

## Kapitel 7

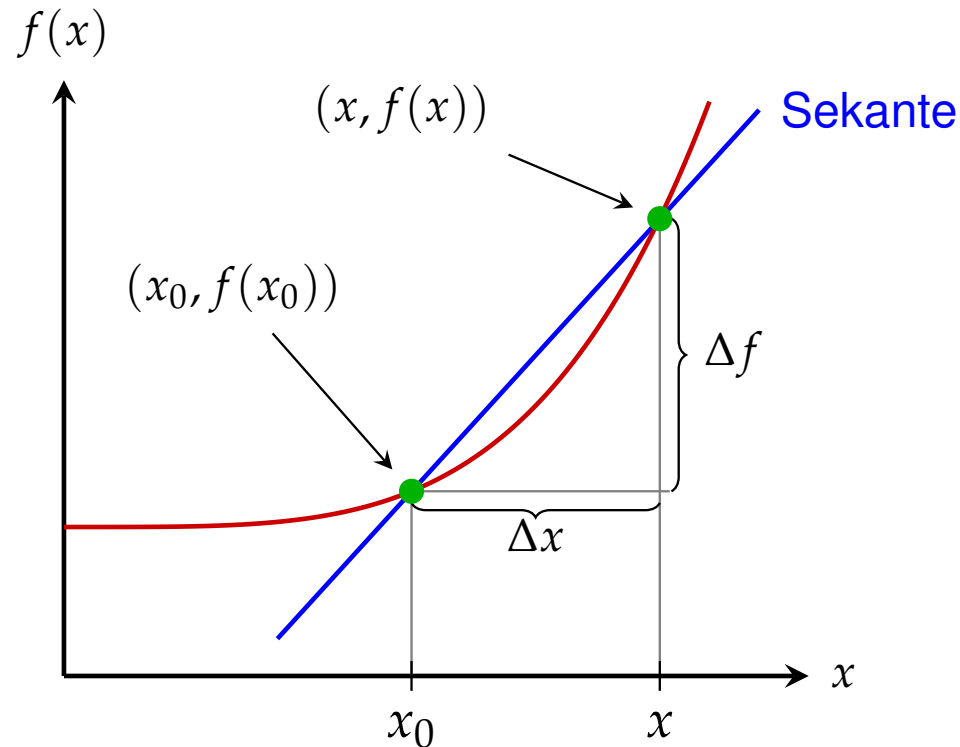
# Differentialrechnung

# Differenzenquotient

Sei  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion. Der Quotient

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

heißt **Differenzenquotient** an der Stelle  $x_0$ .



# Differentialquotient

Falls der Limes

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existiert, so heißt die Funktion  $f$  **differenzierbar** an der Stelle  $x_0$  und dieser Grenzwert **Differentialquotient** oder **(erste) Ableitung** der Funktion an der Stelle  $x_0$ .

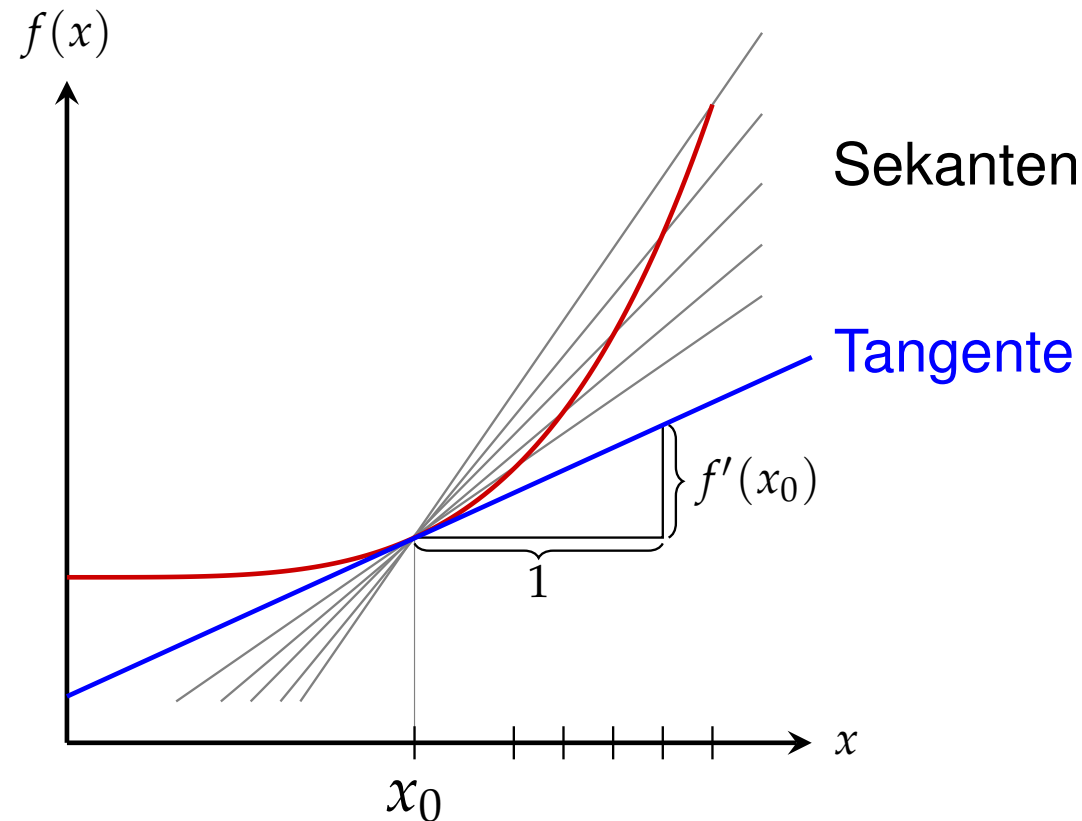
Eine Funktion  $f$  heißt *differenzierbar*, wenn sie in jedem Punkt des Definitionsbereichs differenzierbar ist.

