\lim_{x \to -2} f(x)$ existiert nicht;

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0} f(x) = 1$;

$\lim_{x \to 2^+} f(x) = 2$, $\lim_{x \to 2^-} f(x) = 3$, $\lim_{x \to 2} f(x)$ existiert nicht;

f ist stetig in 0 und nicht stetig in -2 und 2.

Aufgabe 6.2

Überlegen Sie sich den links- bzw. rechtsseitigen Grenzwert für

(a) $\lim_{x \to 0^-} f(x) =$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) =$

für $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$

(b) $\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} =$

$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} =$

(c) $\lim_{x \to 1^-} x =$

$\lim_{x \to 1^+} x =$

Lösung 6.2

(a) $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$;
(b) $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$, $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$;
(c) $\lim_{x\to 1^-} x = \lim_{x\to 1^+} x = 1$.

Aufgabe 6.3

Geben Sie folgende Grenzwerte an, soferne sie existieren.

(a) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x+1}$

(b) $\lim\limits_{x\to 0} x^2$

(c) $\lim\limits_{x\to\infty} \ln(x)$

(d) $\lim\limits_{x\to 0} \ln|x|$

(e) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x+1}{x-1}$

Lösung 6.3

(a) 0;
(b) 0;
(c) ∞;
(d) $-\infty$;
(e) 1.

Aufgabe 6.4

Bestimmen Sie

(a) $\lim\limits_{x\downarrow 1} \frac{x^{3/2}-1}{x^3-1}$

(b) $\lim\limits_{x\uparrow -2} \frac{\sqrt{|x^2-4|^2}}{x+2}$

(c) $\lim\limits_{x\uparrow 0} \lfloor x \rfloor$

(d) $\lim\limits_{x\downarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x-1}}$

(e) $\lim\limits_{x\downarrow 2} \frac{2x^2-3x-2}{|x-2|}$

(f) $\lim\limits_{x\uparrow 2} \frac{2x^2-3x-2}{|x-2|}$

(g) $\lim\limits_{x\downarrow -2} \frac{|x+2|^{3/2}}{2+x}$

(h) $\lim\limits_{x\uparrow 1} \frac{x+1}{x^2-1}$

Aufgabe 6.4 / 2

(i) $\lim\limits_{x\downarrow -7} \frac{2|x+7|}{x^2+4x-21}$

Hinweis: $\lfloor x \rfloor$ ist die größte ganze Zahl kleiner oder gleich x.

Lösung 6.4

(a) $\frac{1}{2}$; (b) -4; (c) -1; (d) 0; (e) 5; (f) -5; (g) 0; (h) $-\infty$; (i) $-\frac{1}{5}$.

Aufgabe 6.5

Berechnen Sie den Grenzwert von

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

für

(a) $f(x) = x$

(b) $f(x) = x^2$

(c) $f(x) = x^3$

(d) $f(x) = x^n$, für $n \in \mathbb{N}$.

Lösung 6.5

(a) 1;
(b) $2x$;
(c) $3x^2$;
(d) nx^{n-1}.

Regel von de l'Hospital

Bei der Bestimmung des Grenzwertes

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

kann es vorkommen, dass

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0 \qquad \text{(oder } = \pm\infty\text{)}$$

Allerdings sind Ausdrücke wie $\frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$ nicht definiert.
(Man kann nicht einfach durch 0 oder ∞ kürzen!)

Regel von de l'Hospital

Wenn $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$ (oder $= \infty$ oder $= -\infty$), dann gilt

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}}$$

Vorsetzung: f und g sind in x_0 differenzierbar.

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 7\,x + 6}{x^2 - x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{3\,x^2 - 7}{2\,x - 1} = \frac{5}{3}$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x^2} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{1}{x}}{2\,x} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{2\,x^2} = 0$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \ln(1+x)}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - (1+x)^{-1}}{2\,x} = \lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^{-2}}{2} = \frac{1}{2}$$

Aufgabe 6.6

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

(a) $\lim_{x \to 4} \frac{x^2 - 2\,x - 8}{x^3 - 2\,x^2 - 11\,x + 12} =$

(b) $\lim_{x \to -1} \frac{x^2 - 2\,x - 8}{x^3 - 2\,x^2 - 11\,x + 12} =$

(c) $\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 5\,x^2 + 8\,x - 4}{x^3 - 3\,x^2 + 4} =$

(d) $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} =$

(e) $\lim_{x \to 0^+} x \ln(x) =$

(f) $\lim_{x \to \infty} x \ln(x) =$

Lösung 6.6

(a) $\frac{2}{7}$;
(b) $-\frac{1}{4}$;
(c) $\frac{1}{3}$;
(d) $\frac{1}{2}$;
(e) $= \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{x^{-1}} = 0$;
(f) ∞.
In (b) und (f) kann die Regel von de l'Hospital nicht verwendet werden.

Aufgabe 6.7

Warum führt die folgende Anwendung der Regel von de l'Hospital zu einem falschen Ergebnis? (Der wahre Grenzwert ist 2.)

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3+x^2-x-1}{x^2-1} = \lim_{x\to 1} \frac{3\,x^2+2\,x-1}{2\,x} = \lim_{x\to 1} \frac{6\,x+2}{2} = 4$$

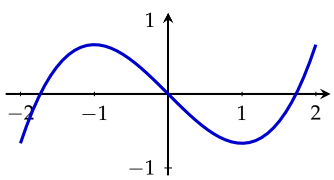
Lösung 6.7

Die Voraussetzung für die Anwendung der Regel von de l'Hospital ist für den zweiten Quotienten nicht gegeben. (Der Nenner strebt nicht gegen 0.)

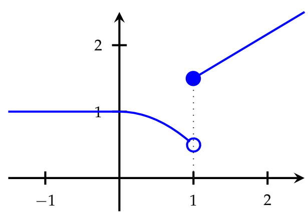
Stetigkeit

Beim Zeichen von Graphen fällt auf, dass es Funktionen gibt, die sich *ohne Absetzen des Bleistifts* zeichnen lassen.
Solche Funktionen heißen **stetig**.

Andere Funktionen besitzen *Sprungstellen* und man muss beim Zeichnen den Bleistift vom Papier heben. Solche Stellen heißen *Unstetigkeitsstellen* der Funktion.
Der Graph der Funktion $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x$ im Intervall $[-2, 2]$:



stetig



unstetig in $x = 1$

Stetigkeit

Formal läßt sich das so ausdrücken:

Definition:
Eine Funktion $f: D \to \mathbb{R}$ heißt **stetig** an der Stelle $x_0 \in D$, falls

1. $\lim_{x \to x_0} f(x)$ existiert,
2. $f(x_0)$ existiert, und
3. $\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)}$.

Die Funktion heißt *stetig*, falls sie in allen Punkten des Definitionsbereichs stetig ist.

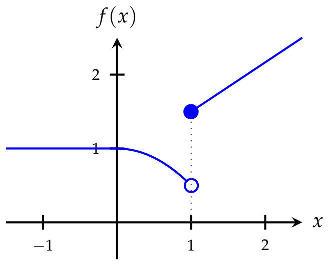
Stetigkeit

Vorgangsweise für einfache Funktionen:

(1) Wir zeichnen den Graphen der Funktion.

(2) In allen Punkten des *Definitionsbereichs*, in denen wir beim Zeichnen *nicht* den Bleistift absetzen müssen, ist die Funktion stetig.

(3) In allen Punkten des *Definitionsbereichs*, in denen wir absetzen müssen ist, die Funktion nicht stetig.



$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{für } x < 0 \\ 1 - \frac{x^2}{2}, & \text{für } 0 \leq x < 1 \\ \frac{x}{2} + 1, & \text{für } x \geq 1 \end{cases}$$

f ist überall stetig
außer im Punkt $x = 1$.

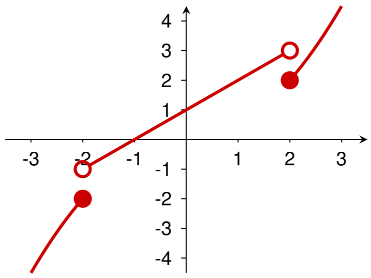
Aufgabe 6.8

Zeichnen Sie den Graphen der Funktion

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{x^2}{2} & \text{für } x \leq -2 \\ x + 1 & \text{für } -2 < x < 2 \\ \frac{x^2}{2} & \text{für } x \geq 2 \end{cases}$$

Berechnen Sie $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$, $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$ und $\lim_{x \to x_0} f(x)$
für $x_0 = -2$, 0 und 2.
Ist f in diesen Punkten stetig?

Lösung 6.8



$\lim_{x\to-2^+} f(x) = -1$, $\lim_{x\to-2^-} f(x) = -2$, $\lim_{x\to-2} f(x)$ existiert nicht;

$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0} f(x) = 1$;

$\lim_{x\to2^+} f(x) = 2$, $\lim_{x\to2^-} f(x) = 3$, $\lim_{x\to2} f(x)$ existiert nicht;

f ist stetig in 0 und nicht stetig in -2 und 2.

Aufgabe 6.9

Bestimmen Sie den links- und rechtsseitigen Grenzwert der Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x^2+1 & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \\ -x^2-1 & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

an der Stelle 0. Ist f in diesem Punkt stetig bzw. differenzierbar?

Lösung 6.9

$\lim_{x\to0^-} f(x) = -1$, $\lim_{x\to0^+} f(x) = 1$.
Nicht stetig an der Stelle 0. (Daher auch nicht differenzierbar.)

Aufgabe 6.10

Ist die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{für } x \leq 1 \\ \frac{x}{2} + \frac{3}{2} & \text{für } x > 1 \end{cases}$$

an der Stelle 1 stetig bzw. differenzierbar?

Berechnen Sie den (links- und rechtsseiten) Grenzwert
an der Stelle $x_0 = 1$.

Lösung 6.10

$\lim_{x \to 1} f(x) = 2$.
Stetig im Punkt 1, aber nicht differenzierbar.

Aufgabe 6.11

Sind die folgenden Funktionen stetig auf dem Definitionsbereich?
Skizzieren Sie die Funktionen.

(a) $D = \mathbb{R}$, $f(x) = x$

(b) $D = \mathbb{R}$, $f(x) = 3x + 1$

(c) $D = \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-x} - 1$

(d) $D = \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$

(e) $D = \mathbb{R}^+$, $f(x) = \ln(x)$

(f) $D = \mathbb{R}, f(x) = \lfloor x \rfloor$

(g) $D = \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \leq 0, \\ x+1 & \text{für } 0 < x \leq 2, \\ x^2 & \text{für } x > 2. \end{cases}$

Hinweis: $\lfloor x \rfloor$ ist die größte ganze Zahl kleiner oder gleich x.

Lösung 6.11

Die Funktion sind stetig in
(a) D;
(b) D;
(c) D;
(d) D;
(e) D;
(f) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$;
(g) $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Aufgabe 6.12

Welchen Wert muss h besitzen, damit die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2hx & \text{für } x \leq 2, \\ 3x - h & \text{für } x > 2 \end{cases}$$

stetig ist?

Lösung 6.12

$h = \frac{2}{5}$.

Kapitel 7

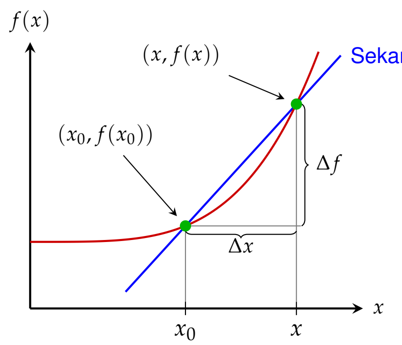
Differentialrechnung

Differenzenquotient

Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Der Quotient

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

heißt **Differenzenquotient** an der Stelle x_0.



Differentialquotient

Falls der Limes

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existiert, so heißt die Funktion f **differenzierbar** an der Stelle x_0 und dieser Grenzwert **Differentialquotient** oder **(erste) Ableitung** der Funktion an der Stelle x_0.

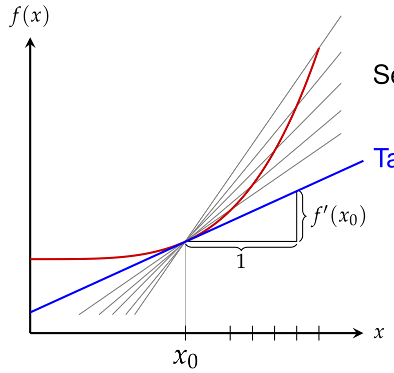
Eine Funktion f heißt *differenzierbar*, wenn sie in jedem Punkt des Definitionsbereichs differenzierbar ist.

