

## Kapitel 8

# Monotonie, Konkavität und Extrema

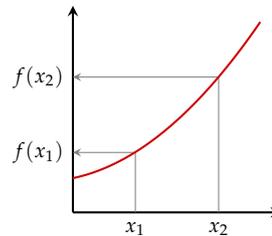
### Monotonie

Eine Funktion  $f$  heißt **monoton steigend**, falls

$$x_1 \leq x_2 \Leftrightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

Sie heißt *streng monoton steigend*, falls

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

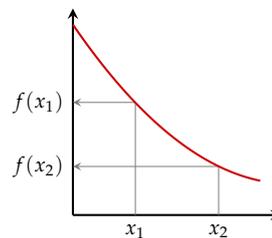


Eine Funktion  $f$  heißt **monoton fallend**, falls

$$x_1 \leq x_2 \Leftrightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$

Sie heißt *streng monoton fallend*, falls

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$$



### Monotonie

Für differenzierbare Funktionen gilt:

$$\begin{aligned} f \text{ monoton steigend} &\Leftrightarrow f'(x) \geq 0 \quad \text{für alle } x \in D_f \\ f \text{ monoton fallend} &\Leftrightarrow f'(x) \leq 0 \quad \text{für alle } x \in D_f \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f \text{ streng monoton steigend} &\Leftrightarrow f'(x) > 0 \quad \text{für alle } x \in D_f \\ f \text{ streng monoton fallend} &\Leftrightarrow f'(x) < 0 \quad \text{für alle } x \in D_f \end{aligned}$$

Die Funktion  $f: (0, \infty), x \mapsto \ln(x)$  ist streng monoton steigend, da

$$f'(x) = (\ln(x))' = \frac{1}{x} > 0 \quad \text{für alle } x > 0$$

## Lokale Monotonie

Eine Funktion kann in einem bestimmten Intervall monoton steigend, in einem anderen monoton fallend sein. Sie wird dann als **lokal monoton** auf dem entsprechenden Abschnitt bezeichnet.

Für *stetig* differenzierbare Funktionen eignet sich folgende Vorgangsweise:

1. Berechne erste Ableitung  $f'(x)$ .
2. Bestimme Nullstellen von  $f'(x)$ .
3. Erhalte Intervalle, in denen  $f'(x)$  das Vorzeichen nicht wechselt.
4. Wähle „geeigneten“ Punkt in jedem Intervall und bestimme dort das Vorzeichen von  $f'(x)$ .
5.  $f'(x)$  kann innerhalb eines Intervalls das Vorzeichen nicht ändern.

## Beispiel – Lokale Monotonie

In welchen Bereichen ist  $f(x) = 2x^3 - 12x^2 + 18x - 1$  monoton?

Suchen den Bereich, wo  $f'(x) \geq 0$ :

1.  $f'(x) = 6x^2 - 24x + 18$
2. Nullstellen:  $x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = 3$
3. Erhalte 3 Intervalle:  $(-\infty, 1]$ ,  $[1, 3]$  und  $[3, \infty)$
4. Vorzeichen von  $f'(x)$  an „geeigneten“ Punkt in jedem Intervall:  
 $f'(0) = 3 > 0$ ,  $f'(2) = -1 < 0$  und  $f'(4) = 3 > 0$ .
5.  $f'(x)$  kann innerhalb eines Intervalls das Vorzeichen nicht ändern:  
 $f'(x) \geq 0$  in  $(-\infty, 1]$  und  $[3, \infty)$ .

Die Funktion  $f(x)$  ist monoton steigend in  $(-\infty, 1] \cup [3, \infty)$ .

## Monotonie und inverse Funktion

Beachte:

Falls  $f$  *streng monoton* steigend ist, dann folgt aus

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

sofort auch

$$x_1 \neq x_2 \Leftrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

M.a.W.,  $f$  ist injektiv. Falls  $f$  auch surjektiv ist, ist  $f$  somit *invertierbar*.

Falls eine surjektive Funktion  $f$  streng monoton steigend oder fallend ist, dann ist sie auch invertierbar.

