Kapitel 7

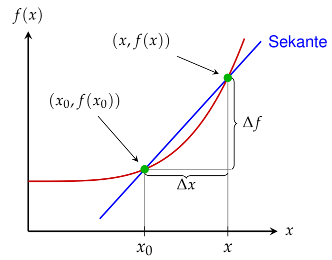
Differentialrechnung

Differenzenquotient

Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Der Quotient

$$\boxed{\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}$$

heißt **Differenzenquotient** an der Stelle x_0.



Differentialquotient

Falls der Limes

$$\boxed{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}$$

existiert, so heißt die Funktion f **differenzierbar** an der Stelle x_0 und dieser Grenzwert **Differentialquotient** oder **(erste) Ableitung** der Funktion an der Stelle x_0.

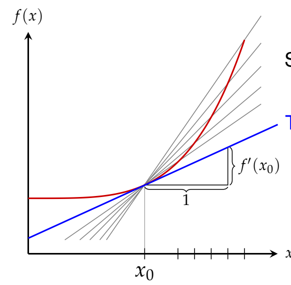
Eine Funktion f heißt *differenzierbar*, wenn sie in jedem Punkt des Definitionsbereichs differenzierbar ist.

Schreibweisen:

$$\boxed{f'(x_0) = \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_0}}$$

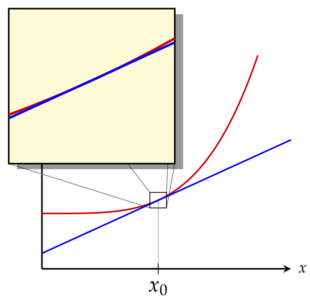
Graphische Interpretation des Differentialquotienten

- Anstieg der Tangente an den Graphen der Funktion $f(x)$ an der Stelle x_0.



Interpretation als „Grenzfunktion“

- Marginalquote, oder „Grenzfunktion“ einer Wirkungsgröße $y = f(x)$ bezüglich einer Faktorgröße x.



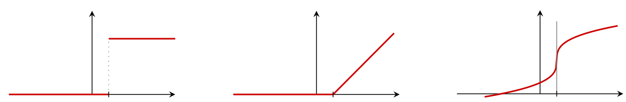
Existenz des Differentialquotienten

Eine Funktion f ist differenzierbar in allen Punkten, in denen sich eine Tangente mit endlicher Steigung an den Graphen legen lässt.

In allen Punkten in denen das nicht möglich ist, ist die Funktion *nicht* differenzierbar.

Das sind vor allem

- Unstetigkeitsstellen („Sprungstellen“)
- „Knicke“ im Graph der Funktion
- Senkrechte Tangenten



Berechnung des Differentialquotienten

Der Differentialquotien kann durch Bestimmen des Grenzwertes berechnet werden.

Sei $f(x) = x^2$. Dann ist

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{h \to 0} \frac{(x_0 + h)^2 - x_0{}^2}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{x_0{}^2 + 2\,x_0\,h + h^2 - x_0{}^2}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{2\,x_0\,h + h^2}{h} = \lim_{h \to 0} (2\,x_0 + h) \\ &= 2\,x_0 \end{aligned}$$

Aufgabe 7.1

Zeichnen Sie den Graphen der folgenden Funktionen. Sind diese Funktionen differenzierbar, bzw. wo sind sie differenzierbar? Sind die Funktionen stetig?

(a) $f(x) = 2x + 2$

(b) $f(x) = 3$

(c) $f(x) = |x|$

(d) $f(x) = \sqrt{|x^2 - 1|}$

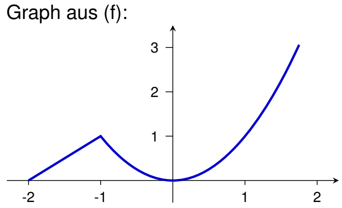
(e) $f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x^2 & \text{für } x \le -1 \\ x & \text{für } -1 < x \le 1 \\ \frac{1}{2}x^2 & \text{für } x > 1 \end{cases}$

(f) $f(x) = \begin{cases} 2 + x & \text{für } x \le -1 \\ x^2 & \text{für } x > -1 \end{cases}$

Lösung 7.1

differenzierbar in (a) $\mathbb{R}$, (b) $\mathbb{R}$, (c) $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, (d) $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, (e) $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, (f) $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Graph aus (f):



Ableitung einer Funktion

Die Funktion

$$\boxed{f' \colon D \to \mathbb{R},\ x \mapsto f'(x) = \left.\frac{df}{dx}\right|_x}$$

heißt die **erste Ableitung** der Funktion f. Die Definitionsmenge D ist die Menge aller Punkte, in denen der Differentialquotient existiert.