Schreibweisen:

$$f'(x_0) = \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_0}$$

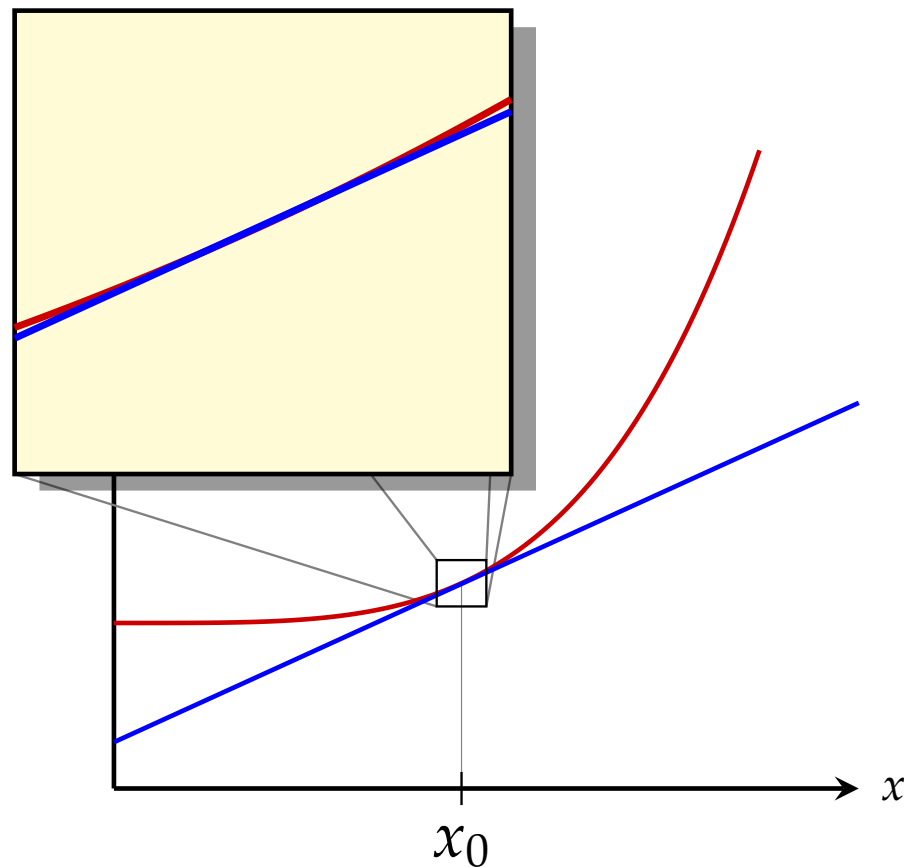
# Graphische Interpretation des Differentialquotienten

- Anstieg der Tangente an den Graphen der Funktion  $f(x)$  an der Stelle  $x_0$ .



# Interpretation als „Grenzfunktion“

- ▶ Marginalquote, oder „Grenzfunktion“ einer Wirkungsgröße  $y = f(x)$  bezüglich einer Faktorgröße  $x$ .



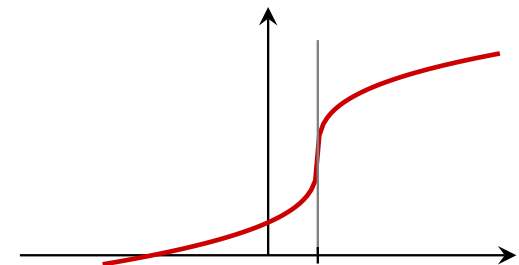
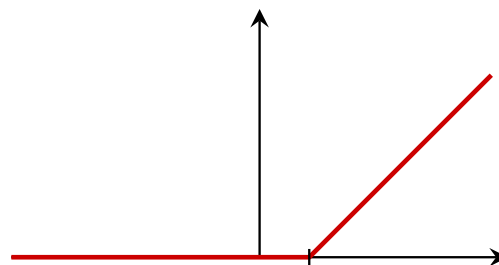
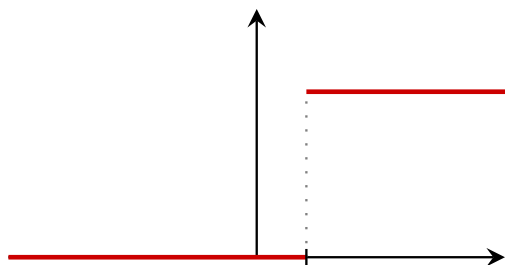
# Existenz des Differentialquotienten

Eine Funktion  $f$  ist differenzierbar in allen Punkten, in denen sich eine Tangente mit endlicher Steigung an den Graphen legen lässt.

In allen Punkten in denen das nicht möglich ist, ist die Funktion *nicht* differenzierbar.

Das sind vor allem

- ▶ Unstetigkeitsstellen („Sprungstellen“)
- ▶ „Knicke“ im Graph der Funktion
- ▶ Senkrechte Tangenten



# Berechnung des Differentialquotienten

Der Differentialquotient kann durch Bestimmen des Grenzwertes berechnet werden.

Sei  $f(x) = x^2$ . Dann ist

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x_0 + h)^2 - x_0^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x_0^2 + 2x_0h + h^2 - x_0^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2x_0h + h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2x_0 + h) \\ &= 2x_0 \end{aligned}$$

# Aufgabe 7.1

Zeichnen Sie den Graphen der folgenden Funktionen. Sind diese Funktionen differenzierbar, bzw. wo sind sie differenzierbar? Sind die Funktionen stetig?

(a)  $f(x) = 2x + 2$

(b)  $f(x) = 3$

(c)  $f(x) = |x|$

(d)  $f(x) = \sqrt{|x^2 - 1|}$

(e)  $f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x^2 & \text{für } x \leq -1 \\ x & \text{für } -1 < x \leq 1 \\ \frac{1}{2}x^2 & \text{für } x > 1 \end{cases}$

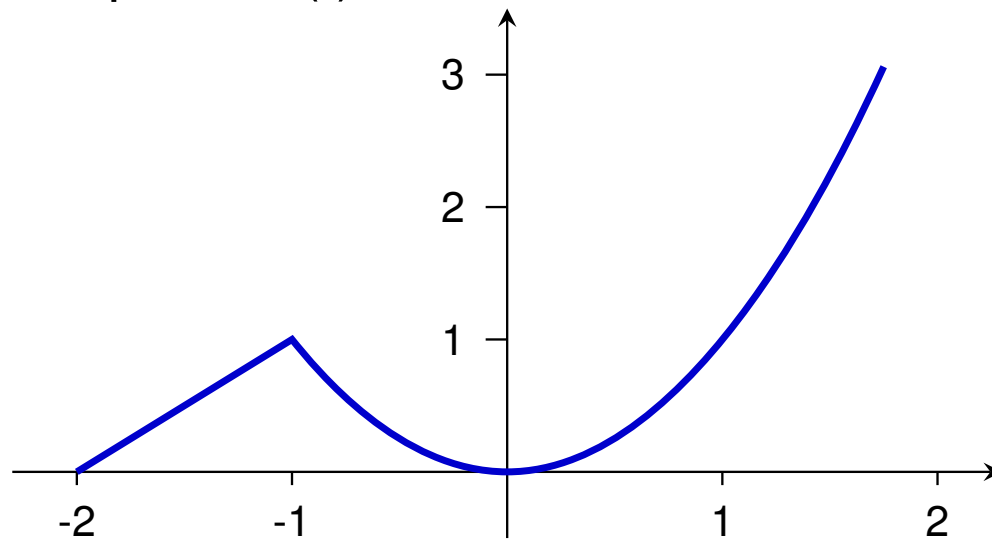
(f)  $f(x) = \begin{cases} 2 + x & \text{für } x \leq -1 \\ x^2 & \text{für } x > -1 \end{cases}$



