

Kapitel 9

Integration

Stammfunktion

Eine Funktion $F(x)$ heißt **Stammfunktion** einer Funktion $f(x)$, falls

$$F'(x) = f(x)$$

Berechnung:

Vermuten und Verifizieren

Beispiel: Wir suchen die Stammfunktion von $f(x) = \ln(x)$.

Vermuten: $F(x) = x(\ln(x) - 1)$

Verifizieren: $F'(x) = (x(\ln(x) - 1))' =$
 $= 1 \cdot (\ln(x) - 1) + x \cdot \frac{1}{x} = \ln(x)$

Aber auch: $F(x) = x(\ln(x) - 1) + 5$

Stammfunktion

Die Stammfunktion wird mit dem Symbol

$$\int f(x) dx + c$$

bezeichnet und wird meist als das **unbestimmte Integral** der Funktion f bezeichnet. Die Zahl c heißt **Integrationskonstante**.

Für das Suchen von Stammfunktionen gibt es keine „Kochrezepte“ (sondern nur Werkzeuge, die man durchprobieren kann).

Es gibt Funktionen, deren Stammfunktionen sich nicht durch elementare Funktionen ausdrücken lassen.

E.g., die Stammfunktion von $\exp(-\frac{1}{2}x^2)$.

Grundintegrale

Zur Erleichterung gibt es Tabellen mit bekannten Stammfunktionen, sogenannten **Grundintegralen**:

$f(x)$	$\int f(x) dx$
0	c
x^a	$\frac{1}{a+1} \cdot x^{a+1} + c$
e^x	$e^x + c$
$\frac{1}{x}$	$\ln x + c$
$\cos(x)$	$\sin(x) + c$
$\sin(x)$	$-\cos(x) + c$

Integrationsverfahren

► Summenregel

$$\int \alpha f(x) + \beta g(x) dx = \alpha \int f(x) dx + \beta \int g(x) dx$$

► Partielles Integrieren

$$\int f \cdot g' dx = f \cdot g - \int f' \cdot g dx$$

► Substitution

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) dx = \int f(z) dz$$

mit $z = g(x)$ und $dz = g'(x) dx$

Beispiel – Summenregel

Stammfunktion von $f(x) = 4x^3 - x^2 + 3x - 5$.

$$\begin{aligned}\int f(x) dx &= \int 4x^3 - x^2 + 3x - 5 dx \\ &= 4 \int x^3 dx - \int x^2 dx + 3 \int x dx - 5 \int dx \\ &= 4 \frac{1}{4} x^4 - \frac{1}{3} x^3 + 3 \frac{1}{2} x^2 - 5x + c \\ &= x^4 - \frac{1}{3} x^3 + \frac{3}{2} x^2 - 5x + c\end{aligned}$$

Beispiel – Partielles Integrieren

Stammfunktion von $f(x) = x \cdot e^x$.

$$\int \underbrace{x}_f \cdot \underbrace{e^x}_{g'} dx = \underbrace{x}_f \cdot \underbrace{e^x}_g - \int \underbrace{1}_{f'} \cdot \underbrace{e^x}_g dx = x \cdot e^x - e^x + c$$

$$f = x \quad \Rightarrow \quad f' = 1$$

$$g' = e^x \quad \Rightarrow \quad g = e^x$$

Beispiel – Partielles Integrieren

Stammfunktion von $f(x) = x^2 \cos(x)$.

$$\int \underbrace{x^2}_f \cdot \underbrace{\cos(x)}_{g'} dx = \underbrace{x^2}_f \cdot \underbrace{\sin(x)}_g - \int \underbrace{2x}_{f'} \cdot \underbrace{\sin(x)}_g dx$$

Partielles Integrieren des zweiten Terms ergibt:

$$\begin{aligned} \int \underbrace{2x}_f \cdot \underbrace{\sin(x)}_{g'} dx &= \underbrace{2x}_f \cdot \underbrace{(-\cos(x))}_g - \int \underbrace{2}_{f'} \cdot \underbrace{(-\cos(x))}_g dx \\ &= -2x \cdot \cos(x) - 2 \cdot (-\sin(x)) + c \end{aligned}$$