Schreibweisen:

$$f'(x_0) = \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_0}$$

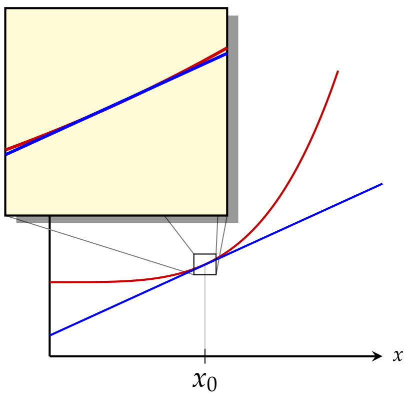
Graphische Interpretation des Differentialquotienten

- Anstieg der Tangente an den Graphen der Funktion $f(x)$ an der Stelle x_0.



Interpretation als „Grenzfunktion“

- Marginalquote, oder „Grenzfunktion“ einer Wirkungsgröße $y = f(x)$ bezüglich einer Faktorgröße x.



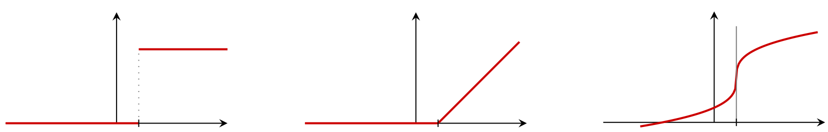
Existenz des Differentialquotienten

Eine Funktion f ist differenzierbar in allen Punkten, in denen sich eine Tangente mit endlicher Steigung an den Graphen legen lässt.

In allen Punkten in denen das nicht möglich ist, ist die Funktion *nicht* differenzierbar.

Das sind vor allem

- Unstetigkeitsstellen („Sprungstellen“)
- „Knicke“ im Graph der Funktion
- Senkrechte Tangenten



Berechnung des Differentialquotienten

Der Differentialquotien kann durch Bestimmen des Grenzwertes berechnet werden.

Sei $f(x) = x^2$. Dann ist

$$\begin{aligned}
f'(x_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{(x_0+h)^2 - {x_0}^2}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{{x_0}^2 + 2\,x_0\,h + h^2 - {x_0}^2}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{2\,x_0\,h + h^2}{h} \quad = \lim_{h\to 0} (2\,x_0 + h) \\
&= 2\,x_0
\end{aligned}$$

Aufgabe 7.1

Zeichnen Sie den Graphen der folgenden Funktionen. Sind diese Funktionen differenzierbar, bzw. wo sind sie differenzierbar? Sind die Funktionen stetig?

(a) $f(x) = 2x + 2$

(b) $f(x) = 3$

(c) $f(x) = |x|$

(d) $f(x) = \sqrt{|x^2 - 1|}$

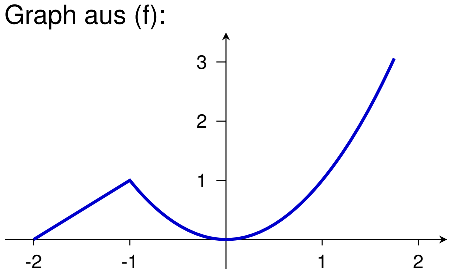
(e) $f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x^2 & \text{für } x \leq -1 \\ x & \text{für } -1 < x \leq 1 \\ \frac{1}{2}x^2 & \text{für } x > 1 \end{cases}$

(f) $f(x) = \begin{cases} 2 + x & \text{für } x \leq -1 \\ x^2 & \text{für } x > -1 \end{cases}$

Lösung 7.1

differenzierbar in (a) $\mathbb{R}$, (b) $\mathbb{R}$, (c) $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, (d) $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, (e) $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, (f) $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Graph aus (f):



Ableitung einer Funktion

Die Funktion

$$\boxed{f' \colon D \to \mathbb{R},\ x \mapsto f'(x) = \left.\frac{df}{dx}\right|_x}$$

heißt die **erste Ableitung** der Funktion f. Die Definitionsmenge D ist die Menge aller Punkte, in denen der Differentialquotient existiert.

Die Berechnung der Ableitung wird als **Ableiten** oder **Differenzieren** der Funktion bezeichnet.

Ableitung elementarer Funktionen

$f(x)$	$f'(x)$
c	0
x^α	$\alpha \cdot x^{\alpha-1}$
e^x	e^x
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$

Differentiationsregeln

- $(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$
- $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$ Summenregel
- $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$ Produktregel
- $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ Kettenregel
- $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$ Quotientenregel

Beispiel

$$\big(3\,x^3+2\,x-4\big)'=3\cdot 3\cdot x^2+2\cdot 1-0=9\,x^2+2$$

$$\big(e^x\cdot x^2\big)'=\ (e^x)'\cdot x^2+e^x\cdot\big(x^2\big)'=e^x\cdot x^2+e^x\cdot 2\,x$$

$$\big((3\,x^2+1)^2\big)'=2\,(3\,x^2+1)\cdot 6\,x$$

$$\big(\sqrt{x}\big)'=\ \Big(x^{\frac{1}{2}}\Big)'=\tfrac{1}{2}\cdot x^{-\frac{1}{2}}=\tfrac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$(a^x)'=\ \Big(e^{\ln(a)\cdot x}\Big)'=e^{\ln(a)\cdot x}\cdot\ln(a)=a^x\ \ln(a)$$

$$\left(\frac{1+x^2}{1-x^3}\right)'=\frac{2x\cdot(1-x^3)-(1+x^2)\cdot 3x^2}{(1-x^3)^2}$$

Höhere Ableitungen

Die Ableitung einer Funktion kann wiederum differenziert werden.

Dadurch erhalten wir die

- **zweite Ableitung** $f''(x)$ der Funktion f,
- **dritte Ableitung** $f'''(x)$, usw.
- n**-te Ableitung** $f^{(n)}(x)$.

Die ersten 5 Ableitungen der Funktion $f(x)=x^4+2x^2+5x-3$ sind

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x^4+2x^2+5x-3)'=4x^3+4x+5\\ f''(x) &= (4x^3+4x+5)'=12x^2+4\\ f'''(x) &= (12x^2+4)'=24x\\ f^{\mathrm{IV}}(x) &= (24x)'=24\\ f^{\mathrm{V}}(x) &= 0 \end{aligned}$$

Aufgabe 7.2

Berechne die erste und zweite Ableitung der folgenden Funktionen:

(a) $f(x)=4x^4+3x^3-2x^2-1$

(b) $f(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}$

(c) $f(x)=\exp(-\dfrac{x^2}{2})$

(d) $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$

Lösung 7.2

(a) $f'(x) = 16x^3 + 9x^2 - 4x, \quad f''(x) = 48x^2 + 19x - 4;$
(b) $f'(x) = -x\,e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad f''(x) = (x^2-1)\,e^{-\frac{x^2}{2}};$
(c) = (b);
(d) $f'(x) = \frac{-2}{(x-1)^2}, \quad f''(x) = \frac{4}{(x-1)^3}.$

Aufgabe 7.3

Berechne die erste und zweite Ableitung der folgenden Funktionen:

(a) $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

(b) $f(x) = \dfrac{1}{(1+x)^2}$

(c) $f(x) = x\ln(x) - x + 1$

(d) $f(x) = \ln(|x|)$

Lösung 7.3

(a) $f'(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}, \quad f''(x) = \frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3};$
(b) $f'(x) = -\frac{2}{(1+x)^3}, \quad f''(x) = \frac{6}{(1+x)^4};$
(c) $f'(x) = \ln(x), \quad f''(x) = \frac{1}{x};$
(d) $f'(x) = \frac{1}{x}, \quad f''(x) = -\frac{1}{x^2}.$

Aufgabe 7.4

Berechne die erste und zweite Ableitung der folgenden Funktionen:

(a) $f(x) = \tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$

(b) $f(x) = \cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$

(c) $f(x) = \sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$

(d) $f(x) = \cos(1 + x^2)$

Lösung 7.4

(a) $f'(x) = \frac{1}{cos(x)^2}, \quad f''(x) = \frac{2\sin(x)}{\cos(x)^3}$;
(b) $f'(x) = \sinh(x), \quad f''(x) = \cosh(x)$;
(c) $f'(x) = \cosh(x), \quad f''(x) = \sinh(x)$;
(d) $f'(x) = -2x\sin(1 + x^2)$,
$f''(x) = -2\sin(1 + x^2) - 4x^2\cos(1 + x^2)$.

Aufgabe 7.5

Leite die Quotientenregel aus der Produkt- und Kettenregel her.

Lösung 7.5

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \Big(f(x)\cdot(g(x))^{-1}\Big)'$$
$$= f'(x)\cdot(g(x))^{-1} + f(x)\cdot\Big((g(x))^{-1}\Big)'$$
$$= f'(x)\cdot(g(x))^{-1} + f(x)(-1)(g(x))^{-2}g'(x)$$
$$= \frac{f'(x)}{g(x)} - \frac{f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$$
$$= \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{(g(x))^2}$$

Aufgabe 7.6

Bestimmen Sie die marginalen Kosten (Grenzkosten) und die Änderungsrate der marginalen Kosten für folgende Kostenfunktionen:

(a) $C(x) = 500 + 30\,x - 0{,}1\,x^2 + 0{,}002\,x^3$

(b) $C(x) = 500 + 20\,x - 2\,x\,\ln x + 0{,}01\,x^2$

Wie lautet die Ableitung der durchschnittlichen Kosten?
Hinweis: Die marginalen Kosten sind die erste Ableitung $C'(x)$ der Kostenfunktion $C(x)$.

Lösung 7.6

Durchschnittliche Kosten: $\frac{C(x)}{x}$,
Änderungsrate der marginalen Kosten ist die zweite Ableitung $C''(x)$.
(a) $C'(x) = 30 - 0{,}2\,x + 0,006\,x^2$, $C''(x) = -0,2 + 0,012\,x$,
$\left(\frac{C(x)}{x}\right)' = -\frac{500}{x^2} - 0{,}1 + 0,004\,x$;
(b) $C'(x) = 18 + 0,02x - 2\,\ln(x)$, $C''(x) = 0{,}02 - \frac{2}{x}$,
$\left(\frac{C(x)}{x}\right)' = 0,01 - \frac{500}{x^2} - \frac{2}{x}$

Marginale Änderung

Für kleine Werte von Δx können wir die Ableitung $f'(x_0)$ durch den Differenzenquotienten mit kleinem Δx abschätzen:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \approx \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

Daher können wir umgekehrt die Änderung Δf von f in der Nähe von x_0 für *kleine* Änderungen Δx abschätzen:

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0) \cdot \Delta x$$

Beachte:

- $f'(x_0) \cdot \Delta x$ ist eine *lineare Funktion* von Δx.
- Diese Funktion ist die *bestmögliche* Approximation von f durch eine lineare Funktion in der *Nähe* von x_0.
- Diese Approximation ist nur für „kleine“ Werte von Δx brauchbar.

Differential

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0) \cdot \Delta x$$

Wenn wir die Differenzen Δf und Δx durch *infinitesimale* („unendlich kleine“) Größen df und dx ersetzen, erhalten wir das **Differential** der Funktion f an der Stelle x_0:

$$\boxed{df = f'(x_0)\, dx}$$

df und dx heißen die **Differentiale** der Funktion f bzw. der unabhängigen Variable x.

Differential

Wir können das Differential von f als lineare Funktion in dx auffassen und damit die Funktion f näherungsweise berechnen.

$$f(x_0 + dx) \approx f(x_0) + df$$

Sei $f(x) = e^x$.

Differential von f an der Stelle 1:
$df = f'(1)\, dx = e^1\, dx$

Approximation von $f(1{,}1)$ mit Hilfe dieses Differentials:
$\Delta x = (x_0 + dx) - x_0 = 1{,}1 - 1 = 0{,}1$

$f(1{,}1) \approx f(1) + df = e + e \cdot 0{,}1 \approx 2{,}99$

Zum Vergleich: $f(1{,}1) = 3{,}004166\ldots$

Aufgabe 7.7

Sei $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$. Berechnen Sie die Änderung der Funktionswerte $f(3,1) - f(3)$ näherungsweise mit Hilfe des Differentials an der Stelle $x_0 = 3$. Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem exakten Wert.

Lösung 7.7

Mit Hilfe des Differentials: $f(3,1) - f(3) \approx -0,001096$, Exakter Wert: $f(3,1) - f(3) = -0,00124\ldots$

Elastizität

Die erste Ableitung einer Funktion gibt die *Änderungsrate* einer Funktion f an der Stelle x_0 in *absoluten* Zahlen an. Sie ist somit abhängig von der *Skalierung* von Argument und Funktionswert.

Wir sind aber in vielen Fällen an *relativen* Änderungsraten interessiert.

Skaleninvarianz und *relative* Änderungsraten erhalten wir durch

$$\frac{\text{Änderung des Funktionswertes in \% des Funktionswertes}}{\text{Änderung des Arguments in \% des Argumentes}}$$

bzw. für die marginale Änderungsrate

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{f(x)}}{\frac{\Delta x}{x}} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \cdot \frac{x}{f(x)} = f'(x) \cdot \frac{x}{f(x)}$$

Elastizität

Der Ausdruck

$$\boxed{\varepsilon_f(x) = x \cdot \frac{f'(x)}{f(x)}}$$

heißt die **Elastizität** von f an der Stelle x.