# Lösung 7.1

differenzierbar in (a)  $\mathbb{R}$ , (b)  $\mathbb{R}$ , (c)  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ , (d)  $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ ,  
(e)  $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ , (f)  $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ .

Graph aus (f):



# Ableitung einer Funktion

Die Funktion

$$f' : D \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f'(x) = \left. \frac{df}{dx} \right|_x$$

heißt die **erste Ableitung** der Funktion  $f$ . Die Definitionsmenge  $D$  ist die Menge aller Punkte, in denen der Differentialquotient existiert.

Die Berechnung der Ableitung wird als **Ableiten** oder **Differenzieren** der Funktion bezeichnet.

# Ableitung elementarer Funktionen

$f(x)$	$f'(x)$
$c$	$0$
$x^\alpha$	$\alpha \cdot x^{\alpha-1}$
$e^x$	$e^x$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$

# Differentiationsregeln

▶  $(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$

▶  $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$

Summenregel

▶  $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

Produktregel

▶  $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Kettenregel

▶  $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$

Quotientenregel

# Beispiel

$$(3x^3 + 2x - 4)' = 3 \cdot 3 \cdot x^2 + 2 \cdot 1 - 0 = 9x^2 + 2$$

$$(e^x \cdot x^2)' = (e^x)' \cdot x^2 + e^x \cdot (x^2)' = e^x \cdot x^2 + e^x \cdot 2x$$

$$((3x^2 + 1)^2)' = 2(3x^2 + 1) \cdot 6x$$

$$(\sqrt{x})' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$(a^x)' = \left(e^{\ln(a) \cdot x}\right)' = e^{\ln(a) \cdot x} \cdot \ln(a) = a^x \ln(a)$$

$$\left(\frac{1+x^2}{1-x^3}\right)' = \frac{2x \cdot (1-x^3) - (1+x^2) \cdot 3x^2}{(1-x^3)^2}$$

# Höhere Ableitungen

Die Ableitung einer Funktion kann wiederum differenziert werden.

Dadurch erhalten wir die

- ▶ **zweite Ableitung**  $f''(x)$  der Funktion  $f$ ,
- ▶ **dritte Ableitung**  $f'''(x)$ , usw.
- ▶  **$n$ -te Ableitung**  $f^{(n)}(x)$ .

Die ersten 5 Ableitungen der Funktion  $f(x) = x^4 + 2x^2 + 5x - 3$  sind

$$f'(x) = (x^4 + 2x^2 + 5x - 3)' = 4x^3 + 4x + 5$$

$$f''(x) = (4x^3 + 4x + 5)' = 12x^2 + 4$$

$$f'''(x) = (12x^2 + 4)' = 24x$$

$$f^{IV}(x) = (24x)' = 24$$

$$f^V(x) = 0$$

## Aufgabe 7.2

Berechne die erste und zweite Ableitung der folgenden Funktionen:

(a)  $f(x) = 4x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 1$

(b)  $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$

(c)  $f(x) = \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$

(d)  $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$

## Lösung 7.2

$$(a) f'(x) = 16x^3 + 9x^2 - 4x, \quad f''(x) = 48x^2 + 19x - 4;$$

$$(b) f'(x) = -x e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad f''(x) = (x^2 - 1) e^{-\frac{x^2}{2}};$$

$$(c) = (b);$$

$$(d) f'(x) = \frac{-2}{(x-1)^2}, \quad f''(x) = \frac{4}{(x-1)^3}.$$



## Aufgabe 7.3

Berechne die erste und zweite Ableitung der folgenden Funktionen:

$$\text{(a)} \quad f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\text{(b)} \quad f(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$$

$$\text{(c)} \quad f(x) = x \ln(x) - x + 1$$

$$\text{(d)} \quad f(x) = \ln(|x|)$$

## Lösung 7.3

$$(a) f'(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}, \quad f''(x) = \frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3};$$

$$(b) f'(x) = -\frac{2}{(1+x)^3}, \quad f''(x) = \frac{6}{(1+x)^4};$$

$$(c) f'(x) = \ln(x), \quad f''(x) = \frac{1}{x};$$

$$(d) f'(x) = \frac{1}{x}, \quad f''(x) = -\frac{1}{x^2}.$$

## Aufgabe 7.4

Berechne die erste und zweite Ableitung der folgenden Funktionen:

$$(a) f(x) = \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

$$(b) f(x) = \cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

$$(c) f(x) = \sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$$

$$(d) f(x) = \cos(1 + x^2)$$

## Lösung 7.4

$$(a) f'(x) = \frac{1}{\cos(x)^2}, \quad f''(x) = \frac{2 \sin(x)}{\cos(x)^3};$$

$$(b) f'(x) = \sinh(x), \quad f''(x) = \cosh(x);$$

$$(c) f'(x) = \cosh(x), \quad f''(x) = \sinh(x);$$

$$(d) f'(x) = -2x \sin(1 + x^2),$$

$$f''(x) = -2 \sin(1 + x^2) - 4x^2 \cos(1 + x^2).$$

# Aufgabe 7.5

Leite die Quotientenregel aus der Produkt- und Kettenregel her.

# Lösung 7.5

$$\begin{aligned}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' &= \left(f(x) \cdot (g(x))^{-1}\right)' \\ &= f'(x) \cdot (g(x))^{-1} + f(x) \cdot \left((g(x))^{-1}\right)' \\ &= f'(x) \cdot (g(x))^{-1} + f(x)(-1)(g(x))^{-2}g'(x) \\ &= \frac{f'(x)}{g(x)} - \frac{f(x)g'(x)}{(g(x))^2} \\ &= \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}\end{aligned}$$

## Aufgabe 7.6

Bestimmen Sie die marginalen Kosten (Grenzkosten) und die Änderungsrate der marginalen Kosten für folgende Kostenfunktionen:

(a)  $C(x) = 500 + 30x - 0,1x^2 + 0,002x^3$

(b)  $C(x) = 500 + 20x - 2x \ln x + 0,01x^2$

Wie lautet die Ableitung der durchschnittlichen Kosten?