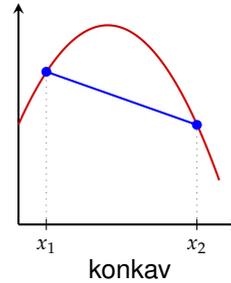
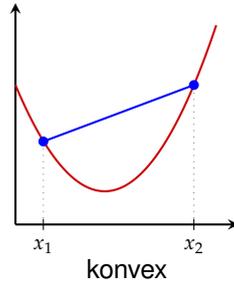
## Konvexität und Konkavität

Eine Funktion  $f$  heißt **konvex**, wenn

$$f((1-h)x_1 + hx_2) \leq (1-h)f(x_1) + hf(x_2)$$

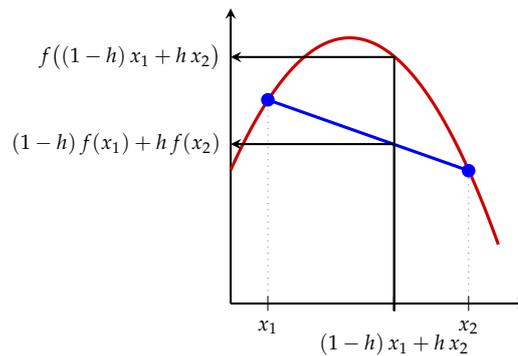
für alle  $x_1, x_2 \in D_f$  und alle  $h \in [0, 1]$ . Sie heißt **konkav**, wenn

$$f((1-h)x_1 + hx_2) \geq (1-h)f(x_1) + hf(x_2)$$



## Konkave Funktion

$$f((1-h)x_1 + hx_2) \geq (1-h)f(x_1) + hf(x_2)$$

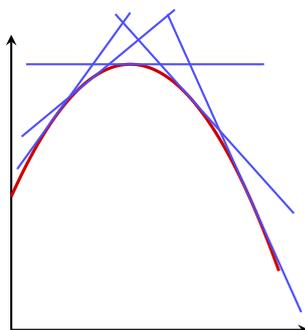


Sehne unterhalb des Funktionsgraphen.

## Konvexität und Konkavität

Für differenzierbare Funktionen gilt:

$$\begin{aligned} f \text{ konvex} &\Leftrightarrow f''(x) \geq 0 \quad \text{für alle } x \in D_f \\ f \text{ konkav} &\Leftrightarrow f''(x) \leq 0 \quad \text{für alle } x \in D_f \end{aligned}$$



$f'(x)$  ist monoton fallend,  
daher  $f''(x) \leq 0$

## Streng konvex / konkav

Eine Funktion  $f$  heißt **streng konvex**, wenn

$$f((1-h)x_1 + hx_2) < (1-h)f(x_1) + hf(x_2)$$

für alle  $x_1, x_2 \in D_f$ ,  $x_1 \neq x_2$  und alle  $h \in (0, 1)$ .

Sie heißt **streng konkav**, wenn

$$f((1-h)x_1 + hx_2) > (1-h)f(x_1) + hf(x_2)$$

Für differenzierbare Funktionen gilt:

$$f \text{ streng konvex} \Leftrightarrow f''(x) > 0 \quad \text{für alle } x \in D_f$$

$$f \text{ streng konkav} \Leftrightarrow f''(x) < 0 \quad \text{für alle } x \in D_f$$

## Beispiel – konvex

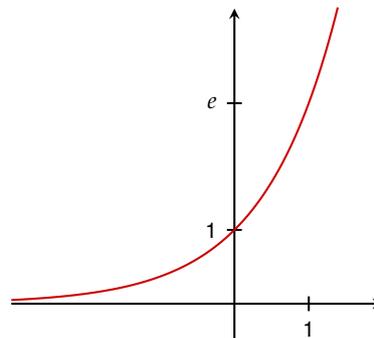
Exponentialfunktion:

$$f(x) = e^x$$

$$f'(x) = e^x$$

$$f''(x) = e^x > 0 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$

$\exp(x)$  ist (streng) konvex.



