Kapitel 8

Monotonie, Konkavität und Extrema

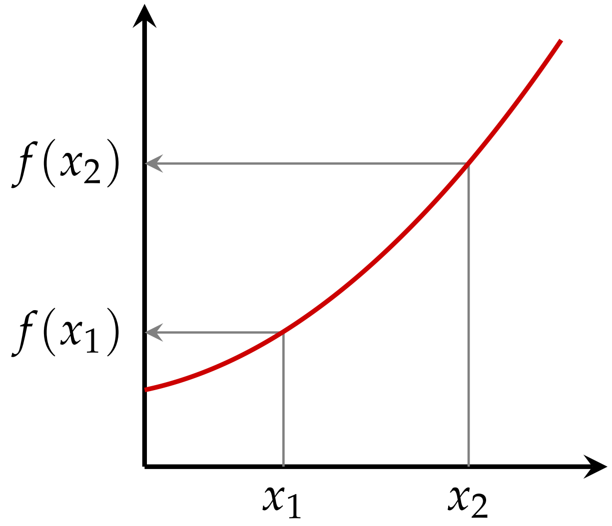
Monotonie

Eine Funktion f heißt **monoton steigend**, falls

$$x_1 \leq x_2 \;\Leftrightarrow\; f(x_1) \leq f(x_2)$$

Sie heißt *streng monoton steigend*, falls

$$x_1 < x_2 \;\Leftrightarrow\; f(x_1) < f(x_2)$$

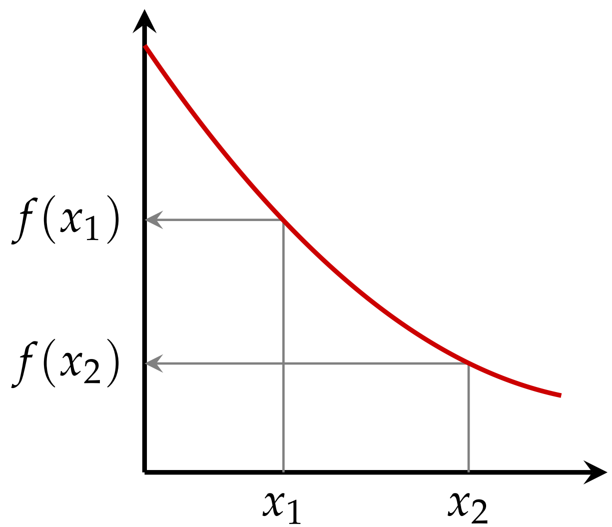


Eine Funktion f heißt **monoton fallend**, falls

$$x_1 \leq x_2 \Leftrightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$

Sie heißt *streng monoton fallend*, falls

$$x_1 < x_2 \;\Leftrightarrow\; f(x_1) > f(x_2)$$



Monotonie

Für differenzierbare Funktionen gilt:

$$\boxed{\begin{aligned} f \text{ monoton steigend} \quad &\Leftrightarrow \quad f'(x) \geq 0 \quad \text{für alle } x \in D_f \\ f \text{ monoton fallend} \quad &\Leftrightarrow \quad f'(x) \leq 0 \quad \text{für alle } x \in D_f \end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} f \text{ streng monoton steigend} \quad &\Leftarrow \quad f'(x) > 0 \quad \text{für alle } x \in D_f \\ f \text{ streng monoton fallend} \quad &\Leftarrow \quad f'(x) < 0 \quad \text{für alle } x \in D_f \end{aligned}}$$

Die Funktion $f\colon (0, \infty),\ x \mapsto \ln(x)$ ist streng monoton steigend, da

$$f'(x) = (\ln(x))' = \frac{1}{x} > 0 \quad \text{für alle } x > 0$$

Lokale Monotonie

Eine Funktion kann in einem bestimmten Intervall monoton steigend, in einem anderen monoton fallend sein. Sie wird dann als **lokal monoton** auf dem entsprechenden Abschnitt bezeichnet.

Für *stetig* differenzierbare Funktionen eignet sich folgende Vorgangsweise:

1. Berechne erste Ableitung $f'(x)$.
2. Bestimme Nullstellen von $f'(x)$.
3. Erhalte Intervalle, in denen $f'(x)$ das Vorzeichen nicht wechselt.
4. Wähle „geeigneten“ Punkt in jedem Intervall und bestimme dort das Vorzeichen von $f'(x)$.
5. $f'(x)$ kann innerhalb eines Intervalls das Vorzeichen nicht ändern.

Beispiel – Lokale Monotonie

In welchen Bereichen ist $f(x) = 2\,x^3 - 12\,x^2 + 18\,x - 1$ monoton?

Suchen den Bereich, wo $f'(x) \geq 0$:

1. $f'(x) = 6\,x^2 - 24\,x + 18$
2. Nullstellen: $x^2 - 4\,x + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 1,\ x_2 = 3$
3. Erhalte 3 Intervalle: $(-\infty, 1]$, $[1, 3]$ und $[3, \infty)$
4. Vorzeichen von $f(x)$ an „geeigneten“ Punkt in jedem Intervall:
   $f'(0) = 3 > 0$, $f'(2) = -1 < 0$ und $f'(4) = 3 > 0$.
5. $f'(x)$ kann innerhalb eines Intervalls das Vorzeichen nicht ändern:
   $f'(x) \geq 0$ in $(-\infty, 1]$ und $[3, \infty)$.

Die Funktion $f(x)$ ist monoton steigend in $(-\infty, 1] \cup [3, \infty)$.

Monotonie und inverse Funktion

Beachte:
Falls f *streng monoton* steigend ist, dann folgt aus

$$x_1 < x_2 \;\Leftrightarrow\; f(x_1) < f(x_2)$$

sofort auch

$$x_1 \neq x_2 \;\Leftrightarrow\; f(x_1) \neq f(x_2)$$

M.a.W., f ist injektiv. Falls f auch surjektiv ist, ist f somit *invertierbar*.

Falls eine surjektive Funktion f streng monoton steigend oder fallend ist, dann ist sie auch invertierbar.