Die Berechnung der Ableitung wird als **Ableiten** oder **Differenzieren** der Funktion bezeichnet.

Ableitung elementarer Funktionen

$f(x)$	$f'(x)$
c	0
x^α	$\alpha \cdot x^{\alpha-1}$
e^x	e^x
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$

Differentiationsregeln

- $(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$
- $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$ Summenregel
- $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$ Produktregel
- $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ Kettenregel
- $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$ Quotientenregel

Beispiel

$$(3\,x^3 + 2\,x - 4)' = 3 \cdot 3 \cdot x^2 + 2 \cdot 1 - 0 = 9\,x^2 + 2$$

$$(e^x \cdot x^2)' = (e^x)' \cdot x^2 + e^x \cdot (x^2)' = e^x \cdot x^2 + e^x \cdot 2\,x$$

$$((3\,x^2 + 1)^2)' = 2\,(3\,x^2 + 1) \cdot 6\,x$$

$$(\sqrt{x})' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \tfrac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \tfrac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$(a^x)' = \left(e^{\ln(a) \cdot x}\right)' = e^{\ln(a) \cdot x} \cdot \ln(a) = a^x \ln(a)$$

$$\left(\frac{1 + x^2}{1 - x^3}\right)' = \frac{2x \cdot (1 - x^3) - (1 + x^2) \cdot 3x^2}{(1 - x^3)^2}$$

Höhere Ableitungen

Die Ableitung einer Funktion kann wiederum differenziert werden.

Dadurch erhalten wir die

- **zweite Ableitung** $f''(x)$ der Funktion f,
- **dritte Ableitung** $f'''(x)$, usw.
- n**-te Ableitung** $f^{(n)}(x)$.

Die ersten 5 Ableitungen der Funktion $f(x) = x^4 + 2x^2 + 5x - 3$ sind

$$\begin{aligned}
f'(x) &= (x^4 + 2x^2 + 5x - 3)' = 4x^3 + 4x + 5 \\
f''(x) &= (4x^3 + 4x + 5)' = 12x^2 + 4 \\
f'''(x) &= (12x^2 + 4)' = 24x \\
f^{\text{IV}}(x) &= (24x)' = 24 \\
f^{\text{V}}(x) &= 0
\end{aligned}$$

Aufgabe 7.2

Berechne die erste und zweite Ableitung der folgenden Funktionen:

(a) $f(x) = 4x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 1$

(b) $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$

(c) $f(x) = \exp(-\frac{x^2}{2})$

(d) $f(x) = \frac{x + 1}{x - 1}$

Lösung 7.2

(a) $f'(x) = 16x^3 + 9x^2 - 4x$, $\quad f''(x) = 48x^2 + 19x - 4$;
(b) $f'(x) = -x\,e^{-\frac{x^2}{2}}$, $\quad f''(x) = (x^2 - 1)\,e^{-\frac{x^2}{2}}$;
(c) = (b);
(d) $f'(x) = \frac{-2}{(x-1)^2}$, $\quad f''(x) = \frac{4}{(x-1)^3}$.

Aufgabe 7.3

Berechne die erste und zweite Ableitung der folgenden Funktionen:

(a) $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

(b) $f(x) = \dfrac{1}{(1+x)^2}$

(c) $f(x) = x\ln(x) - x + 1$

(d) $f(x) = \ln(|x|)$

Lösung 7.3

(a) $f'(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$, $\quad f''(x) = \frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3}$;
(b) $f'(x) = -\frac{2}{(1+x)^3}$, $\quad f''(x) = \frac{6}{(1+x)^4}$;
(c) $f'(x) = \ln(x)$, $\quad f''(x) = \frac{1}{x}$;
(d) $f'(x) = \frac{1}{x}$, $\quad f''(x) = -\frac{1}{x^2}$.