Sei $f(x) = 3\,e^{2x}$. Dann ist

$$\varepsilon_f(x) = x \cdot \frac{f'(x)}{f(x)} = x \cdot \frac{6\,e^{2x}}{3\,e^{2x}} = 2\,x$$

Sei $f(x) = \beta\,x^{\alpha}$. Dann ist

$$\varepsilon_f(x) = x \cdot \frac{f'(x)}{f(x)} = x \cdot \frac{\beta\,\alpha\,x^{\alpha-1}}{\beta\,x^{\alpha}} = \alpha$$

Elastizität II

Wir können die relative Änderungsrate von f ausdrücken als Ableitung

$$\ln(f(x))' = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

Was passiert, wenn wir $\ln(f(x))$ nach $\ln(x)$ ableiten?

Sei $\quad v = \ln(x) \quad \Leftrightarrow \quad x = e^v$

Ableiten mittels Kettenregel ergibt:

$$\frac{d(\ln(f(x)))}{d(\ln(x))} = \frac{d(\ln(f(e^v)))}{dv} = \frac{f'(e^v)}{f(e^v)}\,e^v = \frac{f'(x)}{f(x)}\,x = \varepsilon_f(x)$$

$$\boxed{\varepsilon_f(x) = \frac{d(\ln(f(x)))}{d(\ln(x))}}$$

Elastizität II

Wir können die Kettenregel *formal* auch so schreiben:

Sei

- $u = \ln(y)$,
- $y = f(x)$,
- $x = e^v \quad \Leftrightarrow \quad v = \ln(x)$

Dann erhalten wir

$$\frac{d(\ln f)}{d(\ln x)} = \frac{du}{dv} = \frac{du}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dv} = \frac{1}{y} \cdot f'(x) \cdot e^v = \frac{f'(x)}{f(x)}\,x$$

Elastische Funktionen

Eine Funktion f heißt in x

- **elastisch**, falls $\left|\, \varepsilon_f(x) \,\right| > 1$
- **1-elastisch**, falls $\left|\, \varepsilon_f(x) \,\right| = 1$
- **unelastisch**, falls $\left|\, \varepsilon_f(x) \,\right| < 1$

Für eine elastische Funktion gilt daher:
Der Funktionswert ändert sich *relative* stärker als das Argument.

Die Funktion $f(x) = 3\,e^{2x}$ ist $[\ \varepsilon_f(x) = 2\,x\ ]$

- 1-elastisch, für $x = -\frac{1}{2}$ und $x = \frac{1}{2}$;
- unelastisch, für $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$;
- elastisch, für $x < -\frac{1}{2}$ oder $x > \frac{1}{2}$.

elastische Nachfragefunktion

Sei $q(p)$ eine *elastische* Nachfragefunktion, p der Preis.
Es gilt: $p > 0$, $q > 0$, und $q' < 0$ (q ist monoton fallend). Also gilt

$$\varepsilon_q(p) = p \cdot \frac{q'(p)}{q(p)} < -1$$

Was passiert mit dem Umsatz (= Preis $\times$ Absatz)?

$$\begin{aligned} u'(p) &= (p \cdot q(p))' = 1 \cdot q(p) + p \cdot q'(p) \\ &= q(p) \cdot (1 + \underbrace{p \cdot \frac{q'(p)}{q(p)}}_{=\varepsilon_q < -1}) \\ &< 0 \end{aligned}$$

Das heißt, der Umsatz nimmt ab, falls wir den Preis erhöhen.

Aufgabe 7.8

Berechnen Sie die Bereiche, in denen die folgenden Funktionen elastisch, 1-elastisch bzw. unelastisch sind.

(a) $g(x) = x^3 - 2\,x^2$

(b) $h(x) = \alpha\, x^\beta, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \beta > 0$

Lösung 7.8

(a) $\varepsilon_g(x) = \frac{3\,x^3 - 4\,x^2}{x^3 - 2\,x^2}$,
1-elastisch für $x = 1$ und $x = \frac{3}{2}$,
elastisch für $x < 1$ und $x > \frac{3}{2}$,
unelastisch für $1 < x < \frac{3}{2}$.
(b) $\varepsilon_h(x) = \beta$,
die Elasizität von $h(x)$ hängt nur vom Parameter β ab und ist im gesamten Definitionsbereich gleich groß.
Hinweis: Beachten Sie bitte bei der Berechnung den Absolutbetrag.

Aufgabe 7.9

Welche der folgenden Aussagen ist richtig? Wenn eine Funktion $y = f(x)$ in einem Intervall elastisch ist, so gilt in diesem Intervall:

(a) Wenn sich x um eine Einheit ändert, so ändert sich y um mehr als eine Einheit.

(b) Wenn sich x um ein Prozent ändert, so ändert sich y um mehr als ein Prozent.

(c) y ändert sich relativ stärker als x.

(d) Je größer x wird, desto größer wird auch y.

Lösung 7.9

richtig ist (c). Die Aussage (b) stimmt nur näherungsweise.

Partielle Ableitung

Wir untersuchen die Änderung einer Funktion $f(x_1, \ldots, x_n)$, wenn wir eine Variable x_i variieren und alle anderen konstant lassen.

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x_i} = \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{f(\ldots, x_i + \Delta x_i, \ldots) - f(\ldots, x_i, \ldots)}{\Delta x_i}}$$

heißt die (erste) **partielle Anleitung** von f nach x_i.

Es haben sich eine Reihe von weiteren Symbolen für die partielle Ableitungung $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ eingebürgert:

- $f_{x_i}(\mathbf{x})$ (Ableitung nach der Variable x_i)
- $f_i(\mathbf{x})$ (Ableitung nach der i-ten Variable)
- $f'_i(\mathbf{x})$ (i-te Komponente des Gradienten)

Berechnung der partiellen Ableitung

Wir erhalten die partielle Ableitung nach x_i, wenn wir alle anderen Variablen als Konstante auffassen und f nach den bekannten Regeln für Funktionen in einer Variable nach x_i ableiten.

Erste partiellen Ableitungen von

$$f(x_1, x_2) = \sin(2\,x_1) \cdot \cos(x_2)$$

$$f_{x_1} = 2 \cdot \cos(2\,x_1) \cdot \underbrace{\cos(x_2)}_{\text{als Konstante betrachtet}}$$

$$f_{x_2} = \underbrace{\sin(2\,x_1)}_{\text{als Konstante betrachtet}} \cdot(-\sin(x_2))$$

Höhere partielle Ableitungen

Analog zu den Funktionen in einer Variablen können wir partielle Ableitungen nochmals ableiten und erhalten so **höhere partielle Ableitungen**.

$$\boxed{f_{x_i x_k}(\mathbf{x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_i}(\mathbf{x}) \quad \text{bzw.} \quad f_{x_i x_i}(\mathbf{x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(\mathbf{x})}$$

Falls alle zweiten partiellen Ableitungen existieren und *stetig* sind, dann kommt auf die Reihenfolge beim Differenzieren nicht an.

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_i}(\mathbf{x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}(\mathbf{x})}$$

Beispiel

Gesucht sind alle ersten und zweiten partiellen Ableitungen von

$$f(x,y) = x^2 + 3\,x\,y$$

Erste partielle Ableitungen:

$$f_x = 2\,x + 3\,y \qquad f_y = 0 + 3\,x$$

Zweite partielle Ableitungen:

$$\begin{aligned} f_{xx} &= 2 & \qquad f_{xy} &= \boxed{3} \\ f_{yx} &= \boxed{3} & \qquad f_{yy} &= 0 \end{aligned}$$

Aufgabe 7.10

Berechnen Sie die ersten und zweiten partiellen Ableitungen der folgenden Funktionen an der Stelle $(1,1)$:

(a) $f(x,y) = x + y$

(b) $f(x,y) = x\,y$

(c) $f(x,y) = x^2 + y^2$

(d) $f(x,y) = x^2\,y^2$

(e) $f(x,y) = x^\alpha\,y^\beta, \quad \alpha,\beta > 0$

Lösung 7.10

Ableitungen:

	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)
f_x	1	y	$2\,x$	$2\,x\,y^2$	$\alpha\,x^{\alpha-1}\,y^\beta$
f_y	1	x	$2\,y$	$2\,x^2\,y$	$\beta\,x^\alpha\,y^{\beta-1}$
f_{xx}	0	0	2	$2\,y^2$	$\alpha(\alpha-1)\,x^{\alpha-2}\,y^\beta$
$f_{xy} = f_{yx}$	0	1	0	$4\,x\,y$	$\alpha\,\beta\,x^{\alpha-1}\,y^{\beta-1}$
f_{yy}	0	0	2	$2\,x^2$	$\beta(\beta-1)\,x^\alpha\,y^{\beta-2}$

Lösung 7.10 / 2

Ableitungen an der Stelle $(1,1)$:

	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)
f_x	1	1	2	2	α
f_y	1	1	2	2	β
f_{xx}	0	0	2	2	$\alpha(\alpha-1)$
$f_{xy}=f_{yx}$	0	1	0	4	$\alpha\,\beta$
f_{yy}	0	0	2	2	$\beta(\beta-1)$

Aufgabe 7.11

Berechnen Sie die ersten und zweiten partiellen Ableitungen der folgenden Funktionen an der Stelle $(1,1)$:

(a) $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$

(b) $f(x,y)=(x^3+y^3)^{\frac{1}{3}}$

(c) $f(x,y)=(x^p+y^p)^{\frac{1}{p}}$

Lösung 7.11

Ableitungen:

	(a)
f_x	$x(x^2+y^2)^{-1/2}$
f_y	$y(x^2+y^2)^{-1/2}$
f_{xx}	$(x^2+y^2)^{-1/2}-x^2(x^2+y^2)^{-3/2}$
$f_{xy}=f_{yx}$	$-xy(x^2+y^2)^{-3/2}$
f_{yy}	$(x^2+y^2)^{-1/2}-y^2(x^2+y^2)^{-3/2}$

	(b)
f_x	$x^2(x^3+y^3)^{-2/3}$
f_y	$y^2(x^3+y^3)^{-2/3}$
f_{xx}	$2x(x^3+y^3)^{-2/3}-2x^4(x^3+y^3)^{-5/3}$
$f_{xy}=f_{yx}$	$-2x^2y^2(x^3+y^3)^{-5/3}$
f_{yy}	$2y(x^3+y^3)^{-2/3}-2y^4(x^3+y^3)^{-5/3}$

Lösung 7.11 / 2

	(c)
f_x	$x^{p-1}(x^p+y^p)^{(1-p)/p}$
f_y	$y^{p-1}(x^p+y^p)^{(1-p)/p}$
f_{xx}	$(p-1)x^{p-2}(x^p+y^p)^{(1-p)/p} - (p-1)x^{2(p-1)}(x^p+y^p)^{(1-2p}$
$f_{xy} = f_{yx}$	$-(p-1)x^{p-1}y^{p-1}(x^p+y^p)^{(1-2p)/p}$
f_{yy}	$(p-1)y^{p-2}(x^p+y^p)^{(1-p)/p} - (p-1)y^{2(p-1)}(x^p+y^p)^{(1-2p}$

Lösung 7.11 / 3

Ableitungen an der Stelle $(1,1)$:

	(a)	(b)	(c)
f_x	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$	$2^{(1-p)/p}$
f_y	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$	$2^{(1-p)/p}$
f_{xx}	$\frac{1}{\sqrt{8}}$	$\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$	$(p-1)2^{(1-2p)/p}$
$f_{xy} = f_{yx}$	$-\frac{1}{\sqrt{8}}$	$-\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$	$-(p-1)2^{(1-2p)/p}$
f_{yy}	$\frac{1}{\sqrt{8}}$	$\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$	$(p-1)2^{(1-2p)/p}$

Aufgabe 7.12

Berechnen Sie die ersten und zweiten partiellen Ableitungen der Funktion

$$f(x,y) = \exp(x^2+y^2)$$

an der Stelle $(0,0)$.

Lösung 7.12

– Fehlt –

Der Gradient

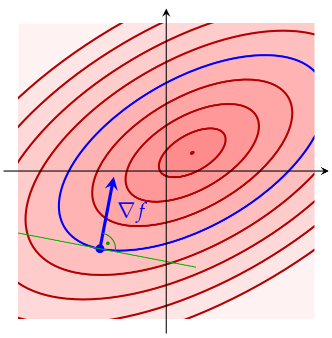
Wir fassen die partiellen Ableitungen erster Ordnung zu einem Zeilenvektor, dem **Gradienten** an der Stelle $\mathbf{x}$, zusammen.

$$\boxed{\nabla f(\mathbf{x}) = (f_{x_1}(\mathbf{x}), \dots, f_{x_n}(\mathbf{x}))}$$

- ∇f heißt auch „Nabla f".
- Der Gradient wird oft auch als Spaltenvektor geschrieben.
- Andere Notationen: $f'(\mathbf{x})$
- Der Gradient „spielt" die gleiche Rolle wie die erste Ableitung bei Funktionen in einer Variablen.