Hinweis: Die marginalen Kosten sind die erste Ableitung  $C'(x)$  der Kostenfunktion  $C(x)$ .

# Lösung 7.6

Durchschnittliche Kosten:  $\frac{C(x)}{x}$ ,

Änderungsrate der marginalen Kosten ist die zweite Ableitung  $C''(x)$ .

$$(a) C'(x) = 30 - 0,2x + 0,006x^2, C''(x) = -0,2 + 0,012x,$$

$$\left(\frac{C(x)}{x}\right)' = -\frac{500}{x^2} - 0,1 + 0,004x;$$

$$(b) C'(x) = 18 + 0,02x - 2 \ln(x), C''(x) = 0,02 - \frac{2}{x},$$

$$\left(\frac{C(x)}{x}\right)' = 0,01 - \frac{500}{x^2} - \frac{2}{x}$$



# Marginale Änderung

Für kleine Werte von  $\Delta x$  können wir die Ableitung  $f'(x_0)$  durch den Differenzenquotienten mit kleinem  $\Delta x$  abschätzen:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \approx \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

Daher können wir umgekehrt die Änderung  $\Delta f$  von  $f$  in der Nähe von  $x_0$  für *kleine* Änderungen  $\Delta x$  abschätzen:

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0) \cdot \Delta x$$

## Beachte:

- ▶  $f'(x_0) \cdot \Delta x$  ist eine *lineare Funktion* von  $\Delta x$ .
- ▶ Diese Funktion ist die *bestmögliche* Approximation von  $f$  durch eine lineare Funktion in der *Nähe* von  $x_0$ .
- ▶ Diese Approximation ist nur für „kleine“ Werte von  $\Delta x$  brauchbar.

# Differential

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0) \cdot \Delta x$$

Wenn wir die Differenzen  $\Delta f$  und  $\Delta x$  durch *infinitesimale* („unendlich kleine“) Größen  $df$  und  $dx$  ersetzen, erhalten wir das **Differential** der Funktion  $f$  an der Stelle  $x_0$ :

$$df = f'(x_0) dx$$

$df$  und  $dx$  heißen die **Differentiale** der Funktion  $f$  bzw. der unabhängigen Variable  $x$ .

# Differential

Wir können das Differential von  $f$  als lineare Funktion in  $dx$  auffassen und damit die Funktion  $f$  näherungsweise berechnen.

$$f(x_0 + dx) \approx f(x_0) + df$$

Sei  $f(x) = e^x$ .

Differential von  $f$  an der Stelle 1:

$$df = f'(1) dx = e^1 dx$$

Approximation von  $f(1,1)$  mit Hilfe dieses Differentials:

$$\Delta x = (x_0 + dx) - x_0 = 1,1 - 1 = 0,1$$

$$f(1,1) \approx f(1) + df = e + e \cdot 0,1 \approx 2,99$$

Zum Vergleich:  $f(1,1) = 3,004166 \dots$

## Aufgabe 7.7

Sei  $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$ . Berechnen Sie die Änderung der Funktionswerte  $f(3,1) - f(3)$  näherungsweise mit Hilfe des Differentials an der Stelle  $x_0 = 3$ . Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem exakten Wert.

# Lösung 7.7

Mit Hilfe des Differentials:  $f(3, 1) - f(3) \approx -0,001096$ , Exakter Wert:  
 $f(3, 1) - f(3) = -0,00124 \dots$

# Elastizität

Die erste Ableitung einer Funktion gibt die *Änderungsrate* einer Funktion  $f$  an der Stelle  $x_0$  in *absoluten* Zahlen an. Sie ist somit abhängig von der *Skalierung* von Argument und Funktionswert.

Wir sind aber in vielen Fällen an *relativen* Änderungsraten interessiert.

*Skaleninvarianz* und *relative* Änderungsraten erhalten wir durch

$$\frac{\text{Änderung des Funktionswertes in \% des Funktionswertes}}{\text{Änderung des Arguments in \% des Argumentes}}$$

bzw. für die marginale Änderungsrate

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{f(x)}}{\frac{\Delta x}{x}} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \cdot \frac{x}{f(x)} = f'(x) \cdot \frac{x}{f(x)}$$

# Elastizität

Der Ausdruck

$$\varepsilon_f(x) = x \cdot \frac{f'(x)}{f(x)}$$

heißt die **Elastizität** von  $f$  an der Stelle  $x$ .

Sei  $f(x) = 3e^{2x}$ . Dann ist

$$\varepsilon_f(x) = x \cdot \frac{f'(x)}{f(x)} = x \cdot \frac{6e^{2x}}{3e^{2x}} = 2x$$

Sei  $f(x) = \beta x^\alpha$ . Dann ist

$$\varepsilon_f(x) = x \cdot \frac{f'(x)}{f(x)} = x \cdot \frac{\beta \alpha x^{\alpha-1}}{\beta x^\alpha} = \alpha$$

# Elastizität II

Wir können die relative Änderungsrate von  $f$  ausdrücken als Ableitung

$$\ln(f(x))' = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

Was passiert, wenn wir  $\ln(f(x))$  nach  $\ln(x)$  ableiten?

Sei  $v = \ln(x) \Leftrightarrow x = e^v$

Ableiten mittels Kettenregel ergibt:

$$\frac{d(\ln(f(x)))}{d(\ln(x))} = \frac{d(\ln(f(e^v)))}{dv} = \frac{f'(e^v)}{f(e^v)} e^v = \frac{f'(x)}{f(x)} x = \varepsilon_f(x)$$

$$\varepsilon_f(x) = \frac{d(\ln(f(x)))}{d(\ln(x))}$$



# Elastizität II

Wir können die Kettenregel *formal* auch so schreiben:

Sei

$$\blacktriangleright u = \ln(y),$$

$$\blacktriangleright y = f(x),$$

$$\blacktriangleright x = e^v \quad \Leftrightarrow \quad v = \ln(x)$$

Dann erhalten wir

$$\frac{d(\ln f)}{d(\ln x)} = \frac{du}{dv} = \frac{du}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dv} = \frac{1}{y} \cdot f'(x) \cdot e^v = \frac{f'(x)}{f(x)} x$$

# Elastische Funktionen

Eine Funktion  $f$  heißt in  $x$

- ▶ **elastisch**, falls  $|\varepsilon_f(x)| > 1$
- ▶ **1-elastisch**, falls  $|\varepsilon_f(x)| = 1$
- ▶ **unelastisch**, falls  $|\varepsilon_f(x)| < 1$

Für eine elastische Funktion gilt daher:

Der Funktionswert ändert sich *relative* stärker als das Argument.