Aufgabe 7.4

Berechne die erste und zweite Ableitung der folgenden Funktionen:

(a) $f(x) = \tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$

(b) $f(x) = \cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$

(c) $f(x) = \sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$

(d) $f(x) = \cos(1+x^2)$

Lösung 7.4

(a) $f'(x) = \frac{1}{cos(x)^2}$, $\quad f''(x) = \frac{2\sin(x)}{\cos(x)^3}$;
(b) $f'(x) = \sinh(x)$, $\quad f''(x) = \cosh(x)$;
(c) $f'(x) = \cosh(x)$, $\quad f''(x) = \sinh(x)$;
(d) $f'(x) = -2x\sin(1+x^2)$,
$f''(x) = -2\sin(1+x^2) - 4x^2\cos(1+x^2)$.

Aufgabe 7.5

Leite die Quotientenregel aus der Produkt- und Kettenregel her.

Lösung 7.5

$$\begin{aligned}
\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' &= \Big(f(x)\cdot(g(x))^{-1}\Big)' \\
&= f'(x)\cdot(g(x))^{-1} + f(x)\cdot\Big((g(x))^{-1}\Big)' \\
&= f'(x)\cdot(g(x))^{-1} + f(x)(-1)(g(x))^{-2}g'(x) \\
&= \frac{f'(x)}{g(x)} - \frac{f(x)g'(x)}{(g(x))^2} \\
&= \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{(g(x))^2}
\end{aligned}$$

Aufgabe 7.6

Bestimmen Sie die marginalen Kosten (Grenzkosten) und die Änderungsrate der marginalen Kosten für folgende Kostenfunktionen:

(a) $C(x) = 500 + 30\,x - 0{,}1\,x^2 + 0{,}002\,x^3$

(b) $C(x) = 500 + 20\,x - 2\,x\,\ln x + 0{,}01\,x^2$

Wie lautet die Ableitung der durchschnittlichen Kosten?
Hinweis: Die marginalen Kosten sind die erste Ableitung $C'(x)$ der Kostenfunktion $C(x)$.

Lösung 7.6

Durchschnittliche Kosten: $\frac{C(x)}{x}$,
Änderungsrate der marginalen Kosten ist die zweite Ableitung $C''(x)$.
(a) $C'(x) = 30 - 0{,}2\,x + 0,006\,x^2$, $C''(x) = -0,2 + 0,012\,x$,
$\left(\frac{C(x)}{x}\right)' = -\frac{500}{x^2} - 0{,}1 + 0,004\,x$;
(b) $C'(x) = 18 + 0,02x - 2\,\ln(x)$, $C''(x) = 0{,}02 - \frac{2}{x}$,
$\left(\frac{C(x)}{x}\right)' = 0,01 - \frac{500}{x^2} - \frac{2}{x}$

Marginale Änderung

Für kleine Werte von Δx können wir die Ableitung $f'(x_0)$ durch den Differenzenquotienten mit kleinem Δx abschätzen:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \approx \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

Daher können wir umgekehrt die Änderung Δf von f in der Nähe von x_0 für *kleine* Änderungen Δx abschätzen:

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0) \cdot \Delta x$$

Beachte:

- $f'(x_0) \cdot \Delta x$ ist eine *lineare Funktion* von Δx.
- Diese Funktion ist die *bestmögliche* Approximation von f durch eine lineare Funktion in der *Nähe* von x_0.
- Diese Approximation ist nur für „kleine" Werte von Δx brauchbar.

Differential

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0) \cdot \Delta x$$

Wenn wir die Differenzen Δf und Δx durch *infinitesimale* („unendlich kleine") Größen df und dx ersetzen, erhalten wir das **Differential** der Funktion f an der Stelle x_0:

$$\boxed{df = f'(x_0)\, dx}$$

df und dx heißen die **Differentiale** der Funktion f bzw. der unabhängigen Variable x.