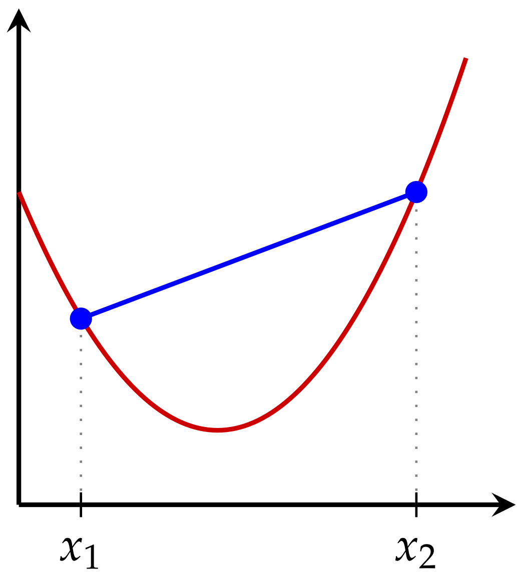
Konvexität und Konkavität

Eine Funktion f heißt **konvex**, wenn

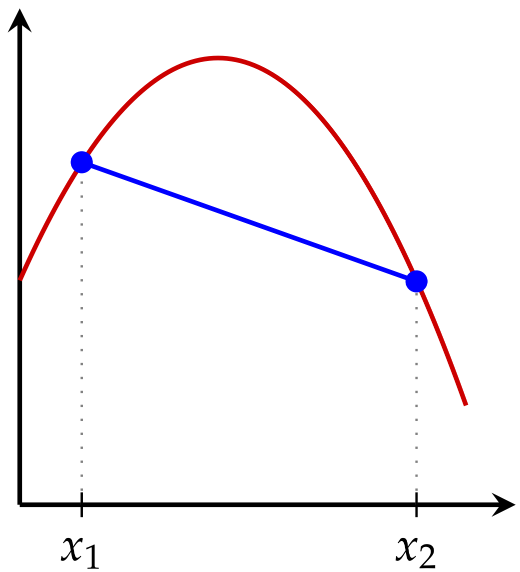
$$\boxed{f((1-h)\,x_1 + h\,x_2) \leq (1-h)\,f(x_1) + h\,f(x_2)}$$

für alle $x_1, x_2 \in D_f$ und alle $h \in [0,1]$. Sie heißt **konkav**, wenn

$$\boxed{f((1-h)\,x_1 + h\,x_2) \geq (1-h)\,f(x_1) + h\,f(x_2)}$$



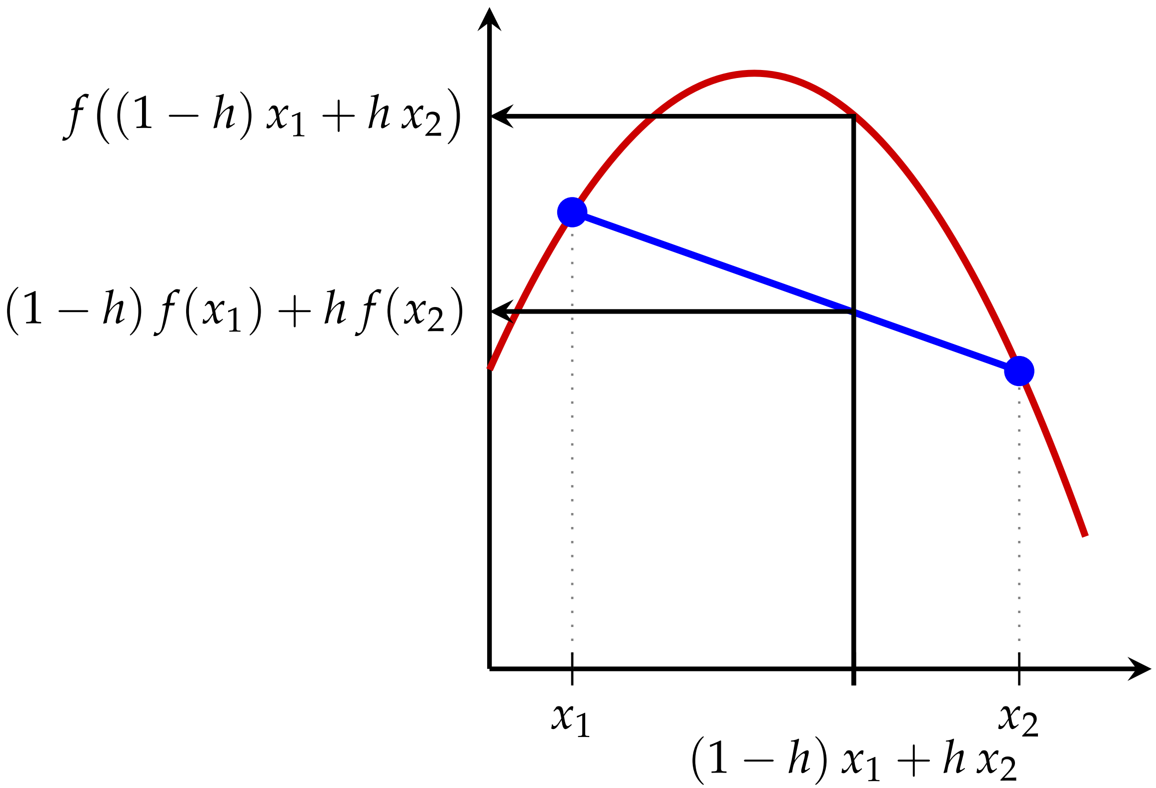
konvex



konkav

Konkave Funktion

$$f\big((1-h)\,x_1 + h\,x_2\big) \;\geq\; (1-h)\,f(x_1) + h\,f(x_2)$$

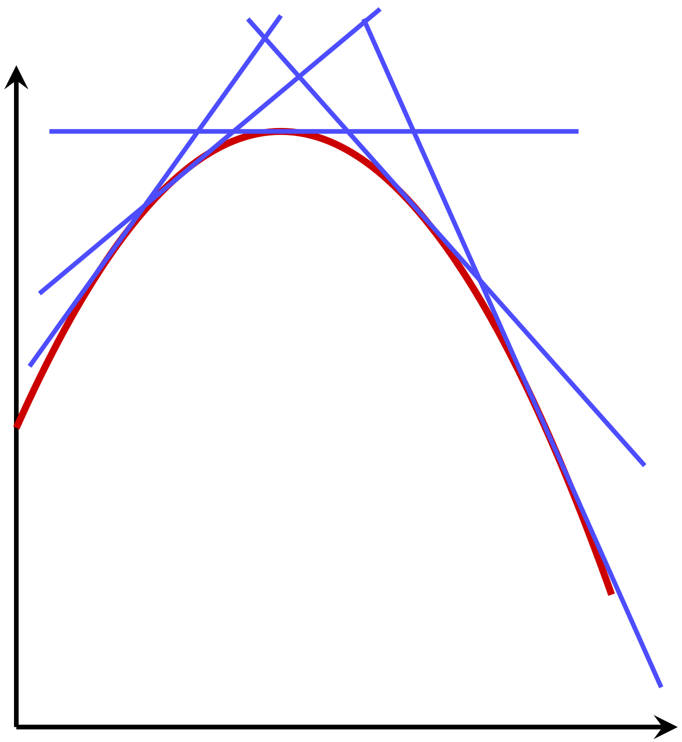


Sehne unterhalb des Funktionsgraphen.