## Beispiel – konkav

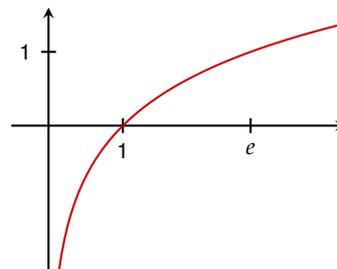
Logarithmusfunktion: ( $x > 0$ )

$$f(x) = \ln(x)$$

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0 \quad \text{für alle } x > 0$$

$\ln(x)$  ist (streng) konkav.



## Lokale Konkavität

Eine Funktion kann auch auf einem bestimmten Intervall konkav, auf einem anderen konvex sein. Sie wird dann als **lokal konkav**, bzw. **lokal konvex** auf dem entsprechenden Abschnitt bezeichnet.

Für *stetig* differenzierbare Funktionen eignet sich folgende Vorgangsweise:

1. Berechne zweite Ableitung  $f''(x)$ .
2. Bestimme Nullstellen von  $f''(x)$ .
3. Erhalte Intervalle, in denen  $f''(x)$  das Vorzeichen nicht wechselt.
4. Wähle „geeigneten“ Punkt in jedem Intervall und bestimme dort das Vorzeichen von  $f''(x)$ .
5.  $f''(x)$  kann innerhalb eines Intervalls das Vorzeichen nicht ändern.

## Beispiel – Lokale Konkavität

In welchem Bereich ist  $f(x) = 2x^3 - 12x^2 + 18x - 1$  konkav?

Suchen den Bereich, wo  $f''(x) \leq 0$ .

1.  $f''(x) = 12x - 24$
2. Nullstellen:  $12x - 24 = 0 \Rightarrow x = 2$
3. Erhalte 2 Intervalle:  $(-\infty, 2]$  und  $[2, \infty)$
4. Vorzeichen von  $f''(x)$  an „geeigneten“ Punkt in jedem Intervall:  
 $f''(0) = -24 < 0$  und  $f''(4) = 24 > 0$ .
5.  $f''(x)$  kann innerhalb eines Intervalls das Vorzeichen nicht ändern:  $f''(x) \leq 0$  in  $(-\infty, 2]$

Die Funktion  $f(x)$  ist konkav in  $(-\infty, 2]$ .

## Aufgabe 8.1

Bestimmen Sie die mit Hilfe der zweiten Ableitung die Krümmung (d.h. Konkavität oder Konvexität) folgender Funktionen. Welche Fälle sind möglich?

- (a)  $\exp(x)$
- (b)  $\ln(x)$
- (c)  $\log_{10}(x)$
- (d)  $x^\alpha$  für  $x > 0$  für ein  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

## Lösung 8.1

- (a) konvex;
- (b) konkav;
- (c) konkav;
- (d) konvex falls  $\alpha \geq 1$  und  $\alpha \leq 0$ ,  
konkav falls  $0 \leq \alpha \leq 1$ .

## Aufgabe 8.2

In welchem Bereich ist die Funktion

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 19$$

monoton steigend bzw. fallend?

In welchem Bereich ist die konvex bzw. konkav?

## Lösung 8.2

Monoton fallend in  $[-1, 3]$ ,  
monoton steigend in  $(-\infty, -1] \cup [3, \infty)$ ;

Konkav in  $(-\infty, 1]$ ,  
konvex in  $[1, \infty)$ .

## Aufgabe 8.3

In welchem Bereich ist die Funktion

$$x e^{x^2}$$

monoton steigend bzw. fallend?

In welchem Bereich ist die konvex bzw. konkav?

## Lösung 8.3

Monoton steigend in  $\mathbb{R}$ ,

Konkav in  $(-\infty, 0]$ ,

konvex in  $[0, \infty)$ .

## Aufgabe 8.4

Die Funktion

$$f(x) = b x^{1-a} \quad 0 < a < 1, b > 0, x \geq 0$$

ist ein Beispiel für eine Produktionsfunktion, d.h. mit  $x$  Einheiten Arbeit kann man  $f(x)$  Güter produzieren.