Die Funktion  $f(x) = 3e^{2x}$  ist

$$[\varepsilon_f(x) = 2x]$$

- ▶ 1-elastisch, für  $x = -\frac{1}{2}$  und  $x = \frac{1}{2}$ ;
- ▶ unelastisch, für  $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$ ;
- ▶ elastisch, für  $x < -\frac{1}{2}$  oder  $x > \frac{1}{2}$ .

# elastische Nachfragefunktion

Sei  $q(p)$  eine *elastische* Nachfragefunktion,  $p$  der Preis.

Es gilt:  $p > 0$ ,  $q > 0$ , und  $q' < 0$  ( $q$  ist monoton fallend). Also gilt

$$\varepsilon_q(p) = p \cdot \frac{q'(p)}{q(p)} < -1$$

Was passiert mit dem Umsatz (= Preis  $\times$  Absatz)?

$$\begin{aligned} u'(p) &= (p \cdot q(p))' = 1 \cdot q(p) + p \cdot q'(p) \\ &= q(p) \cdot \left(1 + \underbrace{p \cdot \frac{q'(p)}{q(p)}}_{=\varepsilon_q < -1}\right) \\ &< 0 \end{aligned}$$

Das heißt, der Umsatz nimmt ab, falls wir den Preis erhöhen.

# Aufgabe 7.8

Berechnen Sie die Bereiche, in denen die folgenden Funktionen elastisch, 1-elastisch bzw. unelastisch sind.

**(a)**  $g(x) = x^3 - 2x^2$

**(b)**  $h(x) = \alpha x^\beta, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \beta > 0$

# Lösung 7.8

$$(a) \varepsilon_g(x) = \frac{3x^3 - 4x^2}{x^3 - 2x^2},$$

1-elastisch für  $x = 1$  und  $x = \frac{3}{2}$ ,

elastisch für  $x < 1$  und  $x > \frac{3}{2}$ ,

unelastisch für  $1 < x < \frac{3}{2}$ .

$$(b) \varepsilon_h(x) = \beta,$$

die Elastizität von  $h(x)$  hängt nur vom Parameter  $\beta$  ab und ist im gesamten Definitionsbereich gleich groß.

Hinweis: Beachten Sie bitte bei der Berechnung den Absolutbetrag.

## Aufgabe 7.9

Welche der folgenden Aussagen ist richtig? Wenn eine Funktion  $y = f(x)$  in einem Intervall elastisch ist, so gilt in diesem Intervall:

- (a) Wenn sich  $x$  um eine Einheit ändert, so ändert sich  $y$  um mehr als eine Einheit.
- (b) Wenn sich  $x$  um ein Prozent ändert, so ändert sich  $y$  um mehr als ein Prozent.
- (c)  $y$  ändert sich relativ stärker als  $x$ .
- (d) Je größer  $x$  wird, desto größer wird auch  $y$ .

# Lösung 7.9

richtig ist (c). Die Aussage (b) stimmt nur näherungsweise.

# Partielle Ableitung

Wir untersuchen die Änderung einer Funktion  $f(x_1, \dots, x_n)$ , wenn wir eine Variable  $x_i$  variieren und alle anderen konstant lassen.

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \frac{f(\dots, x_i + \Delta x_i, \dots) - f(\dots, x_i, \dots)}{\Delta x_i}$$

heißt die (erste) **partielle Ableitung** von  $f$  nach  $x_i$ .

Es haben sich eine Reihe von weiteren Symbolen für die partielle Ableitung  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$  eingebürgert:

- ▶  $f_{x_i}(\mathbf{x})$  (Ableitung nach der Variable  $x_i$ )
- ▶  $f_i(\mathbf{x})$  (Ableitung nach der  $i$ -ten Variable)
- ▶  $f'_i(\mathbf{x})$  ( $i$ -te Komponente des Gradienten)



# Berechnung der partiellen Ableitung

Wir erhalten die partielle Ableitung nach  $x_i$ , wenn wir alle anderen Variablen als Konstante auffassen und  $f$  nach den bekannten Regeln für Funktionen in einer Variable nach  $x_i$  ableiten.

Erste partiellen Ableitungen von

$$f(x_1, x_2) = \sin(2x_1) \cdot \cos(x_2)$$

$$f_{x_1} = 2 \cdot \cos(2x_1) \cdot \underbrace{\cos(x_2)}_{\text{als Konstante betrachtet}}$$

$$f_{x_2} = \underbrace{\sin(2x_1)}_{\text{als Konstante betrachtet}} \cdot (-\sin(x_2))$$

# Höhere partielle Ableitungen

Analog zu den Funktionen in einer Variablen können wir partielle Ableitungen nochmals ableiten und erhalten so **höhere partielle Ableitungen**.

$$f_{x_i x_k}(\mathbf{x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_i}(\mathbf{x}) \quad \text{bzw.} \quad f_{x_i x_i}(\mathbf{x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(\mathbf{x})$$

Falls alle zweiten partiellen Ableitungen existieren und *stetig* sind, dann kommt auf die Reihenfolge beim Differenzieren nicht an.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_i}(\mathbf{x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}(\mathbf{x})$$

# Beispiel

Gesucht sind alle ersten und zweiten partiellen Ableitungen von

$$f(x, y) = x^2 + 3xy$$

Erste partielle Ableitungen:

$$f_x = 2x + 3y \quad f_y = 0 + 3x$$

Zweite partielle Ableitungen:

$$\begin{aligned} f_{xx} &= 2 & f_{xy} &= 3 \\ f_{yx} &= 3 & f_{yy} &= 0 \end{aligned}$$

## Aufgabe 7.10

Berechnen Sie die ersten und zweiten partiellen Ableitungen der folgenden Funktionen an der Stelle  $(1, 1)$ :

**(a)**  $f(x, y) = x + y$

**(b)**  $f(x, y) = x y$

**(c)**  $f(x, y) = x^2 + y^2$

**(d)**  $f(x, y) = x^2 y^2$

**(e)**  $f(x, y) = x^\alpha y^\beta, \quad \alpha, \beta > 0$

# Lösung 7.10

Ableitungen:

	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)
$f_x$	1	$y$	$2x$	$2xy^2$	$\alpha x^{\alpha-1} y^\beta$
$f_y$	1	$x$	$2y$	$2x^2y$	$\beta x^\alpha y^{\beta-1}$
$f_{xx}$	0	0	2	$2y^2$	$\alpha(\alpha-1) x^{\alpha-2} y^\beta$
$f_{xy} = f_{yx}$	0	1	0	$4xy$	$\alpha\beta x^{\alpha-1} y^{\beta-1}$
$f_{yy}$	0	0	2	$2x^2$	$\beta(\beta-1) x^\alpha y^{\beta-2}$

# Lösung 7.10 / 2

Ableitungen an der Stelle  $(1, 1)$ :

	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)
$f_x$	1	1	2	2	$\alpha$
$f_y$	1	1	2	2	$\beta$
$f_{xx}$	0	0	2	2	$\alpha(\alpha - 1)$
$f_{xy} = f_{yx}$	0	1	0	4	$\alpha\beta$
$f_{yy}$	0	0	2	2	$\beta(\beta - 1)$

# Aufgabe 7.11

Berechnen Sie die ersten und zweiten partiellen Ableitungen der folgenden Funktionen an der Stelle  $(1, 1)$ :

**(a)**  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

**(b)**  $f(x, y) = (x^3 + y^3)^{\frac{1}{3}}$

**(c)**  $f(x, y) = (x^p + y^p)^{\frac{1}{p}}$

# Lösung 7.11

Ableitungen:

	(a)
$f_x$	$x(x^2 + y^2)^{-1/2}$
$f_y$	$y(x^2 + y^2)^{-1/2}$
$f_{xx}$	$(x^2 + y^2)^{-1/2} - x^2(x^2 + y^2)^{-3/2}$
$f_{xy} = f_{yx}$	$-xy(x^2 + y^2)^{-3/2}$
$f_{yy}$	$(x^2 + y^2)^{-1/2} - y^2(x^2 + y^2)^{-3/2}$
	(b)
$f_x$	$x^2(x^3 + y^3)^{-2/3}$
$f_y$	$y^2(x^3 + y^3)^{-2/3}$
$f_{xx}$	$2x(x^3 + y^3)^{-2/3} - 2x^4(x^3 + y^3)^{-5/3}$
$f_{xy} = f_{yx}$	$-2x^2y^2(x^3 + y^3)^{-5/3}$
$f_{yy}$	$2y(x^3 + y^3)^{-2/3} - 2y^4(x^3 + y^3)^{-5/3}$



# Lösung 7.11 / 2

	(c)
$f_x$	$x^{p-1}(x^p + y^p)^{(1-p)/p}$
$f_y$	$y^{p-1}(x^p + y^p)^{(1-p)/p}$
$f_{xx}$	$(p-1)x^{p-2}(x^p + y^p)^{(1-p)/p} - (p-1)x^{2(p-1)}(x^p + y^p)^{(1-2p)/p}$
$f_{xy} = f_{yx}$	$-(p-1)x^{p-1}y^{p-1}(x^p + y^p)^{(1-2p)/p}$
$f_{yy}$	$(p-1)y^{p-2}(x^p + y^p)^{(1-p)/p} - (p-1)y^{2(p-1)}(x^p + y^p)^{(1-2p)/p}$

# Lösung 7.11 / 3

Ableitungen an der Stelle  $(1, 1)$ :

	(a)	(b)	(c)
$f_x$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$	$2^{(1-p)/p}$
$f_y$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$	$2^{(1-p)/p}$
$f_{xx}$	$\frac{1}{\sqrt{8}}$	$\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$	$(p-1)2^{(1-2p)/p}$
$f_{xy} = f_{yx}$	$-\frac{1}{\sqrt{8}}$	$-\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$	$-(p-1)2^{(1-2p)/p}$
$f_{yy}$	$\frac{1}{\sqrt{8}}$	$\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$	$(p-1)2^{(1-2p)/p}$

## Aufgabe 7.12

Berechnen Sie die ersten und zweiten partiellen Ableitungen der Funktion

$$f(x, y) = \exp(x^2 + y^2)$$

an der Stelle  $(0, 0)$ .

# Lösung 7.12

– Fehlt –

# Der Gradient

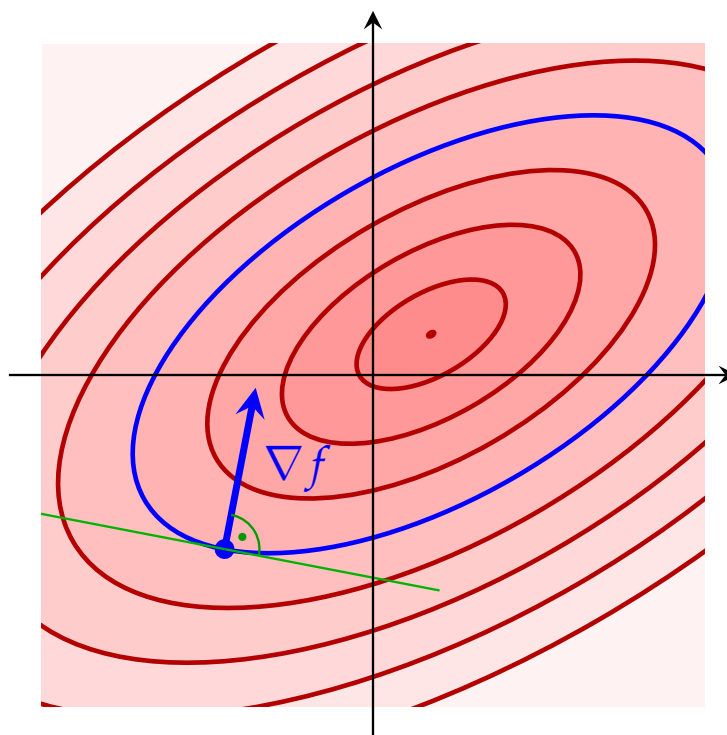
Wir fassen die partiellen Ableitungen erster Ordnung zu einem Zeilenvektor, dem **Gradienten** an der Stelle  $\mathbf{x}$ , zusammen.

$$\nabla f(\mathbf{x}) = (f_{x_1}(\mathbf{x}), \dots, f_{x_n}(\mathbf{x}))$$

- ▶  $\nabla f$  heißt auch „Nabla  $f$ “.
- ▶ Der Gradient wird oft auch als Spaltenvektor geschrieben.
- ▶ Andere Notationen:  $f'(\mathbf{x})$
- ▶ Der Gradient „spielt“ die gleiche Rolle wie die erste Ableitung bei Funktionen in einer Variablen.