Differential

Wir können das Differential von f als lineare Funktion in dx auffassen und damit die Funktion f näherungsweise berechnen.

$$f(x_0 + dx) \approx f(x_0) + df$$

Sei $f(x) = e^x$.

Differential von f an der Stelle 1:
$df = f'(1)\, dx = e^1\, dx$

Approximation von $f(1,1)$ mit Hilfe dieses Differentials:
$\Delta x = (x_0 + dx) - x_0 = 1,1 - 1 = 0,1$

$f(1,1) \approx f(1) + df = e + e \cdot 0,1 \approx 2,99$

Zum Vergleich: $f(1,1) = 3,004166\ldots$

Aufgabe 7.7

Sei $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$. Berechnen Sie die Änderung der Funktionswerte $f(3,1) - f(3)$ näherungsweise mit Hilfe des Differentials an der Stelle $x_0 = 3$. Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem exakten Wert.

Lösung 7.7

Mit Hilfe des Differentials: $f(3,1) - f(3) \approx -0,001096$, Exakter Wert: $f(3,1) - f(3) = -0,00124\ldots$

Elastizität

Die erste Ableitung einer Funktion gibt die *Änderungsrate* einer Funktion f an der Stelle x_0 in *absoluten* Zahlen an. Sie ist somit abhängig von der *Skalierung* von Argument und Funktionswert.

Wir sind aber in vielen Fällen an *relativen* Änderungsraten interessiert.

Skaleninvarianz und *relative* Änderungsraten erhalten wir durch

$$\frac{\text{Änderung des Funktionswertes in \% des Funktionswertes}}{\text{Änderung des Arguments in \% des Argumentes}}$$

bzw. für die marginale Änderungsrate

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{f(x)}}{\frac{\Delta x}{x}} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \cdot \frac{x}{f(x)} = f'(x) \cdot \frac{x}{f(x)}$$

Elastizität

Der Ausdruck

$$\boxed{\varepsilon_f(x) = x \cdot \frac{f'(x)}{f(x)}}$$

heißt die **Elastizität** von f an der Stelle x.

Sei $f(x) = 3\, e^{2x}$. Dann ist

$$\varepsilon_f(x) = x \cdot \frac{f'(x)}{f(x)} = x \cdot \frac{6\, e^{2x}}{3\, e^{2x}} = 2\, x$$

Sei $f(x) = \beta\, x^\alpha$. Dann ist

$$\varepsilon_f(x) = x \cdot \frac{f'(x)}{f(x)} = x \cdot \frac{\beta\, \alpha\, x^{\alpha-1}}{\beta\, x^\alpha} = \alpha$$

Elastizität II

Wir können die relative Änderungsrate von f ausdrücken als Ableitung

$$\ln(f(x))' = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

Was passiert, wenn wir $\ln(f(x))$ nach $\ln(x)$ ableiten?

Sei $\quad v = \ln(x) \quad \Leftrightarrow \quad x = e^v$

Ableiten mittels Kettenregel ergibt:

$$\frac{d(\ln(f(x)))}{d(\ln(x))} = \frac{d(\ln(f(e^v)))}{dv} = \frac{f'(e^v)}{f(e^v)}\, e^v = \frac{f'(x)}{f(x)}\, x = \varepsilon_f(x)$$

$$\boxed{\varepsilon_f(x) = \frac{d(\ln(f(x)))}{d(\ln(x))}}$$

Elastizität II

Wir können die Kettenregel *formal* auch so schreiben:

Sei

- $u = \ln(y)$,
- $y = f(x)$,
- $x = e^v \quad \Leftrightarrow \quad v = \ln(x)$

Dann erhalten wir

$$\frac{d(\ln f)}{d(\ln x)} = \frac{du}{dv} = \frac{du}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dv} = \frac{1}{y} \cdot f'(x) \cdot e^v = \frac{f'(x)}{f(x)}\, x$$

Elastische Funktionen

Eine Funktion f heißt in x

- **elastisch**, falls $|\varepsilon_f(x)| > 1$
- **1-elastisch**, falls $|\varepsilon_f(x)| = 1$
- **unelastisch**, falls $|\varepsilon_f(x)| < 1$

Für eine elastische Funktion gilt daher:
Der Funktionswert ändert sich *relative* stärker als das Argument.