Produktionsfunktionen haben i.a. folgende Eigenschaften:

(1)  $f(0) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$

(2)  $f'(x) > 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = 0$

(3)  $f''(x) < 0$

(a) Überprüfen Sie diese Eigenschaften an der obigen Funktion.

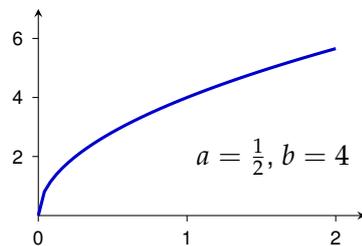
(b) Zeichnen Sie  $f(x)$  und  $f'(x)$ .

(Setzen Sie dabei für  $a$  und  $b$  geeignete Werte ein.)

## Aufgabe 8.4 / 2

- (c) Was bedeuten diese Eigenschaften inhaltlich?  
(z.B.: Wenn  $x = 0$ , wird nichts produziert.)

## Lösung 8.4



Hinweis: Bilden Sie die erste und zweite Ableitung und überprüfen Sie, ob die angegebenen Eigenschaften von der Funktion auch tatsächlich erfüllt werden. Beachten Sie dabei, welche Einschränkungen  $a$  und  $b$  genügen. Z.B.:

$$f''(x) = \underbrace{b a}_{>0} \underbrace{(a-1)}_{<0} \underbrace{x^{-a-1}}_{>0} < 0.$$

## Aufgabe 8.5

Die Funktion

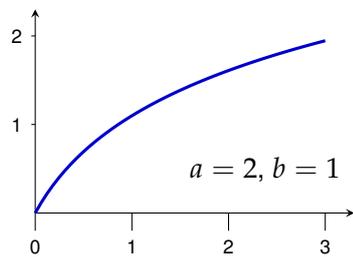
$$f(x) = b \ln(ax + 1) \quad a, b > 0, x \geq 0$$

ist ein Beispiel für eine Nutzenfunktion. Konsumenten haben einen Nutzen  $f(x)$ , wenn sie  $x$  Einheiten eines Gutes konsumieren.

Nutzenfunktionen haben dieselben Eigenschaften wie Produktionsfunktionen.

- (a) Überprüfen Sie die in Aufgabe 8.4 genannten Eigenschaften.  
(b) Zeichnen Sie  $f(x)$  und  $f'(x)$ .  
(Setzen Sie dabei für  $a$  und  $b$  geeignete Werte ein.)  
(c) Was bedeuten diese Eigenschaften in diesem Zusammenhang inhaltlich?

## Lösung 8.5



Hinweis: Bilden Sie die erste und zweite Ableitung und überprüfen Sie, ob die angegebenen Eigenschaften von der Funktion auch tatsächlich erfüllt werden. Beachten Sie dabei, welche Einschränkungen  $a$  und  $b$  genügen. Z.B.:

$$f''(x) = -a^2 b (ax + 1)^{-2} < 0,$$

da  $a, b, x > 0$ .

## Aufgabe 8.6

Zeigen Sie durch Einsetzen in die Definition, dass  $f(x) = x^2$  streng konvex ist.

Hinweis: Zeigen Sie, dass die Ungleichung

$$\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y\right)^2 - \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2\right) < 0 \text{ für alle } x \neq y \text{ erfüllt ist.}$$

## Lösung 8.6

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y\right)^2 - \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2\right) &= \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}xy + \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2 = \\ -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}xy - \frac{1}{4}y^2 &= -\left(\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}xy + \frac{1}{4}y^2\right) = -\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y\right)^2 < 0. \end{aligned}$$

## Aufgabe 8.7

Zeigen Sie:

Falls  $f(x)$  eine differenzierbare konkave Funktion ist, dann ist  $g(x) = -f(x)$  konvex.

## Lösung 8.7

Da  $f$  konkav ist, gilt für alle  $x$ ,  $f''(x) \leq 0$ .

Daher ist  $g''(x) = (-f(x))'' = -f''(x) \geq 0$ , i.e.,  $g$  ist konvex.

## Aufgabe 8.8

Seien  $f(x)$  und  $g(x)$  zwei differenzierbare konkave Funktionen auf  $\mathbb{R}$ .