Die Stammfunktion von f lautet daher:

$$\int x^2 \cos(x) dx = x^2 \sin(x) + 2x \cos(x) - 2 \sin(x) + c$$

Beispiel – Substitution

Stammfunktion von $f(x) = 2x \cdot e^{x^2}$.

$$\int \exp(\underbrace{x^2}_{g(x)}) \cdot \underbrace{2x}_{g'(x)} dx = \int \exp(z) dz = e^z + c = e^{x^2} + c$$

$$z = g(x) = x^2 \quad \Rightarrow \quad dz = g'(x) dx = 2x dx$$

Integrationsverfahren – Herleitung

Partielles Integrieren erhält man aus der Produktregel für das Differenzieren:

$$\begin{aligned} f(x) \cdot g(x) &= \int (f(x) \cdot g(x))' dx = \int (f'(x) g(x) + f(x) g'(x)) dx \\ &= \int f'(x) g(x) dx + \int f(x) g'(x) dx \end{aligned}$$

Substitution folgt aus der Kettenregel:

Sei F eine Stammfunktion von f und $z = g(x)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \int f(z) dz &= F(z) = F(g(x)) = \int (F(g(x)))' dx \\ &= \int F'(g(x)) g'(x) dx = \int f(g(x)) g'(x) dx \end{aligned}$$

Aufgabe 9.1

Bestimmen Sie die Stammfunktionen folgender Funktionen:

(a) x^3

(b) $\frac{3}{x^2}$

(c) $\sqrt{x^3}$

(d) $\frac{1}{\sqrt{x}}$

(e) e^{2x}

(f) 2^{3x}

(g) $\frac{1}{2x}$

(h) 5

(i) $\sin(\pi x)$

(j) $\cos(2\pi x)$

Lösung 9.1

- (a) $\frac{1}{4}x^4 + c$; (b) $-\frac{3}{x} + c$; (c) $\frac{2}{5}\sqrt{x^5} + c$; (d) $2\sqrt{x} + c$; (e) $\frac{1}{2}e^{2x} + c$;
(f) $\frac{1}{3\ln(2)}2^{3x} + c$; (g) $\frac{1}{2}\ln|x| + c$; (h) $5x + c$; (i) $-\frac{1}{\pi}\cos(\pi x) + c$;
(j) $\frac{1}{2\pi}\sin(2\pi x) + c$.

Aufgabe 9.2

Bestimmen Sie die Stammfunktionen folgender Funktionen:

(a) $x^4 + 2x^2 - x + 3$

(b) $x^3 + 7x + \frac{6}{x+1}$

(c) $e^x + x^e + e + x$

(d) $\frac{x+1}{\sqrt{x}}$

(e) $4x^3 + 3x^2 + 2x + 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}$

Lösung 9.2

(a) $\frac{1}{5}x^5 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 3x + c$; (b) $\frac{1}{4}x^4 + \frac{7}{2}x^2 + 6 \ln |x + 1| + c$;
(c) $e^x + \frac{1}{e+1}x^{e+1} + ex + \frac{1}{2}x^2 + c$; (d) $\frac{2}{3}x^{3/2} + 2\sqrt{x} + c$;
(e) $x^4 + x^3 + x^2 + x + \ln |x| - \frac{1}{2x^2} + c$.

Aufgabe 9.3

Ermitteln Sie die Stammfunktionen folgender Funktionen durch partielle Integration:

(a) $f(x) = 2x e^x$

(b) $f(x) = x^2 e^{-x}$

(c) $f(x) = x \ln(x)$

(d) $f(x) = x^3 \ln x$

(e) $f(x) = x (\ln(x))^2$

(f) $f(x) = x^2 \sin(x)$

Lösung 9.3

- (a) $2(x - 1)e^x + c$; (b) $-(x^2 + 2x + 2)e^{-x} + c$;
(c) $\frac{1}{2}x^2 \ln(x) - \frac{1}{4}x^2 + c$; (d) $\frac{1}{4}x^4 \ln(x) - \frac{1}{16}x^4 + c$;
(e) $\frac{1}{2}x^2(\ln(x))^2 - \frac{1}{2}x^2 \ln(x) + \frac{1}{4}x^2 + c$;
(f) $2x \sin(x) + (2 - x^2) \cos(x)$.