Konvexität und Konkavität

Für differenzierbare Funktionen gilt:

$$\begin{array}{llll} f \text{ konvex} & \Leftrightarrow & f''(x) \geq 0 & \text{für alle } x \in D_f \\ f \text{ konkav} & \Leftrightarrow & f''(x) \leq 0 & \text{für alle } x \in D_f \end{array}$$



$f'(x)$ ist monoton fallend,
daher $f''(x) \leq 0$

Streng konvex / konkav

Eine Funktion f heißt **streng konvex**, wenn

$$\boxed{f((1-h)\,x_1 + h\,x_2) < (1-h)\,f(x_1) + h\,f(x_2)}$$

für alle $x_1, x_2 \in D_f$, $x_1 \neq x_2$ und alle $h \in (0,1)$.

Sie heißt **streng konkav**, wenn

$$\boxed{f((1-h)\,x_1 + h\,x_2) > (1-h)\,f(x_1) + h\,f(x_2)}$$

Für differenzierbare Funktionen gilt:

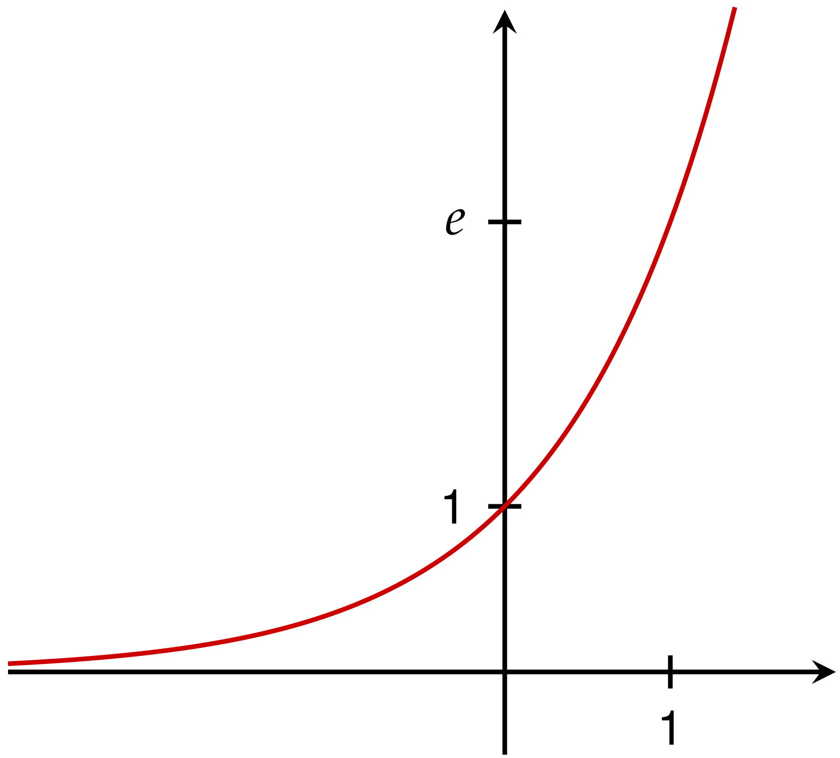
$$\boxed{\begin{array}{lcll} f \text{ streng konvex} & \Leftarrow & f''(x) > 0 & \text{für alle } x \in D_f \\ f \text{ streng konkav} & \Leftarrow & f''(x) < 0 & \text{für alle } x \in D_f \end{array}}$$

Beispiel – konvex

Exponentialfunktion:

$$f(x) = e^x$$
$$f'(x) = e^x$$
$$f''(x) = e^x > 0 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$

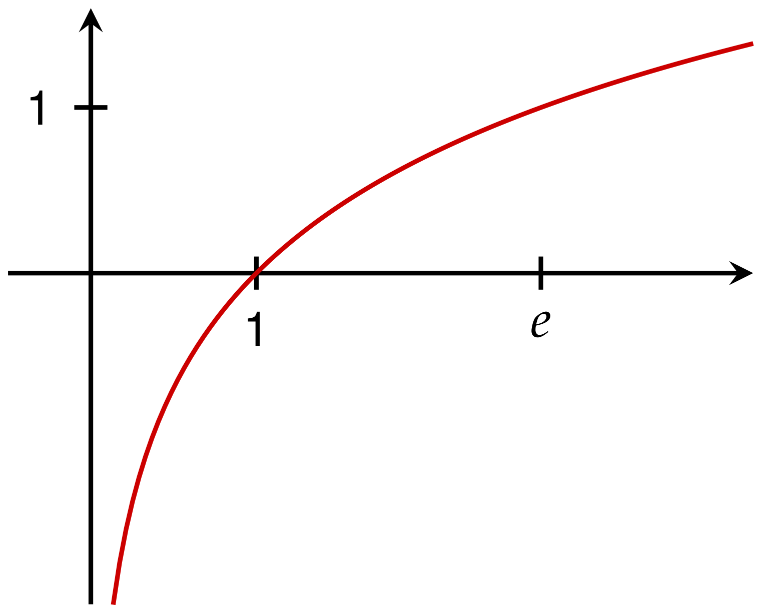
$\exp(x)$ ist (streng) konvex.



Beispiel – konkav

Logarithmusfunktion: $(x > 0)$

$$f(x) = \ln(x)$$
$$f'(x) = \frac{1}{x}$$
$$f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0 \quad \text{für alle } x > 0$$



$\ln(x)$ ist (streng) konkav.

Lokale Konkavität

Eine Funktion kann auch auf einem bestimmten Intervall konkav, auf einem anderen konvex sein. Sie wird dann als **lokal konkav**, bzw. **lokal konvex** auf dem entsprechenden Abschnitt bezeichnet.

Für *stetig* differenzierbare Funktionen eignet sich folgende Vorgangsweise:

1. Berechne zweite Ableitung $f''(x)$.
2. Bestimme Nullstellen von $f''(x)$.
3. Erhalte Intervalle, in denen $f''(x)$ das Vorzeichen nicht wechselt.
4. Wähle „geeigneten“ Punkt in jedem Intervall und bestimme dort das Vorzeichen von $f''(x)$.
5. $f''(x)$ kann innerhalb eines Intervalls das Vorzeichen nicht ändern.

Beispiel – Lokale Konkavität

In welchem Bereich ist $f(x) = 2\,x^3 - 12\,x^2 + 18\,x - 1$ konkav?

Suchen den Bereich, wo $f''(x) \leq 0$.