Eigenschaften des Gradienten

- Der Gradient einer Funktion f zeigt in die Richtung des steilsten Anstieges von f.
- Seine Länge gibt diese Steigung an.
- Der Gradient steht immer normal auf die entsprechende Niveaulinie.



Beispiel

Gesucht ist der Gradient von

$$f(x, y) = x^2 + 3\,x\,y$$

an der Stelle $\mathbf{x} = (3, 2)$.

$$\begin{aligned} f_x &= 2\,x + 3\,y \\ f_y &= 0 + 3\,x \end{aligned}$$

$$\nabla f(\mathbf{x}) = (2x + 3y,\ 3x)$$

$$\nabla f(3, 2) = (12, 9)$$

Aufgabe 7.13

Berechnen Sie den Gradienten der folgenden Funktionen an der Stelle $(1, 1)$:

(a) $f(x, y) = x + y$

(b) $f(x, y) = x\,y$

(c) $f(x, y) = x^2 + y^2$

(d) $f(x, y) = x^2\,y^2$

(e) $f(x, y) = x^\alpha\,y^\beta, \quad \alpha, \beta > 0$

Lösung 7.13

Gradient:
(a) $\nabla f(x, y) = (1, 1)$,
(b) $\nabla f(x, y) = (y, x)$,
(c) $\nabla f(x, y) = (2x, 2y)$,
(d) $\nabla f(x, y) = (2xy^2, 2x^2y)$,
(e) $\nabla f(x, y) = (\alpha\,x^{\alpha-1}\,y^\beta, \beta\,x^\alpha\,y^{\beta-1})$,

Gradient an der Stelle $(1, 1)$:
(a) $\nabla f(x, y) = (1, 1)$,
(b) $\nabla f(x, y) = (1, 1)$,
(c) $\nabla f(x, y) = (2, 2)$,
(d) $\nabla f(x, y) = (2, 2)$,
(e) $\nabla f(x, y) = (\alpha, \beta)$.

Aufgabe 7.14

Berechnen Sie den Gradienten der folgenden Funktionen an der Stelle $(1,1)$:

(a) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$

(b) $f(x,y) = (x^3+y^3)^{\frac{1}{3}}$

(c) $f(x,y) = (x^p+y^p)^{\frac{1}{p}}$

Lösung 7.14

Gradient:
(a) $\nabla f(x,y) = (x(x^2+y^2)^{-1/2},\ y(x^2+y^2)^{-1/2})$,
(b) $\nabla f(x,y) = (x^2(x^3+y^3)^{-2/3},\ y^2(x^3+y^3)^{-2/3})$,
(c) $\nabla f(x,y) = (x^{p-1}(x^p+y^p)^{(1-p)/p},\ y^{p-1}(x^p+y^p)^{(1-p)/p})$,

Gradient an der Stelle $(1,1)$:
(a) $\nabla f(x,y) = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$,
(b) $\nabla f(x,y) = (\frac{1}{\sqrt[3]{4}}, \frac{1}{\sqrt[3]{4}})$,
(c) $\nabla f(x,y) = (2^{(1-p)/p}, 2^{(1-p)/p})$.

Das totale Differential

Wir wollen eine Funktion f durch eine lineare Funktion so approximieren, dass der Fehler möglichst klein ist.
Den Funktionswert an einer Stelle $\mathbf{x}+\mathbf{h}$ können wir näherungsweise analog zur Richtungsableitung berechnen.

$$f(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{x}) \approx f_{x_1}(\mathbf{x})\, h_1 + \ldots + f_{x_n}(\mathbf{x})\, h_n$$

Das totale Differential erhalten wir, wenn wir die h_i durch „unendlich kleine“ Differentiale dx_i ersetzen.

Die *lineare Funktion*

$$\boxed{df = f_{x_1}(\mathbf{x})\, dx_1 + \ldots + f_{x_n}(\mathbf{x})\, dx_n = \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}\, dx_i}$$

heißt das **totale Differential** von f an der Stelle $\mathbf{x}$.

Beispiel

Wir suchen das totale Differential von

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + 3\, x_1\, x_2$$

an der Stelle $\mathbf{x} = (3, 2)$.

$$df = f_{x_1}(3,2)\, dx_1 + f_{x_2}(3,2)\, dx_2 = 12\, dx_1 + 9\, dx_2$$

Approximation von $f(3,1; 1,8)$ mit Hilfe des totalen Differentials:

$$\begin{aligned} f(3,1;1,8) &\approx f(3;2) + df \\ &= 27 + 12 \cdot 0,1 + 9 \cdot (-0,2) = 26,40 \end{aligned}$$

Zum Vergleich: $f(3,1;1,8) = 26,35$

$$\mathbf{h} = (\mathbf{x} + \mathbf{h}) - \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 3,1 \\ 1,8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,1 \\ -0,2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 7.15

Sei

$$f(x, y) = 100\, (y - x^2)^2 + (1 - x)^2$$

Berechnen Sie

(a) den Gradienten ∇f von f an der Stelle $(-1, 1)$,

(b) das totale Differential an der Stelle $(-1, 1)$,

(c) mit dessen Hilfe eine Näherung für f an der Stelle $(0, 0)$,

Lösung 7.15

Die partiellen Ableitungen sind
$f_x = -400\, x\, (y - x^2) + 2\, (1 - x)\, (-1)$ und
$f_y = 200\, (y - x^2)$.
(a) $(-4, 0)^t$;
(b) $df = -4\, dx$;
(c) 0.

Jacobische Matrix

Sei $\mathbf{f}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} f_1(x_1,\dots,x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1,\dots,x_n) \end{pmatrix}$

Dann heißt die $m \times n$-Matrix

$$\boxed{D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{f}'(\mathbf{x}_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}}$$

die **Jacobische Matrix** von $\mathbf{f}$ an der Stelle $\mathbf{x}_0$.

Sie ist die *„Ableitung"* dieser vektorwertigen Funktion und somit eine Verallgemeinerung des Gradienten.

Beispiel

- $f(\mathbf{x}) = f(x_1,x_2) = \exp(-x_1^2 - x_2^2)$
  $$D f(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}\right) = \nabla f(\mathbf{x})$$
  $$= \left(-2\,x_1 \exp(-x_1^2 - x_2^2), -2\,x_2 \exp(-x_1^2 - x_2^2)\right)$$
- $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} f_1(x_1,x_2) \\ f_2(x_1,x_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2^2 \\ x_1^2 - x_2^2 \end{pmatrix}$
  $$D\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\,x_1 & 2\,x_2 \\ 2\,x_1 & -2\,x_2 \end{pmatrix}$$
- $\mathbf{s}(t) = \begin{pmatrix} s_1(t) \\ s_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$
  $$D\mathbf{s}(t) = \begin{pmatrix} \frac{ds_1}{dt} \\ \frac{ds_2}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}$$

Kettenregel

Seien $\mathbf{f}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ und $\mathbf{g}\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$. Dann gilt

$$\boxed{D(\mathbf{g} \circ \mathbf{f})(\mathbf{x}) = D\mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{x})) \cdot D\mathbf{f}(\mathbf{x})}$$

$$\mathbf{f}(x,y) = \begin{pmatrix} e^x \\ e^y \end{pmatrix} \qquad \mathbf{g}(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 \\ x^2 - y^2 \end{pmatrix}$$

$$D\mathbf{f}(x,y) = \begin{pmatrix} e^x & 0 \\ 0 & e^y \end{pmatrix} \qquad D\mathbf{g}(x,y) = \begin{pmatrix} 2\,x & 2\,y \\ 2\,x & -2\,y \end{pmatrix}$$

$$D(\mathbf{g} \circ \mathbf{f})(\mathbf{x}) = D\mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{x})) \cdot D\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 2\,e^x & 2\,e^y \\ 2\,e^x & -2\,e^y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^x & 0 \\ 0 & e^y \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 2\,e^{2x} & 2\,e^{2y} \\ 2\,e^{2x} & -2\,e^{2y} \end{pmatrix}$$

Beispiel – Indirekte Abhängigkeit

Sei $f(x_1, x_2, t)$ wobei $x_1(t)$ und $x_2(t)$ ebenfalls von t abhängen.
Wie ändert sich f mit t?

Kettenregel:
Sei $\mathbf{x}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\ t \mapsto \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ t \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}
\frac{df}{dt} &= D(f \circ \mathbf{x})(t) = Df(\mathbf{x}(t)) \cdot D\mathbf{x}(t) \\
&= \nabla f(\mathbf{x}(t)) \cdot \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ 1 \end{pmatrix} = (f_{x_1}(\mathbf{x}(t)), f_{x_2}(\mathbf{x}(t)), f_t(\mathbf{x}(t))) \cdot \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= f_{x_1}(\mathbf{x}(t)) \cdot x_1'(t) + f_{x_2}(\mathbf{x}(t)) \cdot x_2'(t) + f_t(\mathbf{x}(t)) \\
&= f_{x_1}(x_1, x_2, t) \cdot x_1'(t) + f_{x_2}(x_1, x_2, t) \cdot x_2'(t) + f_t(x_1, x_2, t)
\end{aligned}$$

Aufgabe 7.16

Sei

$$f(x, y) = x^2 + y^2 \quad \text{und} \quad \mathbf{g}(t) = \begin{pmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Ableitung der zusammengesetzten Funktion
$h = f \circ \mathbf{g}$ mit Hilfe der Kettenregel.

Lösung 7.16

$Dh(t) = Df(\mathbf{g}(t)) \cdot D\mathbf{g}(t) = (2g_1(t), 2g_2(t)) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix} =$

$(2t, 2t^2) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix} = 2t + 4t^3.$

(Die zusammengesetzte Funktion lautet $h(t) = f(\mathbf{g}(t)) = t^2 + t^4$.)

Aufgabe 7.17

Seien $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (x_1^3 - x_2, x_1 - x_2^3)^t$ und $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = (x_2^2, x_1)^t$. Berechnen Sie die Ableitungen der zusammengesetzten Funktionen $\mathbf{g} \circ \mathbf{f}$ und $\mathbf{f} \circ \mathbf{g}$ mit Hilfe der Kettenregel.

Lösung 7.17

$$D\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 3x_1^2 & -1 \\ 1 & -3x_2^2 \end{pmatrix}, D\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 & 2x_2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$D(\mathbf{g} \circ \mathbf{f})(\mathbf{x}) = D\mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{x}))\, D\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 & 2(x_1 - x_2^3) \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3x_1^2 & -1 \\ 1 & -3x_2^2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2(x_1 - x_2^3) & 6(-x_1 x_2^2 + x_2^5) \\ 3x_1^2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$D(\mathbf{f} \circ \mathbf{g})(\mathbf{x}) = D\mathbf{f}(\mathbf{g}(\mathbf{x}))\, D\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 3x_2^4 & -1 \\ 1 & -3x_1^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2x_2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 6x_2^5 \\ -3x_1^2 & 2x_2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 7.18

Sei $Q(K, L, t)$ eine Produktionsfunktion, wobei $L = L(t)$ und $K = K(t)$ selbst Funktionen der Zeit t sind. Berechnen Sie $\frac{dQ}{dt}$ mit Hilfe der Kettenregel.

Lösung 7.18

Sei $\mathbf{s}(t) = \begin{pmatrix} K(t) \\ L(t) \\ t \end{pmatrix}$. Dann ist

$\frac{dQ}{dt} = DQ(\mathbf{s}(t)) \cdot D\mathbf{s}(t) = (Q_K(\mathbf{s}(t)), Q_L(\mathbf{s}(t)), Q_t(\mathbf{s}(t)) \cdot \begin{pmatrix} K'(t) \\ L'(t) \\ 1 \end{pmatrix} = Q_K K'(t) + Q_L L'(t) + Q_t.$

Aufgabe 7.19

Sei $\mathbf{A}$ eine $n \times m$ Matrix. Bestimmen Sie die Jacobische Matrix der Funktion $\mathbf{f}\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{A}\mathbf{x}$.