Zeigen Sie mit Hilfe der zweiten Ableitung, dass auch

$h(x) = \alpha f(x) + \beta g(x)$  für  $\alpha, \beta > 0$  eine konkave Funktion ist.

Was passiert, falls  $\alpha > 0$  und  $\beta < 0$ ?

## Lösung 8.8

$h''(x) = \alpha f''(x) + \beta g''(x) \leq 0$ , i.e.,  $h$  ist konkav. Falls  $\beta < 0$  dann ist  $\beta g''(x)$  nicht mehr negativ und das Vorzeichen von  $\alpha f''(x) + \beta g''(x)$  kann nicht mehr allgemein bestimmt werden.

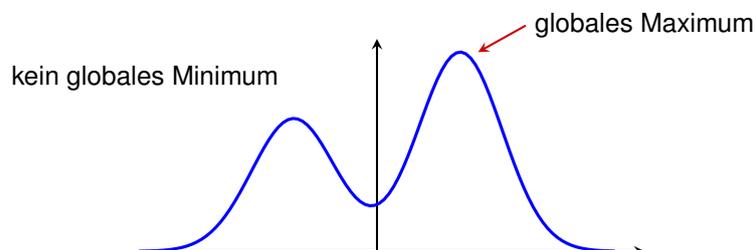
### Globales Extremum (Optimum)

Ein Punkt  $x^*$  heißt **globales Maximum** (*absolute Maximum*) von  $f$ , falls für alle  $x \in D_f$  gilt:

$$f(x^*) \geq f(x)$$

Ein Punkt  $x^*$  heißt **globales Minimum** (*absolute Minimum*) von  $f$ , falls für alle  $x \in D_f$  gilt:

$$f(x^*) \leq f(x)$$



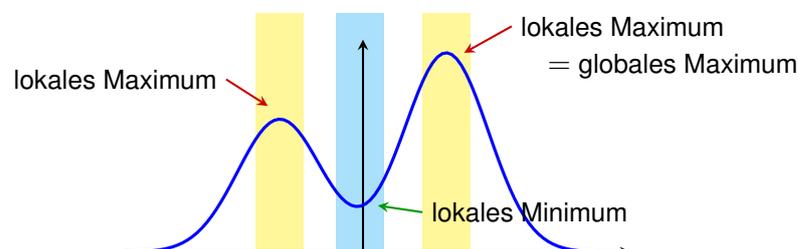
### Lokales Extremum (Optimum)

Ein Punkt  $x_0$  heißt **lokales Maximum** (*relative Maximum*) von  $f$ , falls für alle  $x$  in einer *geeigneten Umgebung* von  $x_0$  gilt:

$$f(x_0) \geq f(x)$$

Ein Punkt  $x_0$  heißt **lokales Minimum** (*relative Minimum*) von  $f$ , falls für alle  $x$  in einer geeigneten Umgebung von  $x_0$  gilt:

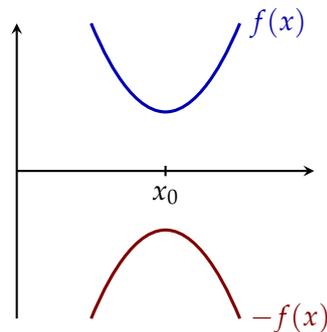
$$f(x_0) \leq f(x)$$



## Minima und Maxima

Es sei darauf aufmerksam gemacht, dass wir aus einem Minimierungsproblem ein Maximierungsproblem machen können, und umgekehrt:

Ein Punkt  $x_0$  ist ein Minimum von  $f(x)$ , genau dann wenn  $x_0$  ein Maximum von  $-f(x)$  ist.



## Kritischer Punkt

In einem (lokalen) Maximum oder Minimum muss die Ableitung gleich Null sein.

Ein Punkt  $x_0$  heißt **kritischer Punkt** (oder *stationärer Punkt*) einer Funktion  $f$ , wenn

$$f'(x_0) = 0$$

*Notwendige Bedingung:*

Jedes Extremum von  $f$  ist ein kritischer Punkt von  $f$ .