1. $f''(x) = 12\,x - 24$
2. Nullstellen: $\quad 12\,x - 24 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 2$
3. Erhalte 2 Intervalle: $\quad (-\infty, 2]$ und $[2, \infty)$
4. Vorzeichen von $f(x)$ an „geeigneten" Punkt in jedem Intervall:
   $f''(0) = -24 < 0$ und $f''(4) = 24 > 0$.
5. $f''(x)$ kann innerhalb eines Intervalls das Vorzeichen nicht ändern: $f''(x) \leq 0$ in $(\,-\infty, 2]$

Die Funktion $f(x)$ ist konkav in $(-\infty, 2]$.

Aufgabe 8.1

Bestimmen Sie die mit Hilfe der zweiten Ableitung die Krümmung (d.h. Konkavität oder Konvexität) folgender Funktionen. Welche Fälle sind möglich?

(a) $\exp(x)$

(b) $\ln(x)$

(c) $\log_{10}(x)$

(d) x^α für $x > 0$ für ein $\alpha \in \mathbb{R}$.

Lösung 8.1

(a) konvex;
(b) konkav;
(c) konkav;
(d) konvex falls $\alpha \geq 1$ und $\alpha \leq 0$,
konkav falls $0 \leq \alpha \leq 1$.

Aufgabe 8.2

In welchem Bereich ist die Funktion

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 19$$

monoton steigend bzw. fallend?
In welchem Bereich ist die konvex bzw. konkav?

Lösung 8.2

Monoton fallend in $[-1, 3]$,
monoton steigend in $(-\infty, -1] \cup [3, \infty)$;

Konkav in $(-\infty, 1]$,
konvex in $[1, \infty)$.

Aufgabe 8.3

In welchem Bereich ist die Funktion

$$x\, e^{x^2}$$

monoton steigend bzw. fallend?
In welchem Bereich ist die konvex bzw. konkav?

Lösung 8.3

Monoton steigend in $\mathbb{R}$,
Konkav in $(-\infty, 0]$,
konvex in $[0, \infty)$.

Aufgabe 8.4

Die Funktion

$$f(x) = b\,x^{1-a} \qquad 0 < a < 1,\, b > 0,\, x \geq 0$$

ist ein Beispiel für eine Produktionsfunktion, d.h. mit x Einheiten Arbeit kann man $f(x)$ Güter produzieren.

Produktionsfunktionen haben i.a. folgende Eigenschaften:

(1) $f(0) = 0, \quad \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$

(2) $f'(x) > 0, \quad \lim\limits_{x\to\infty} f'(x) = 0$

(3) $f''(x) < 0$

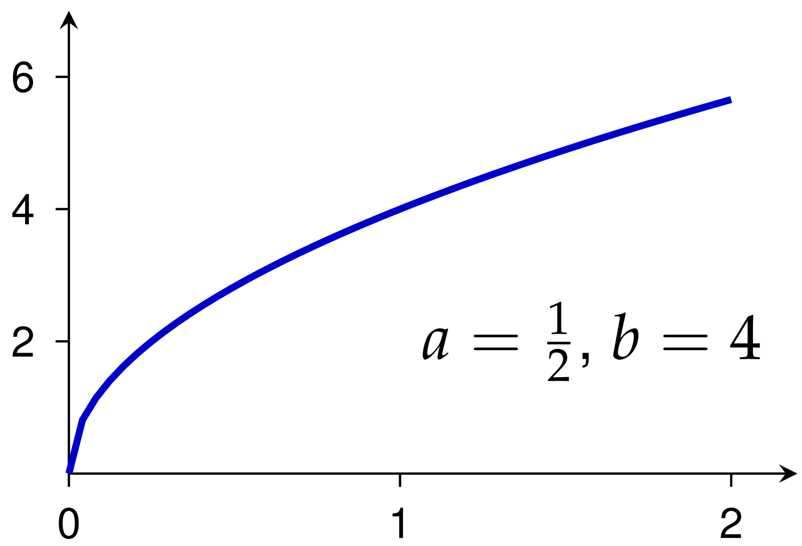
(a) Überprüfen Sie diese Eigenschaften an der obigen Funktion.

(b) Zeichnen Sie $f(x)$ und $f'(x)$.
(Setzen Sie dabei für a und b geeignete Werte ein.)

Aufgabe 8.4 / 2

(c) Was bedeuten diese Eigenschaften inhaltlich?
(z.B.: Wenn $x = 0$, wird nichts produziert.)

Lösung 8.4



Hinweis: Bilden Sie die erste und zweite Ableitung und überprüfen Sie, ob die angegebenen Eigenschaften von der Funktion auch tatsächlich erfüllt werden. Beachten Sie dabei, welche Einschränkungen a und b genügen. Z.B.:
$f''(x) = \underbrace{b\,a}_{>0}\,\underbrace{(a-1)}_{<0}\,\underbrace{x^{-a-1}}_{>0} < 0.$

Aufgabe 8.5

Die Funktion

$$f(x) = b\,\ln(ax+1) \qquad a, b > 0,\ x \geq 0$$

ist ein Beispiel für eine Nutzenfunktion. Konsumenten haben einen Nutzen $f(x)$, wenn sie x Einheiten eines Gutes konsumieren.

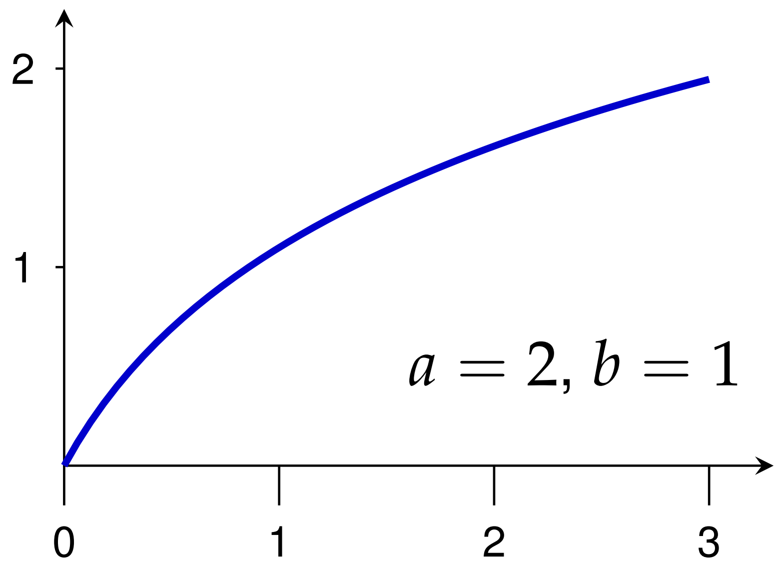
Nutzenfunktionen haben dieselben Eigenschaften wie Produktionsfunktionen.

(a) Überprüfen Sie die in Aufgabe 8.4 genannten Eigenschaften.