Aufgabe 9.4

Berechnen Sie die folgenden Stammfunktionen durch Anwendung der Substitutionsregel:

(a) $\int x e^{x^2} dx$

(b) $\int 2x \sqrt{x^2 + 6} dx$

(c) $\int \frac{x}{3x^2 + 4} dx$

(d) $\int x \sqrt{x + 1} dx$

(e) $\int \frac{\ln(x)}{x} dx$

Aufgabe 9.4 / 2

$$(f) \int \frac{1}{x \ln x} dx$$

$$(g) \int \sqrt{x^3 + 1} x^2 dx$$

$$(h) \int \frac{x}{\sqrt{5 - x^2}} dx$$

$$(i) \int \frac{x^2 - x + 1}{x - 3} dx$$

$$(j) \int x(x - 8)^{\frac{1}{2}} dx$$

Lösung 9.4

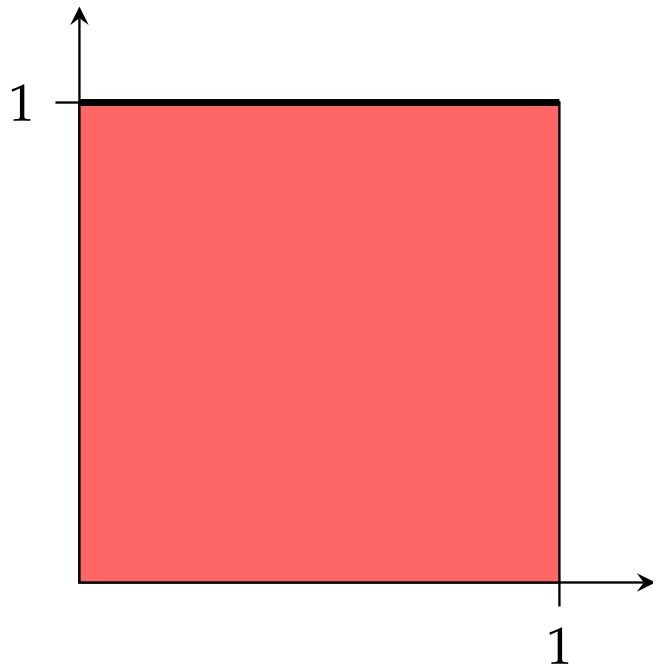
(a) $z = x^2: \frac{1}{2}e^{x^2} + c$; (b) $z = x^2 + 6: \frac{2}{3}(x^2 + 6)^{\frac{3}{2}} + c$; (c) $z = 3x^2 + 4: \frac{1}{6} \ln |3x^2 + 4| + c$;

(d) $z = x + 1: \frac{2}{5}(x + 1)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}(x + 1)^{\frac{3}{2}} + c$; (e) $z = \ln(x): \frac{1}{2}(\ln(x))^2 + c$ (f) $z = \ln(x): \ln |\ln(x)| + c$; (g) $z = x^3 + 1: \frac{2}{9}(x^3 + 1)^{3/2} + c$; (h) $z = 5 - x^2: -\sqrt{5 - x^2} + c$;

(i) $z = x + 3: 7 \ln |x - 3| + \frac{1}{2}x^2 + 2x + c$; (j) $z = x - 8: \frac{2}{5}(x - 8)^{5/2} + \frac{16}{3}(x - 8)^{3/2} + c$.