## Globales Extremum

*Hinreichende Bedingung:*

Sei  $x_0$  ein kritischer Punkt einer **konkaven** (oder *konvexen*) Funktion  $f$ . Dann ist  $x_0$  ein **globales Maximum** (bzw. *globales Minimum*) von  $f$ .

Falls  $f$  *streng* konkav (oder konvex) ist, dann ist das Extremum eindeutig bestimmt.

## Beispiel – Globales Extremum

Sei  $f(x) = e^x - 2x$ .

Die Funktion ist streng konvex:

$$f'(x) = e^x - 2$$

$$f''(x) = e^x > 0 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$

Kritischer Punkt:

$$f'(x) = e^x - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_0 = \ln 2$$

$x_0 = \ln 2$  ist das (eindeutig bestimmte) globale Minimum von  $f$ .

## Lokal konkav

Ein Punkt  $x_0$  ist ein **lokales Maximum** (oder *Minimum*) von  $f$ , falls

- ▶  $x_0$  ist ein **kritischer Punkt** von  $f$ ,
- ▶  $f$  ist **lokal konkav** (bzw. *lokal konvex*) um  $x_0$ .

## Lokales Extremum

*Hinreichende Bedingung:*

Sei  $x_0$  ein kritischer Punkt von  $f$ . Dann gilt

- ▶  $f''(x_0) < 0 \quad \Rightarrow \quad x_0$  ist lokales Maximum
- ▶  $f''(x_0) > 0 \quad \Rightarrow \quad x_0$  ist lokales Minimum

Es ist ausreichend  $f''(x)$  am kritischen Punkt  $x_0$  auszuwerten.  
(Im Gegensatz zur Bedingung für globale Extrema.)

## Notwendig und hinreichend

An Beispiel der lokalen Extrema in  $\mathbb{R}$  seien kurz zwei wichtige Begriffe aus der mathematischen Argumentation erläutert.

Die Bedingung „ $f'(x_0) = 0$ “ ist **notwendig** für ein lokales Minimum: Jedes lokale Minimum muss diese Eigenschaft haben. Aber nicht jeder Punkt mit dieser Eigenschaft ist ein lokales Minimum (z.B.  $x_0 = 0$  in  $f(x) = x^3$ ). Stationären Punkte sind *Kandidaten* für lokale Minima.

Die Bedingung „ $f'(x_0) = 0$  und  $f''(x_0) < 0$ “ ist **hinreichend** für ein lokales Minimum.

Ist sie erfüllt, so ist  $x_0$  ein lokales Minimum.

Es gibt aber auch Minima, die diese Bedingung nicht erfüllen (z.B.  $x_0 = 0$  in  $f(x) = x^4$ ).

Ist sie *nicht* erfüllt, so können wir daraus gar nichts *schließen*.

## Vorgangsweise

### Hinreichende Bedingung

für lokale Extremwerte einer Funktion in *einer* Variablen:

1. Berechne  $f'(x)$  und  $f''(x)$ .
2. Suche alle Punkte  $x_i$  mit  $f'(x_i) = 0$  (kritischen Punkte).
3. Falls  $f''(x_i) < 0 \Rightarrow x_i$  ist ein *lokales Maximum*.  
Falls  $f''(x_i) > 0 \Rightarrow x_i$  ist ein *lokales Minimum*.  
Falls  $f''(x_i) = 0 \Rightarrow$  *keine Aussage möglich!*

## Beispiel – Lokales Minimum

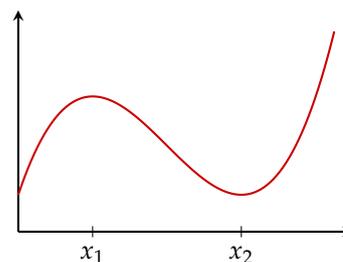
Gesucht sind die lokalen Extrema der Funktion

$$f(x) = \frac{1}{12}x^3 - x^2 + 3x + 1$$

1.  $f'(x) = \frac{1}{4}x^2 - 2x + 3,$   
 $f''(x) = \frac{1}{2}x - 2.$

2.  $\frac{1}{4}x^2 - 2x + 3 = 0$   
besitzt die Lösungen  
 $x_1 = 2$  und  $x_2 = 6.$

3.  $f''(2) = -1 \Rightarrow x_1$  ist lokales Maximum.  
 $f''(6) = 1 \Rightarrow x_2$  ist lokales Minimum.