(b) Zeichnen Sie $f(x)$ und $f'(x)$.
(Setzen Sie dabei für a und b geeignete Werte ein.)

(c) Was bedeuten diese Eigenschaften in diesem Zusammenhang inhaltlich?

Lösung 8.5



Hinweis: Bilden Sie die erste und zweite Ableitung und überprüfen Sie, ob die angegebenen Eigenschaften von der Funktion auch tatsächlich erfüllt werden. Beachten Sie dabei, welche Einschränkungen a und b genügen. Z.B.:

$f''(x) = -a^2\, b\, (a\, x + 1)^{-2} < 0$,

da $a, b, x > 0$.

Aufgabe 8.6

Zeigen Sie durch Einsetzen in die Definition, dass $f(x) = x^2$ streng konvex ist.

Hinweis: Zeigen Sie, dass die Ungleichung
$\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y\right)^2 - \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2\right) < 0$ für alle $x \neq y$ erfüllt ist.

Lösung 8.6

$$\left(\tfrac{1}{2}x+\tfrac{1}{2}y\right)^2-\left(\tfrac{1}{2}x^2+\tfrac{1}{2}y^2\right)=\tfrac{1}{4}x^2+\tfrac{1}{2}xy+\tfrac{1}{4}y^2-\tfrac{1}{2}x^2-\tfrac{1}{2}y^2=$$
$$-\tfrac{1}{4}x^2+\tfrac{1}{2}xy-\tfrac{1}{4}y^2=-\left(\tfrac{1}{4}x^2-\tfrac{1}{2}xy+\tfrac{1}{4}y^2\right)=-\left(\tfrac{1}{2}x-\tfrac{1}{2}y\right)^2<0.$$

Aufgabe 8.7

Zeigen Sie:

Falls $f(x)$ eine differenzierbare konkave Funktion ist, dann ist $g(x) = -f(x)$ konvex.

Lösung 8.7

Da f konkav ist, gilt für alle x, $f''(x) \leq 0$.
Daher ist $g''(x) = (-f(x))'' = -f''(x) \geq 0$, i.e., g ist konvex.

Aufgabe 8.8

Seien $f(x)$ und $g(x)$ zwei differenzierbare konkave Funktionen auf $\mathbb{R}$.
Zeigen Sie mit Hilfe der zweiten Ableitung, dass auch
$h(x) = \alpha\, f(x) + \beta\, g(x)$ für $\alpha, \beta > 0$ eine konkave Funktion ist.
Was passiert, falls $\alpha > 0$ und $\beta < 0$?

Lösung 8.8

$h''(x) = \alpha f''(x) + \beta g''(x) \leq 0$, i.e., h ist konkav. Falls $\beta < 0$ dann ist $\beta g''(x)$ nicht mehr negativ und das Vorzeichen von $\alpha f''(x) + \beta g''(x)$ kann nicht mehr allgemein bestimmt werden.

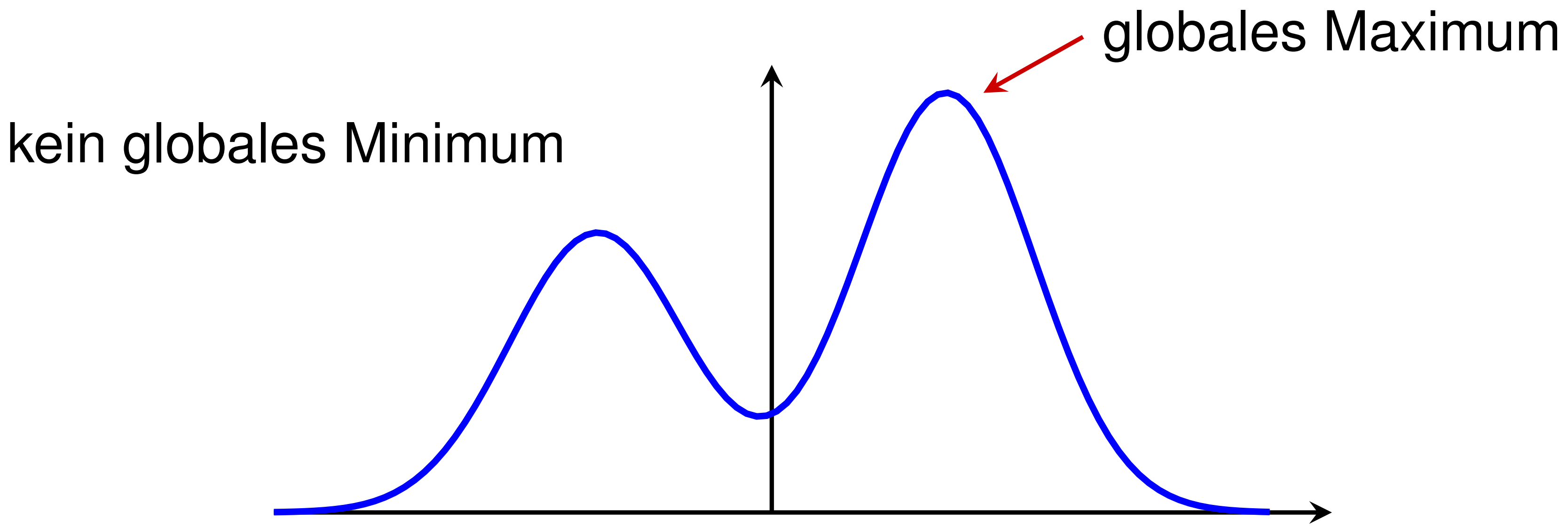
Globales Extremum (Optimum)

Ein Punkt x^* heißt **globales Maximum** (*absolutes Maximum*) von f, falls für alle $x \in D_f$ gilt:

$$f(x^*) \geq f(x)$$

Ein Punkt x^* heißt **globales Minimum** (*absolutes Minimum*) von f, falls für alle $x \in D_f$ gilt:

$$f(x^*) \leq f(x)$$



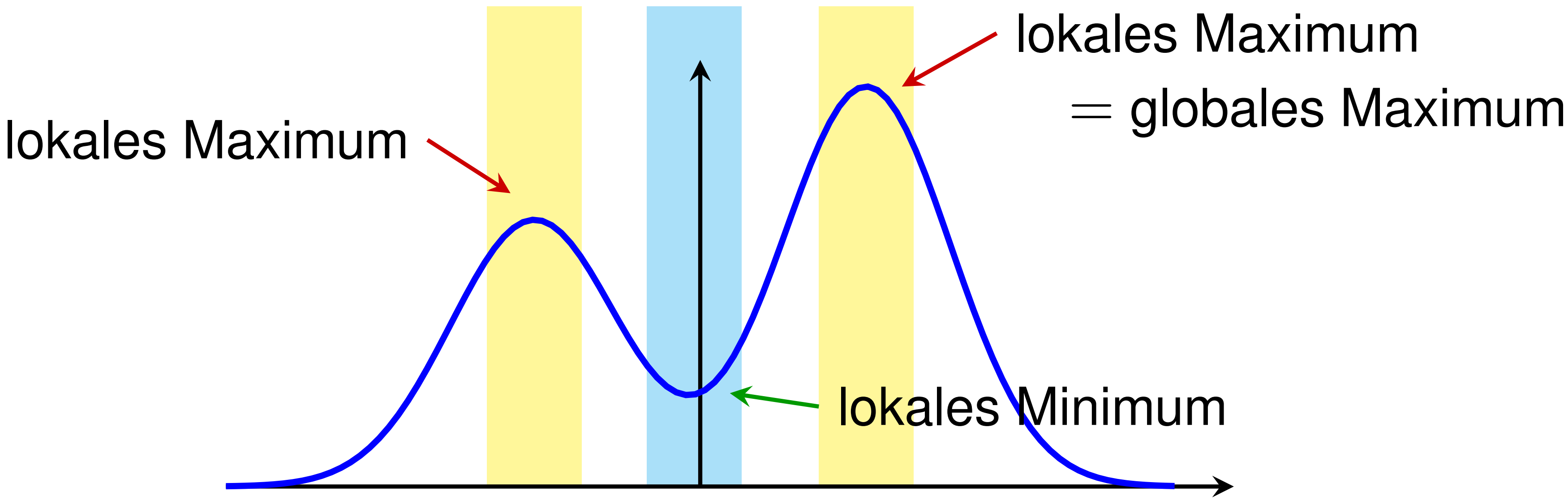
Lokales Extremum (Optimum)

Ein Punkt x_0 heißt **lokales Maximum** (*relatives* Maximum) von f, falls für alle x in einer *geeigneten Umgebung* von x_0 gilt:

$$f(x_0) \geq f(x)$$

Ein Punkt x_0 heißt **lokales Minimum** (*relatives Minimum*) von f, falls für alle x in einer geeigneten Umgebung von x_0 gilt:

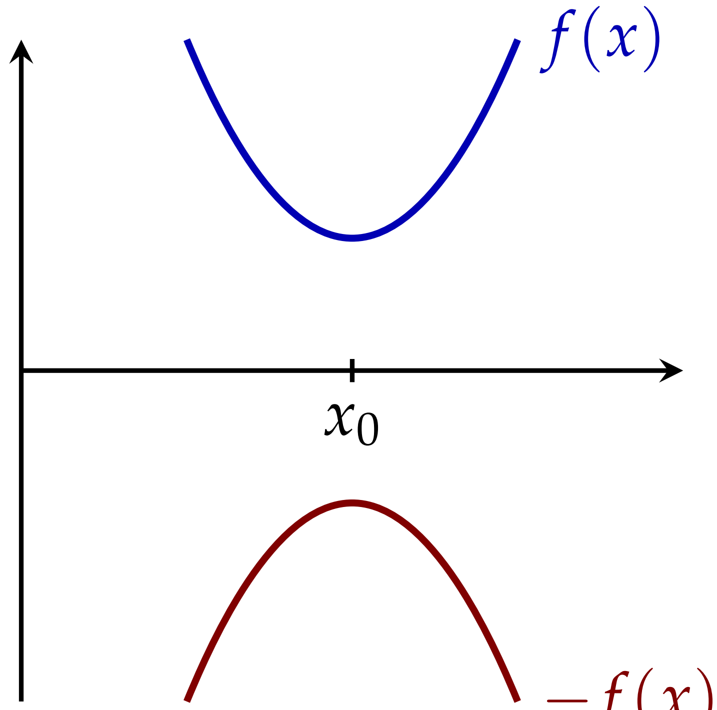
$$f(x_0) \leq f(x)$$



Minima und Maxima

Es sei darauf aufmerksam gemacht, dass wir aus einem Minimierungsproblem ein Maximierungsproblem machen können, und umgekehrt:

Ein Punkt x_0 ist ein Minimum von $f(x)$, genau dann wenn x_0 ein Maximum von $-f(x)$ ist.



Kritischer Punkt

In einem (lokalen) Maximum oder Minimum muss die Ableitung gleich Null sein.

Ein Punkt x_0 heißt **kritischer Punkt** (oder *stationärer Punkt*) einer Funktion f, wenn

$$f'(x_0) = 0$$

Notwendige Bedingung:

Jedes Extremum von f ist ein kritischer Punkt von f.

Globales Extremum

Hinreichende Bedingung:

Sei x_0 ein kritischer Punkt einer **konkaven** (oder *konvexen*) Funktion f. Dann ist x_0 ein **globales Maximum** (bzw. *globales Minimum*) von f.

Falls f *streng* konkav (oder konvex) ist, dann ist das Extremum eindeutig bestimmt.

Beispiel – Globales Extremum

Sei $f(x) = e^x - 2\,x$.

Die Funktion ist streng konvex:

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^x - 2 \\ f''(x) &= e^x \quad > 0 \quad \textbf{für alle } x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Kritischer Punkt:

$$f'(x) = e^x - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_0 = \ln 2$$

$x_0 = \ln 2$ ist das (eindeutig bestimmte) globale Minimum von f.

Lokal konkav

Ein Punkt x_0 ist ein **lokales Maximum** (oder *Minimum*) von f, falls

- x_0 ist ein **kritischer Punkt** von f,
- f ist **lokal konkav** (bzw. *lokal konvex*) um x_0.

Lokales Extremum

Hinreichende Bedingung:

Sei x_0 ein kritischer Punkt von f. Dann gilt

- $f''(x_0) < 0 \quad \Rightarrow \quad x_0$ ist lokales Maximum
- $f''(x_0) > 0 \quad \Rightarrow \quad x_0$ ist lokales Minimum

Es ist ausreichend $f''(x)$ am kritischen Punkt x_0 auszuwerten.
(Im Gegensatz zur Bedingung für globale Extrema.)

Notwendig und hinreichend

An Beispiel der lokalen Extrema in $\mathbb{R}$ seien kurz zwei wichtige Begriffe aus der mathematischen Argumentation erläutert.

Die Bedingung „$f'(x_0) = 0$“ ist **notwendig** für ein lokales Minimum:
Jedes lokale Minimum muss diese Eigenschaft haben.
Aber nicht jeder Punkt mit dieser Eigenschaft ist ein lokales Minimum (z.B. $x_0 = 0$ in $f(x) = x^3$).
Stationären Punkte sind *Kandidaten* für lokale Minima.