Lösung 7.19

$D\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}.$

Kapitel 8

Monotonie, Konkavität und Extrema

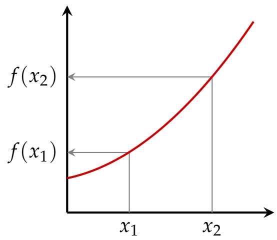
Monotonie

Eine Funktion f heißt **monoton steigend**, falls

$$x_1 \leq x_2 \;\Leftrightarrow\; f(x_1) \leq f(x_2)$$

Sie heißt *streng monoton steigend*, falls

$$x_1 < x_2 \;\Leftrightarrow\; f(x_1) < f(x_2)$$

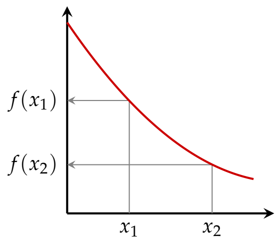


Eine Funktion f heißt **monoton fallend**, falls

$$x_1 \leq x_2 \Leftrightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$

Sie heißt *streng monoton fallend*, falls

$$x_1 < x_2 \;\Leftrightarrow\; f(x_1) > f(x_2)$$



Monotonie

Für differenzierbare Funktionen gilt:

f monoton steigend	$\Leftrightarrow$	$f'(x) \geq 0$	für alle $x \in D_f$
f monoton fallend	$\Leftrightarrow$	$f'(x) \leq 0$	für alle $x \in D_f$

f streng monoton steigend	$\Leftarrow$	$f'(x) > 0$	für alle $x \in D_f$
f streng monoton fallend	$\Leftarrow$	$f'(x) < 0$	für alle $x \in D_f$

Die Funktion $f\colon (0,\infty),\; x \mapsto \ln(x)$ ist streng monoton steigend, da

$$f'(x) = (\ln(x))' = \frac{1}{x} > 0 \quad \text{für alle } x > 0$$

Lokale Monotonie

Eine Funktion kann in einem bestimmten Intervall monoton steigend, in einem anderen monoton fallend sein. Sie wird dann als **lokal monoton** auf dem entsprechenden Abschnitt bezeichnet.

Für *stetig* differenzierbare Funktionen eignet sich folgende Vorgangsweise:

1. Berechne erste Ableitung $f'(x)$.
2. Bestimme Nullstellen von $f'(x)$.
3. Erhalte Intervalle, in denen $f'(x)$ das Vorzeichen nicht wechselt.
4. Wähle „geeigneten" Punkt in jedem Intervall und bestimme dort das Vorzeichen von $f'(x)$.
5. $f'(x)$ kann innerhalb eines Intervalls das Vorzeichen nicht ändern.

Beispiel – Lokale Monotonie

In welchen Bereichen ist $f(x) = 2\,x^3 - 12\,x^2 + 18\,x - 1$ monoton?

Suchen den Bereich, wo $f'(x) \geq 0$:

1. $f'(x) = 6\,x^2 - 24\,x + 18$
2. Nullstellen: $x^2 - 4\,x + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 1,\ x_2 = 3$
3. Erhalte 3 Intervalle: $(-\infty, 1]$, $[1, 3]$ und $[3, \infty)$
4. Vorzeichen von $f(x)$ an „geeigneten" Punkt in jedem Intervall: $f'(0) = 3 > 0$, $f'(2) = -1 < 0$ und $f'(4) = 3 > 0$.
5. $f'(x)$ kann innerhalb eines Intervalls das Vorzeichen nicht ändern: $f'(x) \geq 0$ in $(-\infty, 1]$ und $[3, \infty)$.

Die Funktion $f(x)$ ist monoton steigend in $(-\infty, 1] \cup [3, \infty)$.

Monotonie und inverse Funktion

Beachte:
Falls f *streng monoton* steigend ist, dann folgt aus

$$x_1 < x_2 \ \Leftrightarrow\ f(x_1) < f(x_2)$$

sofort auch

$$x_1 \neq x_2 \ \Leftrightarrow\ f(x_1) \neq f(x_2)$$

M.a.W., f ist injektiv. Falls f auch surjektiv ist, ist f somit *invertierbar*.

Falls eine surjektive Funktion f streng monoton steigend oder fallend ist, dann ist sie auch invertierbar.

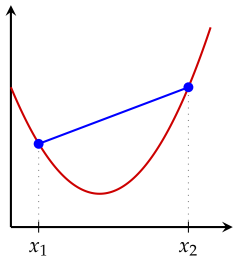
Konvexität und Konkavität

Eine Funktion f heißt **konvex**, wenn

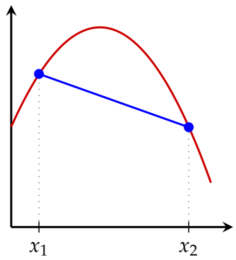
$$\boxed{f((1-h)\,x_1 + h\,x_2) \leq (1-h)\,f(x_1) + h\,f(x_2)}$$

für alle $x_1, x_2 \in D_f$ und alle $h \in [0,1]$. Sie heißt **konkav**, wenn

$$\boxed{f((1-h)\,x_1 + h\,x_2) \geq (1-h)\,f(x_1) + h\,f(x_2)}$$



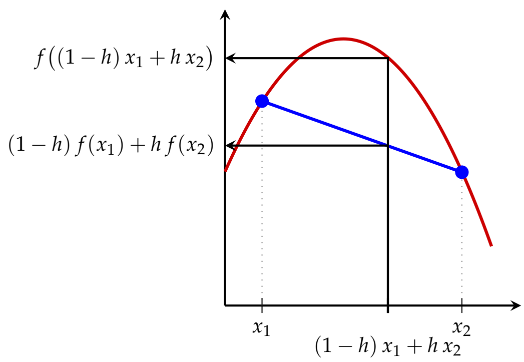
konvex



konkav

Konkave Funktion

$$f\big((1-h)\,x_1 + h\,x_2\big) \;\geq\; (1-h)\,f(x_1) + h\,f(x_2)$$

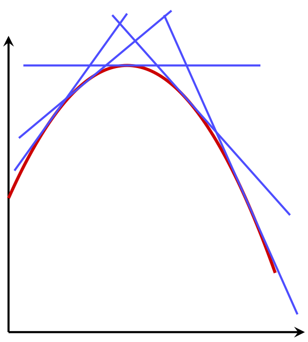


Sehne unterhalb des Funktionsgraphen.

Konvexität und Konkavität

Für differenzierbare Funktionen gilt:

f konvex	$\Leftrightarrow$	$f''(x) \geq 0$	für alle $x \in D_f$
f konkav	$\Leftrightarrow$	$f''(x) \leq 0$	für alle $x \in D_f$



$f'(x)$ ist monoton fallend,
daher $f''(x) \leq 0$

Streng konvex / konkav

Eine Funktion f heißt **streng konvex**, wenn

$$\boxed{f((1-h)\,x_1 + h\,x_2) < (1-h)\,f(x_1) + h\,f(x_2)}$$

für alle $x_1, x_2 \in D_f$, $x_1 \neq x_2$ und alle $h \in (0,1)$.

Sie heißt **streng konkav**, wenn

$$\boxed{f((1-h)\,x_1 + h\,x_2) > (1-h)\,f(x_1) + h\,f(x_2)}$$

Für differenzierbare Funktionen gilt:

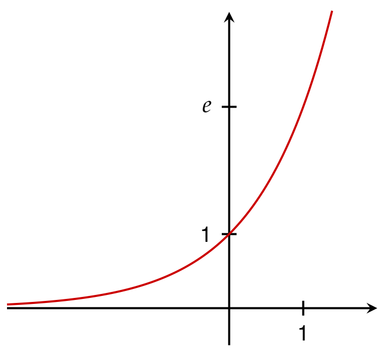
$$\boxed{\begin{array}{llll} f \text{ streng konvex} & \Leftarrow & f''(x) > 0 & \text{für alle } x \in D_f \\ f \text{ streng konkav} & \Leftarrow & f''(x) < 0 & \text{für alle } x \in D_f \end{array}}$$

Beispiel – konvex

Exponentialfunktion:

$$f(x) = e^x$$
$$f'(x) = e^x$$
$$f''(x) = e^x > 0 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$

$\exp(x)$ ist (streng) konvex.

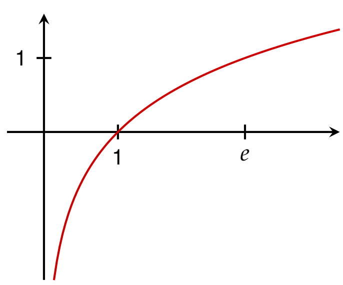


Beispiel – konkav

Logarithmusfunktion: $(x > 0)$

$$f(x) = \ln(x)$$
$$f'(x) = \frac{1}{x}$$
$$f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0 \quad \text{für alle } x > 0$$

$\ln(x)$ ist (streng) konkav.



Lokale Konkavität

Eine Funktion kann auch auf einem bestimmten Intervall konkav, auf einem anderen konvex sein. Sie wird dann als **lokal konkav**, bzw. **lokal konvex** auf dem entsprechenden Abschnitt bezeichnet.

Für *stetig* differenzierbare Funktionen eignet sich folgende Vorgangsweise:

1. Berechne zweite Ableitung $f''(x)$.
2. Bestimme Nullstellen von $f''(x)$.
3. Erhalte Intervalle, in denen $f''(x)$ das Vorzeichen nicht wechselt.
4. Wähle „geeigneten" Punkt in jedem Intervall und bestimme dort das Vorzeichen von $f''(x)$.
5. $f''(x)$ kann innerhalb eines Intervalls das Vorzeichen nicht ändern.

Beispiel – Lokale Konkavität

In welchem Bereich ist $f(x) = 2\,x^3 - 12\,x^2 + 18\,x - 1$ konkav?

Suchen den Bereich, wo $f''(x) \leq 0$.

1. $f''(x) = 12\,x - 24$
2. Nullstellen: $12\,x - 24 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 2$
3. Erhalte 2 Intervalle: $(-\infty, 2]$ und $[2, \infty)$
4. Vorzeichen von $f(x)$ an „geeigneten" Punkt in jedem Intervall: $f''(0) = -24 < 0$ und $f''(4) = 24 > 0$.
5. $f''(x)$ kann innerhalb eines Intervalls das Vorzeichen nicht ändern: $f''(x) \leq 0$ in $(-\infty, 2]$

Die Funktion $f(x)$ ist konkav in $(-\infty, 2]$.

Aufgabe 8.1

Bestimmen Sie die mit Hilfe der zweiten Ableitung die Krümmung (d.h. Konkavität oder Konvexität) folgender Funktionen. Welche Fälle sind möglich?

(a) $\exp(x)$
(b) $\ln(x)$
(c) $\log_{10}(x)$
(d) x^α für $x > 0$ für ein $\alpha \in \mathbb{R}$.

Lösung 8.1

(a) konvex;
(b) konkav;
(c) konkav;
(d) konvex falls $\alpha \geq 1$ und $\alpha \leq 0$,
konkav falls $0 \leq \alpha \leq 1$.

Aufgabe 8.2

In welchem Bereich ist die Funktion

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 19$$

monoton steigend bzw. fallend?
In welchem Bereich ist die konvex bzw. konkav?

Lösung 8.2

Monoton fallend in $[-1, 3]$,
monoton steigend in $(-\infty, -1] \cup [3, \infty)$;

Konkav in $(-\infty, 1]$,
konvex in $[1, \infty)$.

Aufgabe 8.3

In welchem Bereich ist die Funktion

$$x\, e^{x^2}$$

monoton steigend bzw. fallend?
In welchem Bereich ist die konvex bzw. konkav?

Lösung 8.3

Monoton steigend in $\mathbb{R}$,
Konkav in $(-\infty, 0]$,
konvex in $[0, \infty)$.

Aufgabe 8.4

Die Funktion

$$f(x) = b\, x^{1-a} \qquad 0 < a < 1,\, b > 0,\, x \geq 0$$

ist ein Beispiel für eine Produktionsfunktion, d.h. mit x Einheiten Arbeit kann man $f(x)$ Güter produzieren.

Produktionsfunktionen haben i.a. folgende Eigenschaften:

(1) $f(0) = 0, \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$

(2) $f'(x) > 0, \quad \lim_{x\to\infty} f'(x) = 0$

(3) $f''(x) < 0$

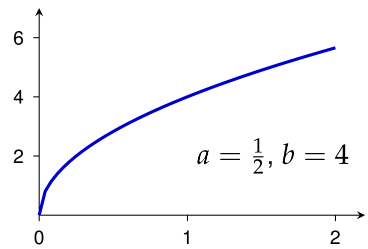
(a) Überprüfen Sie diese Eigenschaften an der obigen Funktion.

(b) Zeichnen Sie $f(x)$ und $f'(x)$.
(Setzen Sie dabei für a und b geeignete Werte ein.)

Aufgabe 8.4 / 2

(c) Was bedeuten diese Eigenschaften inhaltlich?
(z.B.: Wenn $x = 0$, wird nichts produziert.)

Lösung 8.4



Hinweis: Bilden Sie die erste und zweite Ableitung und überprüfen Sie, ob die angegebenen Eigenschaften von der Funktion auch tatsächlich erfüllt werden. Beachten Sie dabei, welche Einschränkungen a und b genügen. Z.B.: $f''(x) = \underbrace{b\,a}_{>0}\underbrace{(a-1)}_{<0}\underbrace{x^{-a-1}}_{>0} < 0$.