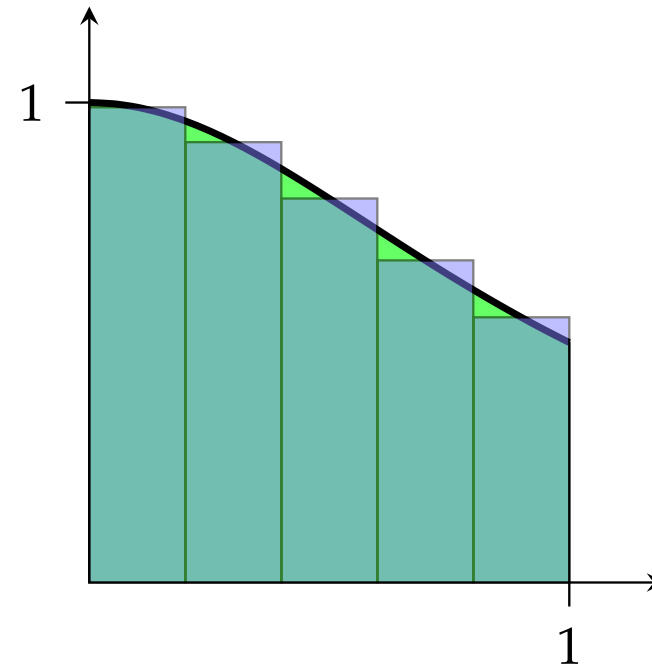
Flächeninhalt

Berechnen Sie die Inhalte der angegebenen Flächen!