Die Bedingung „$f'(x_0) = 0$ *und* $f''(x_0) < 0$“ ist **hinreichend** für ein lokales Minimum.
Ist sie erfüllt, so ist x_0 ein lokales Minimum.
Es gibt aber auch Minima, die diese Bedingung nicht erfüllen (z.B. $x_0 = 0$ in $f(x) = x^4$).
Ist sie *nicht* erfüllt, so können wir daraus gar nichts *schließen*.

Vorgangsweise

Hinreichende Bedingung
für lokale Extremwerte einer Funktion in *einer* Variablen:

1. Berechne $f'(x)$ und $f''(x)$.
2. Suche alle Punkte x_i mit $f'(x_i) = 0$ (kritischen Punkte).
3. Falls $f''(x_i) < 0 \quad \Rightarrow \quad x_i$ ist ein *lokales Maximum*.

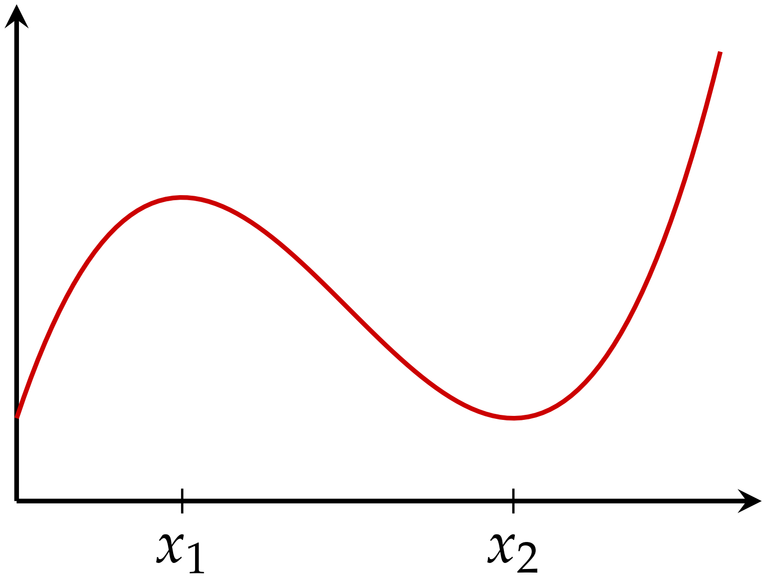
   Falls $f''(x_i) > 0 \quad \Rightarrow \quad x_i$ ist ein *lokales Minimum*.

   Falls $f''(x_i) = 0 \quad \Rightarrow$ *keine* Aussage möglich!

Beispiel – Lokales Minimum

Gesucht sind die lokalen Extrema der Funktion

$$f(x) = \frac{1}{12}\,x^3 - x^2 + 3\,x + 1$$



1. $f'(x) = \frac{1}{4}\,x^2 - 2\,x + 3$,

$f''(x) = \frac{1}{2}\,x - 2$.

2. $\frac{1}{4}\,x^2 - 2\,x + 3 = 0$

besitzt die Lösungen

$x_1 = 2$ und $x_2 = 6$.

3. $f''(2) = -1 \quad \Rightarrow \quad x_1$ ist lokales Maximum.

$f''(6) = 1 \quad \Rightarrow \quad x_2$ ist lokales Minimum.

Globale Extrema auf $[a, b]$

Extrema von $f(x)$ über einem **abgeschlossenen** Intervall $[a, b]$.

Vorgangsweise: (für differenzierbare Funktionen)

(1) Berechne $f'(x)$.

(2) Suche alle stationären Punkte x_i (d.h., $f'(x_i) = 0$).

(3) Berechne $f(x)$ für alle *Kandidaten*:

- alle stationären Punkte x_i,
- die Randpunkte a und b.

(4) Der größte dieser Werte ist ein **globale Maximum**, der kleinste dieser Werte ist ein **globale Minimum**.

Es ist *nicht* notwendig $f''(x_i)$ zu berechnen.

Globale Extrema auf $[a, b]$

Gesucht sind die *globalen* Extrema der Funktion

$$f\colon [0{,}5; 8{,}5] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{12}\,x^3 - x^2 + 3\,x + 1$$

(1) $f'(x) = \frac{1}{4}\,x^2 - 2\,x + 3$.

(2) $\frac{1}{4}\,x^2 - 2\,x + 3 = 0$ besitzt die Lösungen $x_1 = 2$ und $x_2 = 6$.

(3)
$$\begin{aligned} f(0{,}5) &= 2{,}260 & & \\ f(2) &= 3{,}667 & & \\ f(6) &= 1{,}000 & \Rightarrow \quad & \text{globales Minimum} \\ f(8,5) &= 5{,}427 & \Rightarrow \quad & \text{globales Maximum} \end{aligned}$$

(4) $x_2 = 6$ ist ein globales Minimum und
$b = 8{,}5$ ist ein globales Maximum von f.

Globale Extrema auf (a, b)

Extrema von $f(x)$ über einem **offenen** Intervall (a, b) (oder $(-\infty, \infty)$).

Vorgangsweise: (für differenzierbare Funktionen)

(1) Berechne $f'(x)$.

(2) Suche alle stationären Punkte x_i (d.h., $f'(x_i) = 0$).

(3) Berechne $f(x)$ für alle stationären Punkte x_i.

(4) Berechne $\lim_{x \to a} f(x)$ und $\lim_{x \to b} f(x)$.

(5) Der größte dieser Werte ist ein **globale Maximum**, der kleinste dieser Werte ist ein **globale Minimum**.

(6) Die globalen Extrema existieren aber **nur dann**, wenn sie an einem *stationären Punkt* angenommen werden!

Globale Extrema auf $[a, b]$

Gesucht sind die *globalen* Extrema der Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto e{-}x^2$$

(1) $f'(x) = -2x\, e^{-x^2}$.

(2) $f'(x) = -2x\, e^{-x^2} = 0$ besitzt die einzige Lösung $x_1 = 0$.

(3)
$$\begin{aligned} f(0) &= 1 && \Rightarrow && \text{globales Maximum} \\ \lim_{x\to-\infty} f(x) &= 0 && \Rightarrow && \text{das globale Minimum existiert nicht} \\ \lim_{x\to\infty} f(x) &= 0 \end{aligned}$$

(4) Die Funktion besitzt das globales Maximum $x_1 = 0$,
aber kein globales Minimum.

Existenz und Eindeutigkeit

- Es kann sein,
  dass eine Funktion weder Maxima noch Minima besitzt:

  $$f\colon (0,1) \to \mathbb{R},\ x \mapsto x$$

  (Die Punkte 1 und -1 liegen nicht in $(0,1)$.)

- Es kann sein,
  dass das globale Maximum nicht eindeutig bestimmt ist:

  $$f\colon [-2,2] \to \mathbb{R},\, x \mapsto x^4 - 2\,x^2$$

  hat drei globale Maxima an den Stellen -2, 0 und 2, und
  zwei globale Minima an den Stellen -1 und 1.