Aufgabe 8.5

Die Funktion

$$f(x) = b\,\ln(ax+1) \qquad a, b > 0,\ x \geq 0$$

ist ein Beispiel für eine Nutzenfunktion. Konsumenten haben einen Nutzen $f(x)$, wenn sie x Einheiten eines Gutes konsumieren.

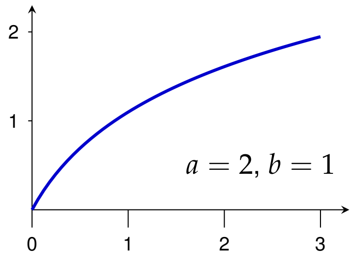
Nutzenfunktionen haben dieselben Eigenschaften wie Produktionsfunktionen.

(a) Überprüfen Sie die in Aufgabe 8.4 genannten Eigenschaften.

(b) Zeichnen Sie $f(x)$ und $f'(x)$.
(Setzen Sie dabei für a und b geeignete Werte ein.)

(c) Was bedeuten diese Eigenschaften in diesem Zusammenhang inhaltlich?

Lösung 8.5



Hinweis: Bilden Sie die erste und zweite Ableitung und überprüfen Sie, ob die angegebenen Eigenschaften von der Funktion auch tatsächlich erfüllt werden. Beachten Sie dabei, welche Einschränkungen a und b genügen. Z.B.:
$f''(x) = -a^2\,b\,(a\,x+1)^{-2} < 0$,
da $a, b, x > 0$.

Aufgabe 8.6

Zeigen Sie durch Einsetzen in die Definition, dass $f(x) = x^2$ streng konvex ist.

Hinweis: Zeigen Sie, dass die Ungleichung
$\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y\right)^2 - \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2\right) < 0$ für alle $x \neq y$ erfüllt ist.

Lösung 8.6

$$\left(\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{2}y\right)^2 - \left(\tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{2}y^2\right) = \tfrac{1}{4}x^2 + \tfrac{1}{2}xy + \tfrac{1}{4}y^2 - \tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{2}y^2 = -\tfrac{1}{4}x^2 + \tfrac{1}{2}xy - \tfrac{1}{4}y^2 = -\left(\tfrac{1}{4}x^2 - \tfrac{1}{2}xy + \tfrac{1}{4}y^2\right) = -\left(\tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{2}y\right)^2 < 0.$$

Aufgabe 8.7

Zeigen Sie:

Falls $f(x)$ eine differenzierbare konkave Funktion ist, dann ist $g(x) = -f(x)$ konvex.

Lösung 8.7

Da f konkav ist, gilt für alle x, $f''(x) \leq 0$.
Daher ist $g''(x) = (-f(x))'' = -f''(x) \geq 0$, i.e., g ist konvex.

Aufgabe 8.8

Seien $f(x)$ und $g(x)$ zwei differenzierbare konkave Funktionen auf $\mathbb{R}$.
Zeigen Sie mit Hilfe der zweiten Ableitung, dass auch $h(x) = \alpha\, f(x) + \beta\, g(x)$ für $\alpha, \beta > 0$ eine konkave Funktion ist.
Was passiert, falls $\alpha > 0$ und $\beta < 0$?

Lösung 8.8

$h''(x) = \alpha f''(x) + \beta g''(x) \leq 0$, i.e., h ist konkav. Falls $\beta < 0$ dann ist $\beta g''(x)$ nicht mehr negativ und das Vorzeichen von $\alpha f''(x) + \beta g''(x)$ kann nicht mehr allgemein bestimmt werden.

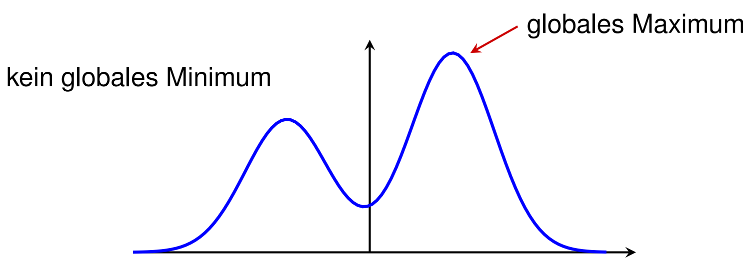
Globales Extremum (Optimum)

Ein Punkt x^* heißt **globales Maximum** (*absolutes Maximum*) von f, falls für alle $x \in D_f$ gilt:

$$f(x^*) \geq f(x)$$

Ein Punkt x^* heißt **globales Minimum** (*absolutes Minimum*) von f, falls für alle $x \in D_f$ gilt:

$$f(x^*) \leq f(x)$$



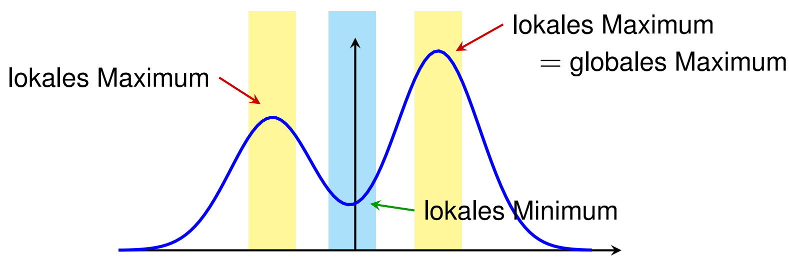
Lokales Extremum (Optimum)

Ein Punkt x_0 heißt **lokales Maximum** (*relatives* Maximum) von f, falls für alle x in einer *geeigneten Umgebung* von x_0 gilt:

$$f(x_0) \geq f(x)$$

Ein Punkt x_0 heißt **lokales Minimum** (*relatives Minimum*) von f, falls für alle x in einer geeigneten Umgebung von x_0 gilt:

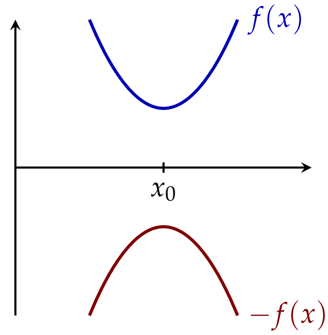
$$f(x_0) \leq f(x)$$



Minima und Maxima

Es sei darauf aufmerksam gemacht, dass wir aus einem Minimierungsproblem ein Maximierungsproblem machen können, und umgekehrt:

Ein Punkt x_0 ist ein Minimum von $f(x)$, genau dann wenn x_0 ein Maximum von $-f(x)$ ist.



Kritischer Punkt

In einem (lokalen) Maximum oder Minimum muss die Ableitung gleich Null sein.

Ein Punkt x_0 heißt **kritischer Punkt** (oder *stationärer Punkt*) einer Funktion f, wenn
$$f'(x_0) = 0$$

Notwendige Bedingung:

Jedes Extremum von f ist ein kritischer Punkt von f.

Globales Extremum

Hinreichende Bedingung:

Sei x_0 ein kritischer Punkt einer **konkaven** (oder *konvexen*) Funktion f. Dann ist x_0 ein **globales Maximum** (bzw. *globales Minimum*) von f.

Falls f *streng* konkav (oder konvex) ist, dann ist das Extremum eindeutig bestimmt.

Beispiel – Globales Extremum

Sei $f(x) = e^x - 2x$.

Die Funktion ist streng konvex:

$$f'(x) = e^x - 2$$
$$f''(x) = e^x \quad > 0 \quad \textbf{für alle } x \in \mathbb{R}$$

Kritischer Punkt:

$$f'(x) = e^x - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_0 = \ln 2$$

$x_0 = \ln 2$ ist das (eindeutig bestimmte) globale Minimum von f.

Lokal konkav

Ein Punkt x_0 ist ein **lokales Maximum** (oder *Minimum*) von f, falls

- x_0 ist ein **kritischer Punkt** von f,
- f ist **lokal konkav** (bzw. *lokal konvex*) um x_0.

Lokales Extremum

Hinreichende Bedingung:

Sei x_0 ein kritischer Punkt von f. Dann gilt

- $f''(x_0) < 0 \quad \Rightarrow \quad x_0$ ist lokales Maximum
- $f''(x_0) > 0 \quad \Rightarrow \quad x_0$ ist lokales Minimum

Es ist ausreichend $f''(x)$ am kritischen Punkt x_0 auszuwerten.
(Im Gegensatz zur Bedingung für globale Extrema.)

Notwendig und hinreichend

An Beispiel der lokalen Extrema in $\mathbb{R}$ seien kurz zwei wichtige Begriffe aus der mathematischen Argumentation erläutert.

Die Bedingung „$f'(x_0) = 0$“ ist **notwendig** für ein lokales Minimum:
Jedes lokale Minimum muss diese Eigenschaft haben.
Aber nicht jeder Punkt mit dieser Eigenschaft ist ein lokales Minimum (z.B. $x_0 = 0$ in $f(x) = x^3$).
Stationären Punkte sind *Kandidaten* für lokale Minima.

Die Bedingung „$f'(x_0) = 0$ *und* $f''(x_0) < 0$“ ist **hinreichend** für ein lokales Minimum.
Ist sie erfüllt, so ist x_0 ein lokales Minimum.
Es gibt aber auch Minima, die diese Bedingung nicht erfüllen (z.B. $x_0 = 0$ in $f(x) = x^4$).
Ist sie *nicht* erfüllt, so können wir daraus gar nichts *schließen*.

Vorgangsweise

Hinreichende Bedingung
für lokale Extremwerte einer Funktion in *einer* Variablen:

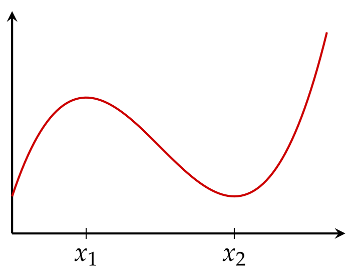
1. Berechne $f'(x)$ und $f''(x)$.
2. Suche alle Punkte x_i mit $f'(x_i) = 0$ (kritischen Punkte).
3. Falls $f''(x_i) < 0 \quad \Rightarrow \quad x_i$ ist ein *lokales Maximum*.
   Falls $f''(x_i) > 0 \quad \Rightarrow \quad x_i$ ist ein *lokales Minimum*.
   Falls $f''(x_i) = 0 \quad \Rightarrow$ *keine* Aussage möglich!

Beispiel – Lokales Minimum

Gesucht sind die lokalen Extrema der Funktion

$$f(x) = \frac{1}{12}x^3 - x^2 + 3x + 1$$

1. $f'(x) = \frac{1}{4}x^2 - 2x + 3$,
   $f''(x) = \frac{1}{2}x - 2$.
2. $\frac{1}{4}x^2 - 2x + 3 = 0$
   besitzt die Lösungen
   $x_1 = 2$ und $x_2 = 6$.
3. $f''(2) = -1 \quad \Rightarrow \quad x_1$ ist lokales Maximum.
   $f''(6) = 1 \quad \Rightarrow \quad x_2$ ist lokales Minimum.



Globale Extrema auf $[a, b]$

Extrema von $f(x)$ über einem **abgeschlossenen** Intervall $[a, b]$.

Vorgangsweise: (für differenzierbare Funktionen)

(1) Berechne $f'(x)$.

(2) Suche alle stationären Punkte x_i (d.h., $f'(x_i) = 0$).

(3) Berechne $f(x)$ für alle *Kandidaten*:
- alle stationären Punkte x_i,
- die Randpunkte a und b.

(4) Der größte dieser Werte ist ein **globale Maximum**, der kleinste dieser Werte ist ein **globale Minimum**.

Es ist *nicht* notwendig $f''(x_i)$ zu berechnen.

Globale Extrema auf $[a, b]$

Gesucht sind die *globalen* Extrema der Funktion

$$f\colon [0{,}5; 8{,}5] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{12}x^3 - x^2 + 3x + 1$$

(1) $f'(x) = \frac{1}{4}x^2 - 2x + 3$.

(2) $\frac{1}{4}x^2 - 2x + 3 = 0$ besitzt die Lösungen $x_1 = 2$ und $x_2 = 6$.

(3)
$f(0{,}5) = 2{,}260$
$f(2) = 3{,}667$
$f(6) = 1{,}000 \quad \Rightarrow$ globales Minimum
$f(8{,}5) = 5{,}427 \quad \Rightarrow$ globales Maximum

(4) $x_2 = 6$ ist ein globales Minimum und $b = 8{,}5$ ist ein globales Maximum von f.

Globale Extrema auf (a, b)

Extrema von $f(x)$ über einem **offenen** Intervall (a, b) (oder $(-\infty, \infty)$).

Vorgangsweise: (für differenzierbare Funktionen)

(1) Berechne $f'(x)$.

(2) Suche alle stationären Punkte x_i (d.h., $f'(x_i) = 0$).

(3) Berechne $f(x)$ für alle stationären Punkte x_i.

(4) Berechne $\lim_{x\to a} f(x)$ und $\lim_{x\to b} f(x)$.

(5) Der größte dieser Werte ist ein **globale Maximum**, der kleinste dieser Werte ist ein **globale Minimum**.