# Eigenschaften des Gradienten

- ▶ Der Gradient einer Funktion  $f$  zeigt in die Richtung des steilsten Anstieges von  $f$ .
- ▶ Seine Länge gibt diese Steigung an.
- ▶ Der Gradient steht immer normal auf die entsprechende Niveaulinie.



# Beispiel

Gesucht ist der Gradient von

$$f(x, y) = x^2 + 3xy$$

an der Stelle  $\mathbf{x} = (3, 2)$ .

$$f_x = 2x + 3y$$

$$f_y = 0 + 3x$$

$$\nabla f(\mathbf{x}) = (2x + 3y, 3x)$$

$$\nabla f(3, 2) = (12, 9)$$

# Aufgabe 7.13

Berechnen Sie den Gradienten der folgenden Funktionen an der Stelle  $(1, 1)$ :

**(a)**  $f(x, y) = x + y$

**(b)**  $f(x, y) = x y$

**(c)**  $f(x, y) = x^2 + y^2$

**(d)**  $f(x, y) = x^2 y^2$

**(e)**  $f(x, y) = x^\alpha y^\beta, \quad \alpha, \beta > 0$



# Lösung 7.13

Gradient:

$$(a) \nabla f(x, y) = (1, 1),$$

$$(b) \nabla f(x, y) = (y, x),$$

$$(c) \nabla f(x, y) = (2x, 2y),$$

$$(d) \nabla f(x, y) = (2xy^2, 2x^2y),$$

$$(e) \nabla f(x, y) = (\alpha x^{\alpha-1} y^\beta, \beta x^\alpha y^{\beta-1}),$$

Gradient an der Stelle  $(1, 1)$ :

$$(a) \nabla f(x, y) = (1, 1),$$

$$(b) \nabla f(x, y) = (1, 1),$$

$$(c) \nabla f(x, y) = (2, 2),$$

$$(d) \nabla f(x, y) = (2, 2),$$

$$(e) \nabla f(x, y) = (\alpha, \beta).$$

# Aufgabe 7.14

Berechnen Sie den Gradienten der folgenden Funktionen an der Stelle  $(1, 1)$ :

**(a)**  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

**(b)**  $f(x, y) = (x^3 + y^3)^{\frac{1}{3}}$

**(c)**  $f(x, y) = (x^p + y^p)^{\frac{1}{p}}$

# Lösung 7.14

Gradient:

$$(a) \nabla f(x, y) = (x(x^2 + y^2)^{-1/2}, y(x^2 + y^2)^{-1/2}),$$

$$(b) \nabla f(x, y) = (x^2(x^3 + y^3)^{-2/3}, y^2(x^3 + y^3)^{-2/3}),$$

$$(c) \nabla f(x, y) = (x^{p-1}(x^p + y^p)^{(1-p)/p}, y^{p-1}(x^p + y^p)^{(1-p)/p}),$$

Gradient an der Stelle  $(1, 1)$ :

$$(a) \nabla f(x, y) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right),$$

$$(b) \nabla f(x, y) = \left(\frac{1}{\sqrt[3]{4}}, \frac{1}{\sqrt[3]{4}}\right),$$

$$(c) \nabla f(x, y) = (2^{(1-p)/p}, 2^{(1-p)/p}).$$

# Das totale Differential

Wir wollen eine Funktion  $f$  durch eine lineare Funktion so approximieren, dass der Fehler möglichst klein ist.

Den Funktionswert an einer Stelle  $\mathbf{x} + \mathbf{h}$  können wir näherungsweise analog zur Richtungsableitung berechnen.

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}) \approx f_{x_1}(\mathbf{x}) h_1 + \dots + f_{x_n}(\mathbf{x}) h_n$$

Das totale Differential erhalten wir, wenn wir die  $h_i$  durch „unendlich kleine“ Differentiale  $dx_i$  ersetzen.

Die *lineare Funktion*

$$df = f_{x_1}(\mathbf{x}) dx_1 + \dots + f_{x_n}(\mathbf{x}) dx_n = \sum_{i=1}^n f_{x_i} dx_i$$

heißt das **totale Differential** von  $f$  an der Stelle  $\mathbf{x}$ .

# Beispiel

Wir suchen das totale Differential von

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + 3 x_1 x_2$$

an der Stelle  $\mathbf{x} = (3, 2)$ .

$$df = f_{x_1}(3, 2) dx_1 + f_{x_2}(3, 2) dx_2 = 12 dx_1 + 9 dx_2$$

Approximation von  $f(3, 1; 1, 8)$  mit Hilfe des totalen Differentials:

$$\begin{aligned} f(3, 1; 1, 8) &\approx f(3; 2) + df \\ &= 27 + 12 \cdot 0,1 + 9 \cdot (-0,2) = 26,40 \end{aligned}$$

Zum Vergleich:  $f(3, 1; 1, 8) = 26,35$

$$\mathbf{h} = (\mathbf{x} + \mathbf{h}) - \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 3,1 \\ 1,8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,1 \\ -0,2 \end{pmatrix}$$

# Aufgabe 7.15

Sei

$$f(x, y) = 100 (y - x^2)^2 + (1 - x)^2$$

Berechnen Sie

- (a) den Gradienten  $\nabla f$  von  $f$  an der Stelle  $(-1, 1)$ ,
- (b) das totale Differential an der Stelle  $(-1, 1)$ ,
- (c) mit dessen Hilfe eine Näherung für  $f$  an der Stelle  $(0, 0)$ ,

# Lösung 7.15

Die partiellen Ableitungen sind

$$f_x = -400x(y - x^2) + 2(1 - x)(-1) \text{ und}$$

$$f_y = 200(y - x^2).$$

(a)  $(-4, 0)^t$ ;

(b)  $df = -4 dx$ ;

(c) 0.

# Jacobische Matrix

$$\text{Sei } \mathbf{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, \mathbf{x} \mapsto \mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}$$

Dann heißt die  $m \times n$ -Matrix

$$D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{f}'(\mathbf{x}_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

die **Jacobische Matrix** von  $\mathbf{f}$  an der Stelle  $\mathbf{x}_0$ .