$$f(x) = 1$$

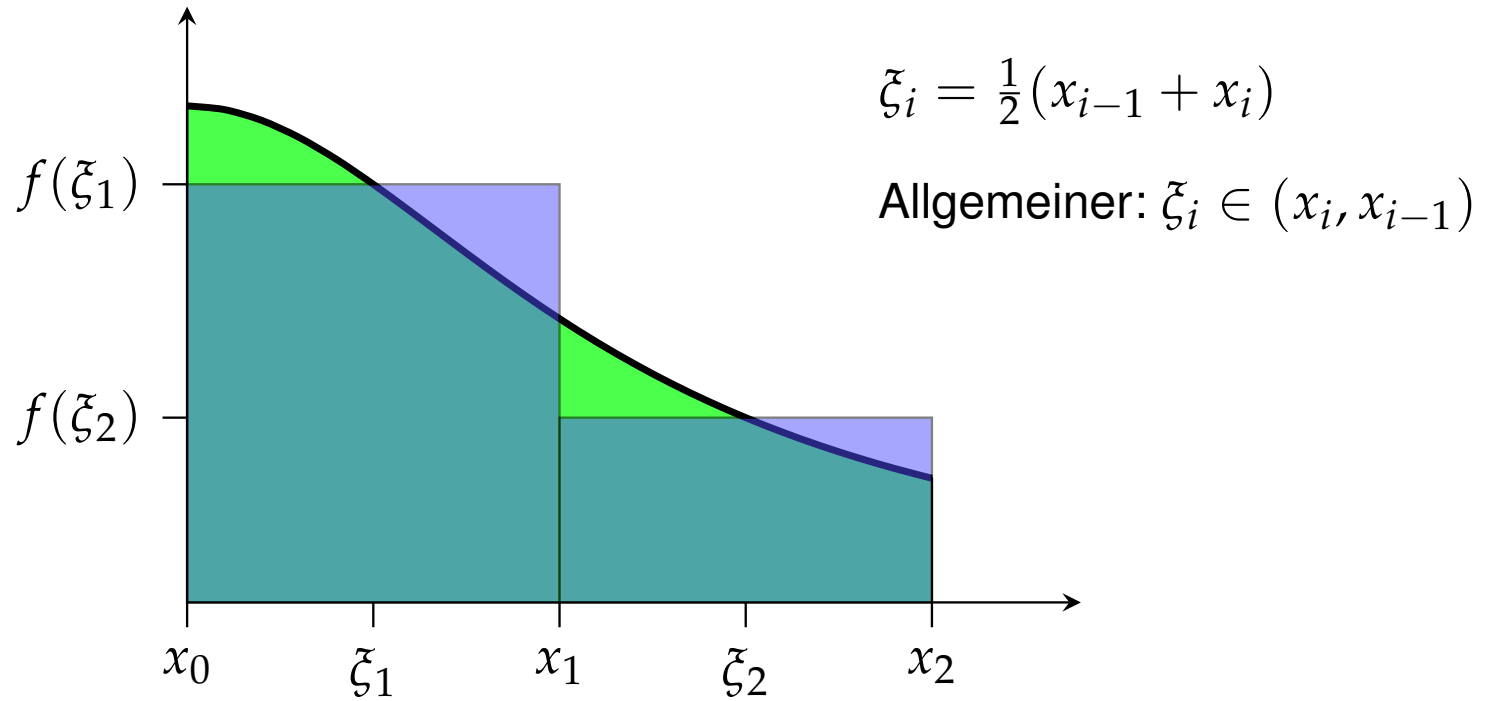
$$\text{Fläche: } A = 1$$



$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

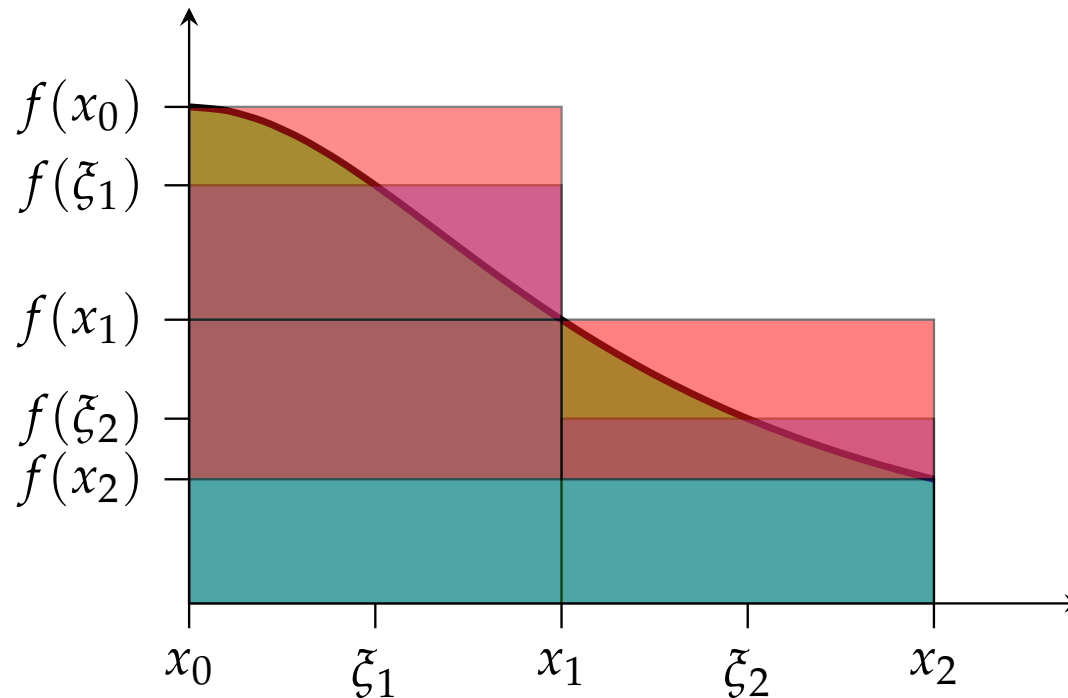
Approximation
durch Treppenfunktion

Riemann-Summen



$$A = \int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1})$$

Approximationsfehler



$$\left| \int_a^b f(x) dx - \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) \right| \leq (f_{\max} - f_{\min}) (b - a) \frac{1}{n} \rightarrow 0$$

Annahme: Funktion monoton; x_0, x_1, \dots, x_n äquidistant

Riemann-Integral

Falls die **Riemann-Summen**

$$I_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1})$$

eine konvergente Folge bilden, dann heißt deren Grenzwert das

Riemann-Integral von f . Notation: $\int_a^b f(x) dx$

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1})$$

Alle für uns relevanten Funktionen besitzen ein Riemann-Integral.