## Globale Extrema auf $[a, b]$

Extrema von  $f(x)$  über einem **abgeschlossenen** Intervall  $[a, b]$ .

**Vorgangsweise:** (für differenzierbare Funktionen)

- (1) Berechne  $f'(x)$ .
- (2) Suche alle stationären Punkte  $x_i$  (d.h.,  $f'(x_i) = 0$ ).
- (3) Berechne  $f(x)$  für alle *Kandidaten*:
  - ▶ alle stationären Punkte  $x_i$ ,
  - ▶ die Randpunkte  $a$  und  $b$ .
- (4) Der größte dieser Werte ist ein **globales Maximum**, der kleinste dieser Werte ist ein **globales Minimum**.

Es ist *nicht* notwendig  $f''(x_i)$  zu berechnen.

## Globale Extrema auf $[a, b]$

Gesucht sind die *globalen* Extrema der Funktion

$$f: [0,5; 8,5] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{12}x^3 - x^2 + 3x + 1$$

- (1)  $f'(x) = \frac{1}{4}x^2 - 2x + 3$ .
- (2)  $\frac{1}{4}x^2 - 2x + 3 = 0$  besitzt die Lösungen  $x_1 = 2$  und  $x_2 = 6$ .
- (3)  $f(0,5) = 2,260$   
 $f(2) = 3,667$   
 $f(6) = 1,000 \Rightarrow$  globales Minimum  
 $f(8,5) = 5,427 \Rightarrow$  globales Maximum
- (4)  $x_2 = 6$  ist ein globales Minimum und  $b = 8,5$  ist ein globales Maximum von  $f$ .

## Globale Extrema auf $(a, b)$

Extrema von  $f(x)$  über einem **offenen** Intervall  $(a, b)$  (oder  $(-\infty, \infty)$ ).

**Vorgangsweise:** (für differenzierbare Funktionen)

- (1) Berechne  $f'(x)$ .
- (2) Suche alle stationären Punkte  $x_i$  (d.h.,  $f'(x_i) = 0$ ).
- (3) Berechne  $f(x)$  für alle stationären Punkte  $x_i$ .
- (4) Berechne  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  und  $\lim_{x \rightarrow b} f(x)$ .
- (5) Der größte dieser Werte ist ein **globales Maximum**, der kleinste dieser Werte ist ein **globales Minimum**.
- (6) Die globalen Extrema existieren aber **nur dann**, wenn sie an einem *stationären Punkt* angenommen werden!

## Globale Extrema auf $[a, b]$

Gesucht sind die *globalen* Extrema der Funktion

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto e^{-x^2}$$

(1)  $f'(x) = -2x e^{-x^2}$ .

(2)  $f'(x) = -2x e^{-x^2} = 0$  besitzt die einzige Lösung  $x_1 = 0$ .

(3)  $f(0) = 1 \Rightarrow$  globales Maximum

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 \Rightarrow$  das globale Minimum existiert nicht

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$

(4) Die Funktion besitzt das globale Maximum  $x_1 = 0$ ,  
aber kein globales Minimum.

## Existenz und Eindeutigkeit

- ▶ Es kann sein,  
dass eine Funktion weder Maxima noch Minima besitzt:

$$f: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x$$

(Die Punkte 1 und  $-1$  liegen nicht in  $(0, 1)$ .)

- ▶ Es kann sein,  
dass das globale Maximum nicht eindeutig bestimmt ist:

$$f: [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^4 - 2x^2$$

hat drei globale Maxima an den Stellen  $-2, 0$  und  $2$ , und  
zwei globale Minima an den Stellen  $-1$  und  $1$ .