Die Funktion $f(x) = 3\,e^{2x}$ ist [$\varepsilon_f(x) = 2\,x$]

- 1-elastisch, für $x = -\frac{1}{2}$ und $x = \frac{1}{2}$;
- unelastisch, für $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$;
- elastisch, für $x < -\frac{1}{2}$ oder $x > \frac{1}{2}$.

elastische Nachfragefunktion

Sei $q(p)$ eine *elastische* Nachfragefunktion, p der Preis.
Es gilt: $p > 0$, $q > 0$, und $q' < 0$ (q ist monoton fallend). Also gilt

$$\varepsilon_q(p) = p \cdot \frac{q'(p)}{q(p)} < -1$$

Was passiert mit dem Umsatz (= Preis $\times$ Absatz)?

$$\begin{aligned} u'(p) &= (p \cdot q(p))' = 1 \cdot q(p) + p \cdot q'(p) \\ &= q(p) \cdot (1 + \underbrace{p \cdot \frac{q'(p)}{q(p)}}_{=\varepsilon_q < -1}) \\ &< 0 \end{aligned}$$

Das heißt, der Umsatz nimmt ab, falls wir den Preis erhöhen.

Aufgabe 7.8

Berechnen Sie die Bereiche, in denen die folgenden Funktionen elastisch, 1-elastisch bzw. unelastisch sind.

(a) $g(x) = x^3 - 2\,x^2$

(b) $h(x) = \alpha\, x^\beta$, $\quad \alpha \in \mathbb{R}, \beta > 0$

Lösung 7.8

(a) $\varepsilon_g(x) = \frac{3\,x^3 - 4\,x^2}{x^3 - 2\,x^2}$,
1-elastisch für $x = 1$ und $x = \frac{3}{2}$,
elastisch für $x < 1$ und $x > \frac{3}{2}$,
unelastisch für $1 < x < \frac{3}{2}$.
(b) $\varepsilon_h(x) = \beta$,
die Elasizität von $h(x)$ hängt nur vom Parameter β ab und ist im gesamten Definitionsbereich gleich groß.
Hinweis: Beachten Sie bitte bei der Berechnung den Absolutbetrag.

Aufgabe 7.9

Welche der folgenden Aussagen ist richtig? Wenn eine Funktion $y = f(x)$ in einem Intervall elastisch ist, so gilt in diesem Intervall:

(a) Wenn sich x um eine Einheit ändert, so ändert sich y um mehr als eine Einheit.

(b) Wenn sich x um ein Prozent ändert, so ändert sich y um mehr als ein Prozent.

(c) y ändert sich relativ stärker als x.

(d) Je größer x wird, desto größer wird auch y.

Lösung 7.9

richtig ist (c). Die Aussage (b) stimmt nur näherungsweise.

Partielle Ableitung

Wir untersuchen die Änderung einer Funktion $f(x_1, \ldots, x_n)$, wenn wir eine Variable x_i variieren und alle anderen konstant lassen.

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x_i} = \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{f(\ldots, x_i + \Delta x_i, \ldots) - f(\ldots, x_i, \ldots)}{\Delta x_i}}$$

heißt die (erste) **partielle Anleitung** von f nach x_i.

Es haben sich eine Reihe von weiteren Symbolen für die partielle Ableitungung $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ eingebürgert:

- $f_{x_i}(\mathbf{x})$ (Ableitung nach der Variable x_i)
- $f_i(\mathbf{x})$ (Ableitung nach der i-ten Variable)
- $f'_i(\mathbf{x})$ (i-te Komponente des Gradienten)

Berechnung der partiellen Ableitung

Wir erhalten die partielle Ableitung nach x_i, wenn wir alle anderen Variablen als Konstante auffassen und f nach den bekannten Regeln für Funktionen in einer Variable nach x_i ableiten.