Riemann-Integral – Eigenschaften

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx$$

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

$$\int_a^a f(x) dx = 0$$

$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx$$

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx \quad \text{falls } f(x) \leq g(x) \text{ für alle } x \in [a, b]$$

Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Sei $F(x)$ eine Stammfunktion einer *stetigen* Funktion $f(x)$,
dann gilt für das bestimmte **Integral**

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Dieser Satz erlaubt es uns, Integrale einfach mittels Stammfunktionen auszurechnen! (**Bestimmtes Integral**)

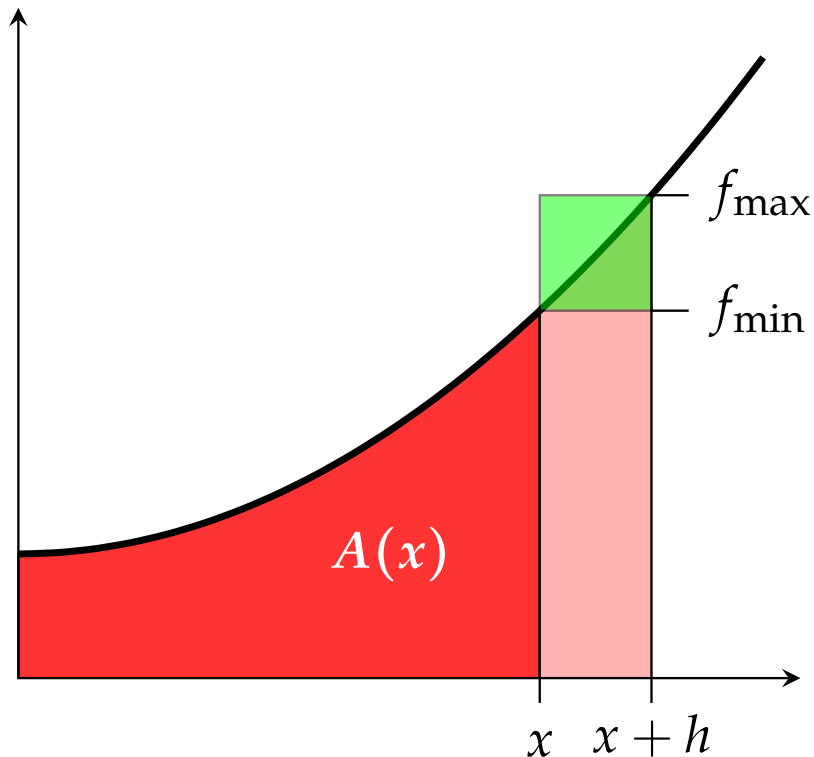
Beispiel:

Wir suchen das Integral der Funktion $f(x) = x^2$ im Intervall $[0, 1]$.

$$\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3} x^3 \Big|_0^1 = \frac{1}{3} \cdot 1^3 - \frac{1}{3} \cdot 0^3 = \frac{1}{3}$$

Der Hauptsatz / Beweisidee

Sei $A(x)$ die Fläche zwischen dem Graphen einer stetigen Funktion f und der x -Achse zwischen 0 und x .



$$f_{\min} \cdot h \leq A(x+h) - A(x) \leq f_{\max} \cdot h$$

$$f_{\min} \leq \frac{A(x+h) - A(x)}{h} \leq f_{\max}$$

Grenzübergang $h \rightarrow 0$: ($\lim_{h \rightarrow 0} f_{\min} = f(x)$)

$$f(x) \leq \underbrace{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{A(x+h) - A(x)}{h}}_{=A'(x)} \leq f(x)$$

$$A'(x) = f(x)$$

d.h. $A(x)$ ist eine Stammfunktion von $f(x)$.

Integrationsverfahren / (2)

► Summenregel

$$\int_a^b \alpha f(x) + \beta g(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx$$

► Partielles Integrieren

$$\int_a^b f \cdot g' dx = f \cdot g \Big|_a^b - \int_a^b f' \cdot g dx$$

► Substitution

$$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(z) dz$$

mit $z = g(x)$ und $dz = g'(x) dx$

Beispiel

Berechne das bestimmte Integral $\int_e^{10} \frac{1}{\ln(x)} \cdot \frac{1}{x} dx$.