## Aufgabe 8.9

Bestimmen Sie die lokalen Extremwerte der Funktionen

(a)  $f(x) = (x - 3)^6$

(b)  $g(x) = \frac{x^2+1}{x}$

(c)  $h(x) = e^{-x^2}$

## Lösung 8.9

- (a) Lokales Minimum in  $x = 3$ ;
- (b) Lokales Minimum in  $x = 1$ , lokales Maximum in  $x = -1$ ;
- (c) Lokales Maximum in  $x = 0$ .

## Aufgabe 8.10

Berechnen Sie die globalen Extrema der Funktionen

- (a)  $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x} + x$
- (b)  $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{x} - x$
- (c)  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto e^{-2x} + 2x$
- (d)  $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x - \ln(x)$

## Lösung 8.10

- (a) globales Minimum in  $x = 1$ , kein globales Maximum;
- (b) globales Maximum in  $x = \frac{1}{4}$ , kein globales Minimum;
- (c) globales Minimum in  $x = 0$ , kein globales Maximum;
- (d) globales Minimum in  $x = 1$ , kein globales Maximum.

## Aufgabe 8.11

Berechnen Sie die globale Maxima und Minima der Funktionen

(a)  $f(x) = \frac{x^3}{12} - \frac{5}{4}x^2 + 4x - \frac{1}{2}$  im Intervall  $[1, 12]$

(b)  $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 - 3x + 2$  im Intervall  $[-2, 6]$

(c)  $f(x) = x^4 - 2x^2$  im Intervall  $[-2, 2]$

## Lösung 8.11

(a) Globales Maximum in  $x = 12$ , globales Minimum in  $x = 8$ ;

(b) globales Maximum in  $x = 6$ , globales Minimum in  $x = 3$ ;

(c) globale Maxima in  $x = -2$  und  $x = 2$ ,  
globale Minima in  $x = -1$  und  $x = 1$ .

## Aufgabe 8.12

Der Gewinn eines Unternehmers für gegebene Preise  $p$  und einen Lohn  $w$  ist

$$\pi(x) = p \cdot f(x) - w \cdot x$$

$p \cdot f(x)$  gibt an, wie viel der Unternehmer aus dem Verkauf der Güter zum Preis  $p$  einnimmt.  $w \cdot x$  gibt an, wie viel der Unternehmer an Löhnen zahlen muss.

Sei  $f(x) = 4x^{\frac{1}{2}}$  die Produktionsfunktion aus Aufgabe 8.4 mit  $a = \frac{1}{2}$  und  $b = 4$ .

(a) Zeichnen Sie  $\pi(x)$  und  $\pi'(x)$  für  $p = 1$  und  $w = 1$ .

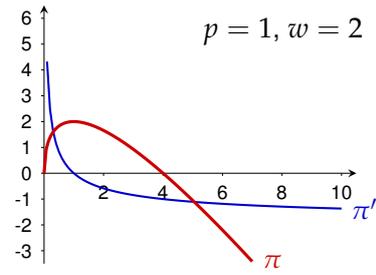
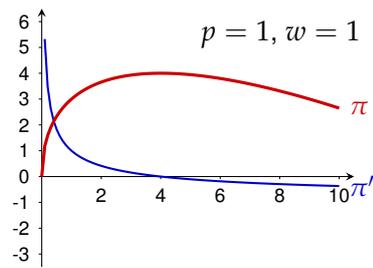
(b) Lesen Sie aus der Zeichnung ab, wie viel der Unternehmer produzieren muss, um seinen Gewinn  $\pi(x)$  zu maximieren.

(c) Lösen sie das Optimierungsproblem auch ohne Zeichnung.

(d) Was passiert, wenn der Lohn auf  $w = 2$  verdoppelt wird?  
(Zeichnung, Maximumberechnung)

## Lösung 8.12

(a)



(c)  $\pi(x) = 4p\sqrt{x} - wx$ . kritische Punkte:  $x_0 = 4 \frac{p^2}{w^2}$ ,  $\pi''(x) < 0$ ,  $\Rightarrow$   
 $x_0$  ist Maximum, für  $p = 1$  und  $w = 1$ :  $x_0 = 4$ ;

(d) analog, das Maximum ist bei  $x = 1$ .