(6) Die globalen Extrema existieren aber **nur dann**, wenn sie an einem *stationären Punkt* angenommen werden!

Globale Extrema auf $[a, b]$

Gesucht sind die *globalen* Extrema der Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto e{-}x^2$$

(1) $f'(x) = -2x\, e^{-x^2}$.

(2) $f'(x) = -2x\, e^{-x^2} = 0$ besitzt die einzige Lösung $x_1 = 0$.

(3) $f(0) = 1 \quad \Rightarrow$ globales Maximum
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0 \quad \Rightarrow$ das globale Minimum existiert nicht
$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$

(4) Die Funktion besitzt das globales Maximum $x_1 = 0$,
aber kein globales Minimum.

Existenz und Eindeutigkeit

- Es kann sein,
dass eine Funktion weder Maxima noch Minima besitzt:

$$f\colon (0,1) \to \mathbb{R},\ x \mapsto x$$

(Die Punkte 1 und -1 liegen nicht in $(0, 1)$.)

- Es kann sein,
dass das globale Maximum nicht eindeutig bestimmt ist:

$$f\colon [-2,2] \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^4 - 2\,x^2$$

hat drei globale Maxima an den Stellen -2, 0 und 2, und
zwei globale Minima an den Stellen -1 und 1.

Aufgabe 8.9

Bestimmen Sie die lokalen Extremwerte der Funktionen

(a) $f(x) = (x-3)^6$

(b) $g(x) = \frac{x^2+1}{x}$

(c) $h(x) = e^{-x^2}$

Lösung 8.9

(a) Lokales Minimum in $x = 3$;
(b) Lokales Minimum in $x = 1$, lokales Maximum in $x = -1$;
(c) Lokales Maximum in $x = 0$.

Aufgabe 8.10

Berechnen Sie die globalen Extrema der Funktionen

(a) $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x} + x$

(b) $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{x} - x$

(c) $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto e^{-2x} + 2x$

(d) $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x - \ln(x)$

Lösung 8.10

(a) globales Minimum in $x = 1$, kein globales Maximum;
(b) globales Maximum in $x = \frac{1}{4}$, kein globales Minimum;
(c) globales Minimum in $x = 0$, kein globales Maximum;
(d) globales Minimum in $x = 1$, kein globales Maximum.

Aufgabe 8.11

Berechnen Sie die globale Maxima und Minima der Funktionen

(a) $f(x) = \frac{x^3}{12} - \frac{5}{4}x^2 + 4x - \frac{1}{2}$ im Intervall $[1, 12]$

(b) $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 - 3x + 2$ im Intervall $[-2, 6]$

(c) $f(x) = x^4 - 2\,x^2$ im Intervall $[-2, 2]$

Lösung 8.11

(a) Globales Maximum in $x = 12$, globales Minimum in $x = 8$;
(b) globales Maximum in $x = 6$, globales Minimum in $x = 3$;
(c) globale Maxima in $x = -2$ und $x = 2$,
globale Minima in $x = -1$ und $x = 1$.

Aufgabe 8.12

Der Gewinn eines Unternehmers für gegebene Preise p und einen Lohn w ist

$$\pi(x) = p \cdot f(x) - w \cdot x$$

$p \cdot f(x)$ gibt an, wie viel der Unternehmer aus dem Verkauf der Güter zum Preis p einnimmt. $w \cdot x$ gibt an, wie viel der Unternehmer an Löhnen zahlen muss.
Sei $f(x) = 4\,x^{\frac{1}{2}}$ die Produktionsfunktion aus Aufgabe 8.4 mit $a = \frac{1}{2}$ und $b = 4$.

(a) Zeichnen Sie $\pi(x)$ und $\pi'(x)$ für $p = 1$ und $w = 1$.

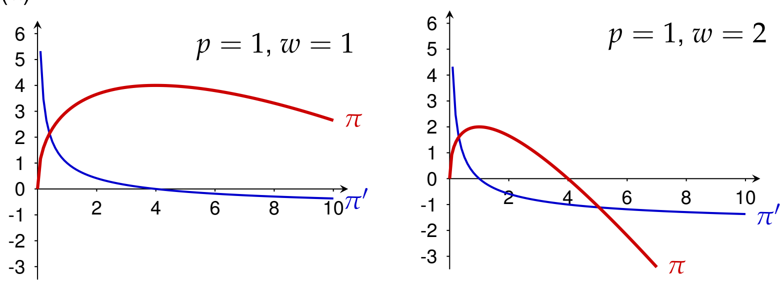
(b) Lesen Sie aus der Zeichnung ab, wie viel der Unternehmer produzieren muss, um seinen Gewinn $\pi(x)$ zu maximieren.

(c) Lösen sie das Optimierungsproblem auch ohne Zeichnung.

(d) Was passiert, wenn der Lohn auf $w = 2$ verdoppelt wird? (Zeichnung, Maximumsberechnung)

Lösung 8.12

(a)



(c) $\pi(x) = 4\,p\sqrt{x} - w\,x$. kritische Punkte: $x_0 = 4\,\frac{p^2}{w^2}$, $\pi''(x) < 0$, $\Rightarrow$ x_0 ist Maximum, für $p = 1$ und $w = 1$: $x_0 = 4$;
(d) analog, das Maximum ist bei $x = 1$.

Kapitel 9

Integration

Stammfunktion

Eine Funktion $F(x)$ heißt **Stammfunktion** einer Funktion $f(x)$, falls

$$\boxed{F'(x) = f(x)}$$

Berechnung:

Vermuten und Verifizieren

Beispiel: Wir suchen die Stammfunktion von $f(x) = \ln(x)$.

Vermuten: $F(x) = x\,(\ln(x) - 1)$

Verifizieren: $F'(x) = (x\,(\ln(x) - 1)' = 1 \cdot (\ln(x) - 1) + x \cdot \frac{1}{x} = \ln(x)$

Aber auch: $F(x) = x\,(\ln(x) - 1) + 5$

Stammfunktion

Die Stammfunktion wird mit dem Symbol

$$\boxed{\int f(x)\,dx + c}$$

bezeichnet und wird meist als das **unbestimmte Integral** der Funktion f bezeichnet. Die Zahl c heißt **Integrationskonstante**.

Für das Suchen von Stammfunktionen gibt es keine *„Kochrezepte“* (sondern nur Werkzeuge, die man durchprobieren kann).

Es gibt Funktionen, deren Stammfunktionen sich nicht durch elementare Funktionen ausdrücken lassen.

E.g., die Stammfunktion von $\exp(-\frac{1}{2}x^2)$.

Grundintegrale

Zur Erleichterung gibt es Tabellen mit bekannten Stammfunktionen, sogenannten **Grundintegralen**:

$f(x)$	$\int f(x)\,dx$
0	c
x^a	$\frac{1}{a+1} \cdot x^{a+1} + c$
e^x	$e^x + c$
$\frac{1}{x}$	$\ln\|x\| + c$
$\cos(x)$	$\sin(x) + c$
$\sin(x)$	$-\cos(x) + c$

Integrationsverfahren

- **Summenregel**

$$\boxed{\int \alpha f(x) + \beta g(x)\,dx = \alpha \int f(x)\,dx + \beta \int g(x)\,dx}$$

- **Partielles Integrieren**

$$\boxed{\int f \cdot g'\,dx = f \cdot g - \int f' \cdot g\,dx}$$

- **Substitution**

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)\,dx = \int f(z)\,dz$$

mit $z = g(x)$ und $dz = g'(x)\,dx$

Beispiel – Summenregel

Stammfunktion von $f(x) = 4\,x^3 - x^2 + 3\,x - 5$.

$$\begin{aligned}\int f(x)\,dx &= \int 4\,x^3 - x^2 + 3\,x - 5\,dx \\ &= 4\int x^3\,dx - \int x^2\,dx + 3\int x\,dx - 5\int dx \\ &= 4\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + 3\frac{1}{2}x^2 - 5x + c \\ &= x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 5x + c\end{aligned}$$

Beispiel – Partielles Integrieren

Stammfunktion von $f(x) = x \cdot e^x$.

$$\int \underbrace{x}_{f} \cdot \underbrace{e^x}_{g'}\,dx = \underbrace{x}_{f} \cdot \underbrace{e^x}_{g} - \int \underbrace{1}_{f'} \cdot \underbrace{e^x}_{g}\,dx = x \cdot e^x - e^x + c$$

$$\begin{aligned} f &= x && \Rightarrow && f' = 1 \\ g' &= e^x && \Rightarrow && g = e^x \end{aligned}$$

Beispiel – Partielles Integrieren

Stammfunktion von $f(x) = x^2\,\cos(x)$.

$$\int \underbrace{x^2}_{f} \cdot \underbrace{\cos(x)}_{g'}\,dx = \underbrace{x^2}_{f} \cdot \underbrace{\sin(x)}_{g} - \int \underbrace{2x}_{f'} \cdot \underbrace{\sin(x)}_{g}\,dx$$

Partielles Integrieren des zweiten Terms ergibt:

$$\begin{aligned}\int \underbrace{2x}_{f} \cdot \underbrace{\sin(x)}_{g'}\,dx &= \underbrace{2x}_{f} \cdot \underbrace{(-\cos(x))}_{g} - \int \underbrace{2}_{f'} \cdot \underbrace{(-\cos(x))}_{g}\,dx \\ &= -2x \cdot \cos(x) - 2 \cdot (-\sin(x)) + c\end{aligned}$$

Die Stammfunktion von f lautet daher:

$$\int x^2\,\cos(x)\,dx = x^2\,\sin(x) + 2x\,\cos(x) - 2\,\sin(x) + c$$

Beispiel – Substitution

Stammfunktion von $f(x) = 2x \cdot e^{x^2}$.

$$\int \exp(\underbrace{x^2}_{g(x)}) \cdot \underbrace{2x}_{g'(x)}\, dx = \int \exp(z)\, dz = e^z + c = e^{x^2} + c$$

$$z = g(x) = x^2 \quad \Rightarrow \quad dz = g'(x)\, dx = 2x\, dx$$

Integrationsverfahren – Herleitung

Partielles Integrieren erhält man aus der Produktregel für das Differenzieren:

$$\begin{aligned} f(x) \cdot g(x) &= \int (f(x) \cdot g(x))'\, dx = \int \left(f'(x)\, g(x) + f(x)\, g'(x)\right)\, dx \\ &= \int f'(x)\, g(x)\, dx + \int f(x)\, g'(x)\, dx \end{aligned}$$

Substitution folgt aus der Kettenregel:
Sei F eine Stammfunktion von f und $z = g(x)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \int f(z)\, dz = F(z) = F(g(x)) &= \int (F(g(x)))'\, dx \\ &= \int F'(g(x))\, g'(x)\, dx = \int f(g(x))\, g'(x)\, dx \end{aligned}$$

Aufgabe 9.1

Bestimmen Sie die Stammfunktionen folgender Funktionen:

(a) x^3

(b) $\frac{3}{x^2}$

(c) $\sqrt{x^3}$

(d) $\frac{1}{\sqrt{x}}$

(e) e^{2x}

(f) 2^{3x}

(g) $\frac{1}{2x}$

(h) 5

(i) $\sin(\pi x)$

(j) $\cos(2\pi x)$

Lösung 9.1

(a) $\frac{1}{4}x^4 + c$; (b) $-\frac{3}{x} + c$; (c) $\frac{2}{5}\sqrt{x^5} + c$; (d) $2\sqrt{x} + c$; (e) $\frac{1}{2}e^{2x} + c$;
(f) $\frac{1}{3\ln(2)}2^{3x} + c$; (g) $\frac{1}{2}\ln|x| + c$; (h) $5x + c$; (i) $-\frac{1}{\pi}\cos(\pi x) + c$;
(j) $\frac{1}{2\pi}\sin(2\pi x) + c$.

Aufgabe 9.2

Bestimmen Sie die Stammfunktionen folgender Funktionen:

(a) $x^4 + 2x^2 - x + 3$

(b) $x^3 + 7x + \dfrac{6}{x+1}$

(c) $e^x + x^e + e + x$

(d) $\dfrac{x+1}{\sqrt{x}}$

(e) $4x^3 + 3x^2 + 2x + 1 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^3}$

Lösung 9.2

(a) $\frac{1}{5}x^5 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 3x + c$; (b) $\frac{1}{4}x^4 + \frac{7}{2}x^2 + 6\ln|x+1| + c$;
(c) $e^x + \frac{1}{e+1}x^{e+1} + e\,x + \frac{1}{2}x^2 + c$; (d) $\frac{2}{3}x^{3/2} + 2\sqrt{x} + c$;
(e) $x^4 + x^3 + x^2 + x + \ln|x| - \frac{1}{2x^2} + c$.