$$\int_e^{10} \frac{1}{\ln(x)} \cdot \frac{1}{x} dx = \int_1^{\ln(10)} \frac{1}{z} dz =$$

$$z = \ln(x) \quad \Rightarrow \quad dz = \frac{1}{x} dx$$

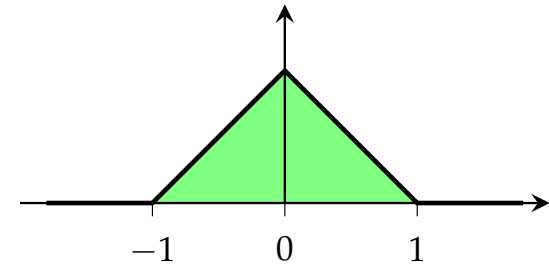
$$= \ln(z) \Big|_1^{\ln(10)} =$$

$$= \ln(\ln(10)) - \ln(1) \approx 0,834$$

Beispiel

Gesucht ist $\int_{-2}^2 f(x) dx$ für die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x & \text{für } -1 \leq x < 0 \\ 1 - x & \text{für } 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{für } x < -1 \text{ und } x \geq 1 \end{cases}$$



Es gilt

$$\begin{aligned} \int_{-2}^2 f(x) dx &= \int_{-2}^{-1} f(x) dx + \int_{-1}^0 f(x) dx + \int_0^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx \\ &= \int_{-2}^{-1} 0 dx + \int_{-1}^0 (1 + x) dx + \int_0^1 (1 - x) dx + \int_1^2 0 dx \\ &= \left(x + \frac{1}{2}x^2\right) \Big|_{-1}^0 + \left(x - \frac{1}{2}x^2\right) \Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \end{aligned}$$

Aufgabe 9.5

Berechnen Sie die folgenden bestimmten Integrale:

$$(a) \int_1^4 2x^2 - 1 \, dx$$

$$(b) \int_0^2 3e^x \, dx$$

$$(c) \int_1^4 3x^2 + 4x \, dx$$

$$(d) \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{-\sin(x)}{3} \, dx$$

$$(e) \int_0^1 \frac{3x + 2}{3x^2 + 4x + 1} \, dx$$

Lösung 9.5

(a) 39; (b) $3e^2 - 3 = 19.17$; (c) 93; (d) $-\frac{1}{6}$ (Taschenrechner auf Bogenmaß umschalten!); (e) $\frac{1}{2} \ln(8) \approx 1,0397$.

Aufgabe 9.6

Berechnen Sie die Integrale mit Hilfe von Stammfunktionen:

(a) $\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx$

(b) $\int_0^1 x (x^2 + 3)^4 dx$

(c) $\int_0^2 x \sqrt{4 - x^2} dx$

(d) $\int_1^2 \frac{x}{x^2 + 1} dx$

(e) $\int_0^2 x \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx$

Aufgabe 9.6 / 2

$$(f) \int_0^3 (x - 1)^2 x \, dx$$

$$(g) \int_0^1 x \exp(x) \, dx$$

$$(h) \int_0^2 x^2 \exp(x) \, dx$$

$$(i) \int_1^2 x^2 \ln x \, dx$$

Lösung 9.6

- (a) $\frac{1}{2}$; (b) $\frac{781}{10}$; (c) $\frac{8}{3}$; (d) $\frac{1}{2} \ln(5) - \frac{1}{2} \ln(2) \approx 0,4581$;
(e) $1 - e^{-2} \approx 0,8647$; (f) $\frac{27}{4}$; (g) 1; (h) $2e^2 - 2 \approx 12,778$;
(i) $\frac{8}{3} \ln(2) - \frac{7}{9} \approx 1,07061$.

Aufgabe 9.7

Berechnen Sie das Integral $\int_0^1 f(x) dx$, wobei die Funktion $f(x)$ stückweise konstant ist (Treppenfunktion) und gegeben ist durch

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \leq x < 0,2 \\ 0,5 & \text{für } 0,2 \leq x < 0,5 \\ 2,5 & \text{für } 0,5 \leq x < 0,6 \\ 3,5 & \text{für } 0,6 \leq x < 0,7 \\ -3,5 & \text{für } 0,7 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Lösung 9.7

$$\int_0^1 f(x)dx = 1 \cdot (0,2 - 0) + 0,5 \cdot (0,5 - 0,2) + 2,5 \cdot (0,6 - 0,5) + 3,5 \cdot (0,7 - 0,6) + (-3,5) \cdot (1 - 0,7) = -0,1.$$