Aufgabe 8.9

Bestimmen Sie die lokalen Extremwerte der Funktionen

(a) $f(x) = (x-3)^6$

(b) $g(x) = \frac{x^2+1}{x}$

(c) $h(x) = e^{-x^2}$

Lösung 8.9

(a) Lokales Minimum in $x = 3$;
(b) Lokales Minimum in $x = 1$, lokales Maximum in $x = -1$;
(c) Lokales Maximum in $x = 0$.

Aufgabe 8.10

Berechnen Sie die globalen Extrema der Funktionen

(a) $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{x} + x$

(b) $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sqrt{x} - x$

(c) $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto e^{-2x} + 2x$

(d) $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R},\ x \mapsto x - \ln(x)$

Lösung 8.10

(a) globales Minimum in $x = 1$, kein globales Maximum;
(b) globales Maximum in $x = \frac{1}{4}$, kein globales Minimum;
(c) globales Minimum in $x = 0$, kein globales Maximum;
(d) globales Minimum in $x = 1$, kein globales Maximum.

Aufgabe 8.11

Berechnen Sie die globale Maxima und Minima der Funktionen

(a) $f(x) = \frac{x^3}{12} - \frac{5}{4}x^2 + 4x - \frac{1}{2}$ im Intervall $[1, 12]$

(b) $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 - 3x + 2$ im Intervall $[-2, 6]$

(c) $f(x) = x^4 - 2\,x^2$ im Intervall $[-2, 2]$

Lösung 8.11

(a) Globales Maximum in $x = 12$, globales Minimum in $x = 8$;
(b) globales Maximum in $x = 6$, globales Minimum in $x = 3$;
(c) globale Maxima in $x = -2$ und $x = 2$,
globale Minima in $x = -1$ und $x = 1$.

Aufgabe 8.12

Der Gewinn eines Unternehmers für gegebene Preise p und einen Lohn w ist

$$\pi(x) = p \cdot f(x) - w \cdot x$$

$p \cdot f(x)$ gibt an, wie viel der Unternehmer aus dem Verkauf der Güter zum Preis p einnimmt. $w \cdot x$ gibt an, wie viel der Unternehmer an Löhnen zahlen muss.
Sei $f(x) = 4\,x^{\frac{1}{2}}$ die Produktionsfunktion aus Aufgabe 8.4 mit $a = \frac{1}{2}$ und $b = 4$.

(a) Zeichnen Sie $\pi(x)$ und $\pi'(x)$ für $p = 1$ und $w = 1$.

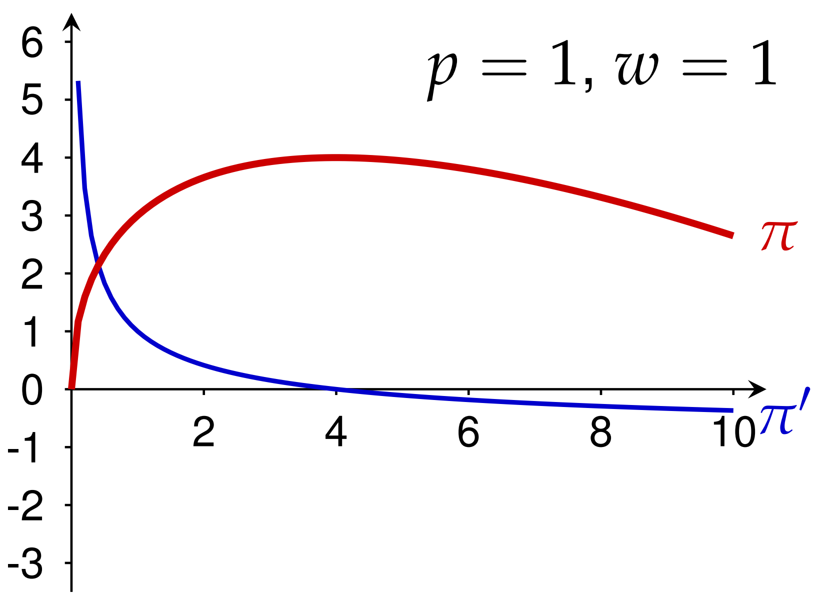
(b) Lesen Sie aus der Zeichnung ab, wie viel der Unternehmer produzieren muss, um seinen Gewinn $\pi(x)$ zu maximieren.

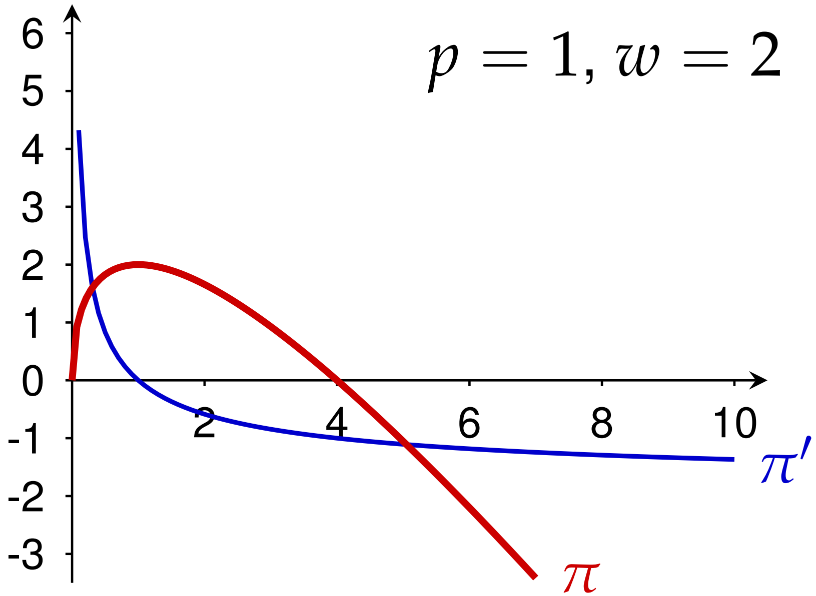
(c) Lösen sie das Optimierungsproblem auch ohne Zeichnung.

(d) Was passiert, wenn der Lohn auf $w = 2$ verdoppelt wird? (Zeichnung, Maximumsberechnung)

Lösung 8.12

(a)





(c) $\pi(x) = 4\,p\sqrt{x} - w\,x$. kritische Punkte: $x_0 = 4\,\frac{p^2}{w^2}$, $\pi''(x) < 0$, $\Rightarrow$ x_0 ist Maximum, für $p = 1$ und $w = 1$: $x_0 = 4$;

(d) analog, das Maximum ist bei $x = 1$.