Sie ist die „*Ableitung*“ dieser vektorwertigen Funktion und somit eine Verallgemeinerung des Gradienten.



# Beispiel

$$\blacktriangleright f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2) = \exp(-x_1^2 - x_2^2)$$

$$\begin{aligned} Df(\mathbf{x}) &= \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2} \right) = \nabla f(\mathbf{x}) \\ &= (-2x_1 \exp(-x_1^2 - x_2^2), -2x_2 \exp(-x_1^2 - x_2^2)) \end{aligned}$$

$$\blacktriangleright \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2^2 \\ x_1^2 - x_2^2 \end{pmatrix}$$

$$D\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 & 2x_2 \\ 2x_1 & -2x_2 \end{pmatrix}$$

$$\blacktriangleright \mathbf{s}(t) = \begin{pmatrix} s_1(t) \\ s_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$$

$$D\mathbf{s}(t) = \begin{pmatrix} \frac{ds_1}{dt} \\ \frac{ds_2}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}$$

# Kettenregel

Seien  $\mathbf{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  und  $\mathbf{g}: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$ . Dann gilt

$$D(\mathbf{g} \circ \mathbf{f})(\mathbf{x}) = D\mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{x})) \cdot D\mathbf{f}(\mathbf{x})$$

$$\mathbf{f}(x, y) = \begin{pmatrix} e^x \\ e^y \end{pmatrix} \quad \mathbf{g}(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 \\ x^2 - y^2 \end{pmatrix}$$

$$D\mathbf{f}(x, y) = \begin{pmatrix} e^x & 0 \\ 0 & e^y \end{pmatrix} \quad D\mathbf{g}(x, y) = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 2x & -2y \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} D(\mathbf{g} \circ \mathbf{f})(\mathbf{x}) &= D\mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{x})) \cdot D\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 2e^x & 2e^y \\ 2e^x & -2e^y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^x & 0 \\ 0 & e^y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2e^{2x} & 2e^{2y} \\ 2e^{2x} & -2e^{2y} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

# Beispiel – Indirekte Abhängigkeit

Sei  $f(x_1, x_2, t)$  wobei  $x_1(t)$  und  $x_2(t)$  ebenfalls von  $t$  abhängen.  
Wie ändert sich  $f$  mit  $t$ ?

Kettenregel:

$$\text{Sei } \mathbf{x}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, t \mapsto \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ t \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt} &= D(f \circ \mathbf{x})(t) = Df(\mathbf{x}(t)) \cdot D\mathbf{x}(t) \\ &= \nabla f(\mathbf{x}(t)) \cdot \begin{pmatrix} x'_1(t) \\ x'_2(t) \\ 1 \end{pmatrix} = (f_{x_1}(\mathbf{x}(t)), f_{x_2}(\mathbf{x}(t)), f_t(\mathbf{x}(t))) \cdot \begin{pmatrix} x'_1(t) \\ x'_2(t) \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= f_{x_1}(\mathbf{x}(t)) \cdot x'_1(t) + f_{x_2}(\mathbf{x}(t)) \cdot x'_2(t) + f_t(\mathbf{x}(t)) \\ &= f_{x_1}(x_1, x_2, t) \cdot x'_1(t) + f_{x_2}(x_1, x_2, t) \cdot x'_2(t) + f_t(x_1, x_2, t) \end{aligned}$$

## Aufgabe 7.16

Sei

$$f(x, y) = x^2 + y^2 \quad \text{und} \quad \mathbf{g}(t) = \begin{pmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix} .$$

Berechnen Sie die Ableitung der zusammengesetzten Funktion  $h = f \circ \mathbf{g}$  mit Hilfe der Kettenregel.

## Lösung 7.16

$$Dh(t) = Df(\mathbf{g}(t)) \cdot D\mathbf{g}(t) = (2g_1(t), 2g_2(t)) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix} =$$

$$(2t, 2t^2) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix} = 2t + 4t^3.$$

(Die zusammengesetzte Funktion lautet  $h(t) = f(\mathbf{g}(t)) = t^2 + t^4$ .)

## Aufgabe 7.17

Seien  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (x_1^3 - x_2, x_1 - x_2^3)^t$  und  $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = (x_2^2, x_1)^t$ . Berechnen Sie die Ableitungen der zusammengesetzten Funktionen  $\mathbf{g} \circ \mathbf{f}$  und  $\mathbf{f} \circ \mathbf{g}$  mit Hilfe der Kettenregel.

# Lösung 7.17

$$D\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 3x_1^2 & -1 \\ 1 & -3x_2^2 \end{pmatrix}, D\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 & 2x_2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$D(\mathbf{g} \circ \mathbf{f})(\mathbf{x}) = D\mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{x})) D\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 & 2(x_1 - x_2^3) \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3x_1^2 & -1 \\ 1 & -3x_2^2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2(x_1 - x_2^3) & 6(-x_1x_2^2 + x_2^5) \\ 3x_1^2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$D(\mathbf{f} \circ \mathbf{g})(\mathbf{x}) = D\mathbf{f}(\mathbf{g}(\mathbf{x})) D\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 3x_2^4 & -1 \\ 1 & -3x_1^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2x_2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 6x_2^5 \\ -3x_1^2 & 2x_2 \end{pmatrix}.$$

## Aufgabe 7.18

Sei  $Q(K, L, t)$  eine Produktionsfunktion, wobei  $L = L(t)$  und  $K = K(t)$  selbst Funktionen der Zeit  $t$  sind. Berechnen Sie  $\frac{dQ}{dt}$  mit Hilfe der Kettenregel.



# Lösung 7.18

Sei  $\mathbf{s}(t) = \begin{pmatrix} K(t) \\ L(t) \\ t \end{pmatrix}$ . Dann ist

$$\frac{dQ}{dt} = DQ(\mathbf{s}(t)) \cdot D\mathbf{s}(t) = (Q_K(\mathbf{s}(t)), Q_L(\mathbf{s}(t)), Q_t(\mathbf{s}(t))) \cdot$$

$$\begin{pmatrix} K'(t) \\ L'(t) \\ 1 \end{pmatrix} = Q_K K'(t) + Q_L L'(t) + Q_t.$$

## Aufgabe 7.19

Sei  $\mathbf{A}$  eine  $n \times m$  Matrix. Bestimmen Sie die Jacobische Matrix der Funktion  $\mathbf{f}: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n, \mathbf{x} \mapsto \mathbf{Ax}$ .

# Lösung 7.19

$$Df(\mathbf{x}) = \mathbf{A}.$$