Aufgabe 9.3

Ermitteln Sie die Stammfunktionen folgender Funktionen durch partielle Integration:

(a) $f(x) = 2x\, e^x$

(b) $f(x) = x^2\, e^{-x}$

(c) $f(x) = x\, \ln(x)$

(d) $f(x) = x^3\, \ln x$

(e) $f(x) = x\, (\ln(x))^2$

(f) $f(x) = x^2\, \sin(x)$

Lösung 9.3

(a) $2(x-1)e^x + c$; (b) $-(x^2+2x+2)\, e^{-x} + c$;
(c) $\frac{1}{2}\, x^2\, \ln(x) - \frac{1}{4}\, x^2 + c$; (d) $\frac{1}{4}\, x^4\, \ln(x) - \frac{1}{16}\, x^4 + c$;
(e) $\frac{1}{2}\, x^2(\ln(x))^2 - \frac{1}{2}\, x^2\, \ln(x) + \frac{1}{4}\, x^2 + c$;
(f) $2x \sin(x) + (2 - x^2) \cos(x)$.

Aufgabe 9.4

Berechnen Sie die folgenden Stammfunktionen durch Anwendung der Substitutionsregel:

(a) $\int x\, e^{x^2}\, dx$

(b) $\int 2\, x\, \sqrt{x^2+6}\, dx$

(c) $\int \frac{x}{3\, x^2 + 4}\, dx$

(d) $\int x\, \sqrt{x+1}\, dx$

(e) $\int \frac{\ln(x)}{x}\, dx$

Aufgabe 9.4 / 2

(f) $\displaystyle\int \frac{1}{x \ln x}\, dx$

(g) $\displaystyle\int \sqrt{x^3+1}\, x^2\, dx$

(h) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{5-x^2}}\, dx$

(i) $\displaystyle\int \frac{x^2-x+1}{x-3}\, dx$

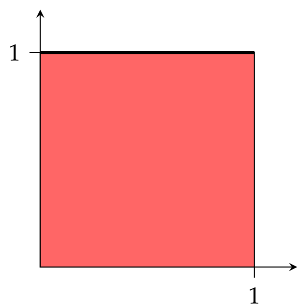
(j) $\displaystyle\int x(x-8)^{\frac{1}{2}}\, dx$

Lösung 9.4

(a) $z = x^2$: $\frac{1}{2}e^{x^2} + c$; (b) $z = x^2 + 6$:$\frac{2}{3}\left(x^2+6\right)^{\frac{3}{2}} + c$; (c) $z = 3\,x^2 + 4$: $\frac{1}{6}\ln|3x^2+4| + c$;
(d) $z = x + 1$: $\frac{2}{5}(x+1)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} + c$; (e) $z = \ln(x)$: $\frac{1}{2}(\ln(x))^2 + c$ (f) $z = \ln(x)$: $\ln|\ln(x)| + c$; (g) $z = x^3 + 1$: $\frac{2}{9}(x^3+1)^{3/2} + c$; (h) $z = 5 - x^2$: $-\sqrt{5-x^2} + c$;
(i) $z = x + 3$: $7\ln|x-3| + \frac{1}{2}x^2 + 2x + c$; (j) $z = x - 8$: $\frac{2}{5}(x-8)^{5/2} + \frac{16}{3}(x-8)^{3/2} + c$.

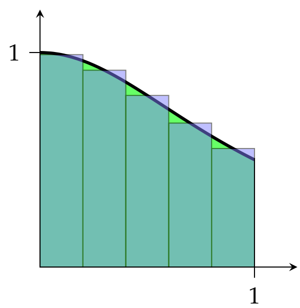
Flächeninhalt

Berechnen Sie die Inhalte der angegebenen Flächen!



$f(x) = 1$

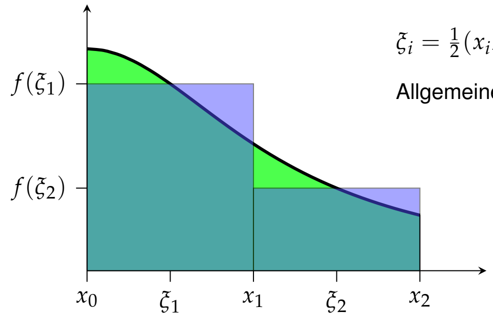
Fläche: $A = 1$



$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

Approximation
durch Treppenfunktion

Riemann-Summen

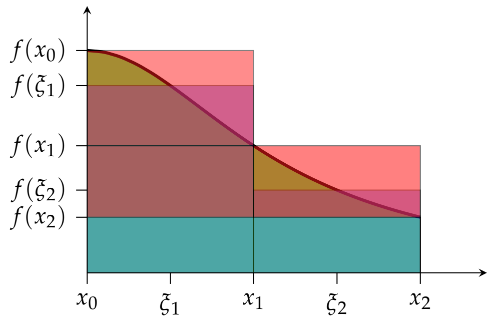


$\xi_i = \frac{1}{2}(x_{i-1} + x_i)$

Allgemeiner: $\xi_i \in (x_i, x_{i-1})$

$$A = \int_a^b f(x)\, dx \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1})$$

Approximationsfehler



$$\left| \int_a^b f(x)\, dx - \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) \right| \le (f_{\max} - f_{\min})\,(b-a)\,\frac{1}{n} \to 0$$

Annahme: Funktion monoton; $x_0, x_1, \ldots, x_n$ äquidistant

Riemann-Integral

Falls die **Riemann-Summen**

$$\boxed{I_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1})}$$

eine konvergente Folge bilden, dann heißt deren Grenzwert das **Riemann-Integral** von f. Notation: $\int_a^b f(x)\, dx$

$$\boxed{\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1})}$$

Alle für uns relevanten Funktionen besitzen ein Riemann-Integral.

Riemann-Integral – Eigenschaften

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\, dx = \alpha \int_a^b f(x)\, dx + \beta \int_a^b g(x)\, dx$$

$$\int_a^b f(x)\, dx = -\int_b^a f(x)\, dx$$

$$\int_a^a f(x)\, dx = 0$$

$$\int_a^c f(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_b^c f(x)\, dx$$

$$\int_a^b f(x)\, dx \le \int_a^b g(x)\, dx \qquad \text{falls } f(x) \le g(x) \text{ für alle } x \in [a,b]$$

Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Sei $F(x)$ eine Stammfunktion einer *stetigen* Funktion $f(x)$, dann gilt für das bestimmte **Integral**

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

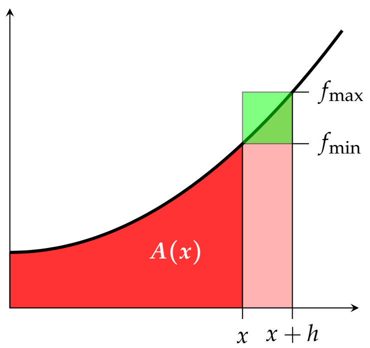
Dieser Satz erlaubt es uns, Integrale einfach mittels Stammfunktionen auszurechnen! (**Bestimmtes Integral**)

Beispiel:
Wir suchen das Integral der Funktion $f(x) = x^2$ im Intervall $[0, 1]$.

$$\int_0^1 x^2\, dx = \tfrac{1}{3}\, x^3\Big|_0^1 = \tfrac{1}{3} \cdot 1^3 - \tfrac{1}{3} \cdot 0^3 = \frac{1}{3}$$

Der Hauptsatz / Beweisidee

Sei $A(x)$ die Fläche zwischen dem Graphen einer stetigen Funktion f und der x-Achse zwischen 0 und x.



$$f_{\min} \cdot h \le A(x+h) - A(x) \le f_{\max} \cdot h$$

$$f_{\min} \le \frac{A(x+h) - A(x)}{h} \le f_{\max}$$

Grenzübergang $h \to 0$: ($\lim_{h\to 0} f_{\min} = f(x)$)

$$f(x) \le \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{A(x+h) - A(x)}{h}}_{=A'(x)} \le f(x)$$

$$A'(x) = f(x)$$

d.h. $A(x)$ ist eine Stammfunktion von $f(x)$.

Integrationsverfahren / (2)

- **Summenregel**

$$\int_a^b \alpha f(x) + \beta g(x)\, dx = \alpha \int_a^b f(x)\, dx + \beta \int_a^b g(x)\, dx$$

- **Partielles Integrieren**

$$\int_a^b f \cdot g'\, dx = f \cdot g\Big|_a^b - \int_a^b f' \cdot g\, dx$$

- **Substitution**

$$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x)\, dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(z)\, dz$$

mit $z = g(x)$ und $dz = g'(x)\, dx$

Beispiel

Berechne das bestimmte Integral $\int_e^{10} \frac{1}{\ln(x)} \cdot \frac{1}{x}\, dx$.

$$\int_e^{10} \frac{1}{\ln(x)} \cdot \frac{1}{x}\, dx = \int_1^{\ln(10)} \frac{1}{z}\, dz =$$

$$z = \ln(x) \quad \Rightarrow \quad dz = \frac{1}{x}\, dx$$

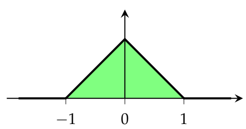
$$= \ln(z)\Big|_1^{\ln(10)} =$$

$$= \ln(\ln(10)) - \ln(1) \approx 0{,}834$$

Beispiel

Gesucht ist $\int_{-2}^{2} f(x)\, dx$ für die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x & \text{für } -1 \le x < 0 \\ 1 - x & \text{für } 0 \le x < 1 \\ 0 & \text{für } x < -1 \text{ und } x \ge 1 \end{cases}$$



Es gilt

$$\begin{aligned} \int_{-2}^{2} f(x)\, dx &= \int_{-2}^{-1} f(x)\, dx + \int_{-1}^{0} f(x)\, dx + \int_{0}^{1} f(x)\, dx + \int_{1}^{2} f(x)\, dx \\ &= \int_{-2}^{-1} 0\, dx + \int_{-1}^{0} (1+x)\, dx + \int_{0}^{1} (1-x)\, dx + \int_{1}^{2} 0\, dx \\ &= (x + \tfrac{1}{2}x^2)\Big|_{-1}^{0} + (x - \tfrac{1}{2}x^2)\Big|_{0}^{1} \\ &= \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} = 1 \end{aligned}$$

Aufgabe 9.5

Berechnen Sie die folgenden bestimmten Integrale:

(a) $\int_1^4 2x^2 - 1\,dx$

(b) $\int_0^2 3e^x\,dx$

(c) $\int_1^4 3x^2 + 4x\,dx$

(d) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{-\sin(x)}{3}\,dx$

(e) $\int_0^1 \frac{3\,x+2}{3\,x^2+4\,x+1}\,dx$

Lösung 9.5

(a) 39; (b) $3\,e^2 - 3 = 19.17$; (c) 93; (d) $-\frac{1}{6}$ (Taschenrechner auf Bogenmaß umschalten!); (e) $\frac{1}{2}\ln(8) \approx 1{,}0397$.

Aufgabe 9.6

Berechnen Sie die Integrale mit Hilfe von Stammfunktionen:

(a) $\int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx$

(b) $\int_0^1 x\,(x^2+3)^4\,dx$

(c) $\int_0^2 x\,\sqrt{4-x^2}\,dx$

(d) $\int_1^2 \frac{x}{x^2+1}\,dx$

(e) $\int_0^2 x\,\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\,dx$

Aufgabe 9.6 / 2

(f) $\int_0^3 (x-1)^2\, x\, dx$

(g) $\int_0^1 x \exp(x)\, dx$

(h) $\int_0^2 x^2 \exp(x)\, dx$

(i) $\int_1^2 x^2 \ln x\, dx$

Lösung 9.6

(a) $\frac{1}{2}$; (b) $\frac{781}{10}$; (c) $\frac{8}{3}$; (d) $\frac{1}{2}\ln(5) - \frac{1}{2}\ln(2) \approx 0{,}4581$;
(e) $1 - e^{-2} \approx 0{,}8647$; (f) $\frac{27}{4}$; (g) 1; (h) $2\,e^2 - 2 \approx 12{,}778$;
(i) $\frac{8}{3}\ln(2) - \frac{7}{9} \approx 1{,}07061$.

Aufgabe 9.7

Berechnen Sie das Integral $\int\limits_0^1 f(x)\, dx$, wobei die Funktion $f(x)$ stückweise konstant ist (Treppenfunktion) und gegeben ist durch

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \le x < 0{,}2 \\ 0{,}5 & \text{für } 0{,}2 \le x < 0{,}5 \\ 2{,}5 & \text{für } 0{,}5 \le x < 0{,}6 \\ 3{,}5 & \text{für } 0{,}6 \le x < 0{,}7 \\ -3{,}5 & \text{für } 0{,}7 \le x \le 1 \end{cases}$$

Lösung 9.7

$\int_0^1 f(x)dx = 1 \cdot (0{,}2 - 0) + 0{,}5 \cdot (0{,}5 - 0{,}2) + 2{,}5 \cdot (0{,}6 - 0{,}5) + 3{,}5 \cdot (0{,}7 - 0{,}6) + (-3{,}5) \cdot (1 - 0{,}7) = -0{,}1.$