Erste partiellen Ableitungen von

$$f(x_1, x_2) = \sin(2\,x_1) \cdot \cos(x_2)$$

$$f_{x_1} = 2 \cdot \cos(2\,x_1) \cdot \underbrace{\cos(x_2)}_{\text{als Konstante betrachtet}}$$

$$f_{x_2} = \underbrace{\sin(2\,x_1)}_{\text{als Konstante betrachtet}} \cdot (-\sin(x_2))$$

Höhere partielle Ableitungen

Analog zu den Funktionen in einer Variablen können wir partielle Ableitungen nochmals ableiten und erhalten so **höhere partielle Ableitungen**.

$$\boxed{f_{x_i x_k}(\mathbf{x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_i}(\mathbf{x}) \quad \text{bzw.} \quad f_{x_i x_i}(\mathbf{x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(\mathbf{x})}$$

Falls alle zweiten partiellen Ableitungen existieren und *stetig* sind, dann kommt auf die Reihenfolge beim Differenzieren nicht an.

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_i}(\mathbf{x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}(\mathbf{x})}$$

Beispiel

Gesucht sind alle ersten und zweiten partiellen Ableitungen von

$$f(x, y) = x^2 + 3\,x\,y$$

Erste partielle Ableitungen:

$$f_x = 2\,x + 3\,y \qquad f_y = 0 + 3\,x$$

Zweite partielle Ableitungen:

$$\begin{aligned} f_{xx} &= 2 & f_{xy} &= \boxed{3} \\ f_{yx} &= \boxed{3} & f_{yy} &= 0 \end{aligned}$$

Aufgabe 7.10

Berechnen Sie die ersten und zweiten partiellen Ableitungen der folgenden Funktionen an der Stelle $(1, 1)$:

(a) $f(x, y) = x + y$

(b) $f(x, y) = x\,y$

(c) $f(x, y) = x^2 + y^2$

(d) $f(x, y) = x^2\,y^2$

(e) $f(x, y) = x^\alpha\,y^\beta, \quad \alpha, \beta > 0$

Lösung 7.10

Ableitungen:

	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)
f_x	1	y	$2\,x$	$2\,x\,y^2$	$\alpha\,x^{\alpha-1}\,y^\beta$
f_y	1	x	$2\,y$	$2\,x^2\,y$	$\beta\,x^\alpha\,y^{\beta-1}$
f_{xx}	0	0	2	$2\,y^2$	$\alpha(\alpha-1)\,x^{\alpha-2}\,y^\beta$
$f_{xy} = f_{yx}$	0	1	0	$4\,x\,y$	$\alpha\,\beta\,x^{\alpha-1}\,y^{\beta-1}$
f_{yy}	0	0	2	$2\,x^2$	$\beta(\beta-1)\,x^\alpha\,y^{\beta-2}$

Lösung 7.10 / 2

Ableitungen an der Stelle $(1, 1)$:

	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)
f_x	1	1	2	2	α
f_y	1	1	2	2	β
f_{xx}	0	0	2	2	$\alpha(\alpha-1)$
$f_{xy} = f_{yx}$	0	1	0	4	$\alpha\,\beta$
f_{yy}	0	0	2	2	$\beta(\beta-1)$

Aufgabe 7.11

Berechnen Sie die ersten und zweiten partiellen Ableitungen der folgenden Funktionen an der Stelle $(1, 1)$:

(a) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

(b) $f(x, y) = (x^3 + y^3)^{\frac{1}{3}}$

(c) $f(x, y) = (x^p + y^p)^{\frac{1}{p}}$

Lösung 7.11

Ableitungen:

	(a)
f_x	$x(x^2+y^2)^{-1/2}$
f_y	$y(x^2+y^2)^{-1/2}$
f_{xx}	$(x^2+y^2)^{-1/2} - x^2(x^2+y^2)^{-3/2}$
$f_{xy} = f_{yx}$	$-xy(x^2+y^2)^{-3/2}$
f_{yy}	$(x^2+y^2)^{-1/2} - y^2(x^2+y^2)^{-3/2}$

	(b)
f_x	$x^2(x^3+y^3)^{-2/3}$
f_y	$y^2(x^3+y^3)^{-2/3}$
f_{xx}	$2x(x^3+y^3)^{-2/3} - 2x^4(x^3+y^3)^{-5/3}$
$f_{xy} = f_{yx}$	$-2x^2y^2(x^3+y^3)^{-5/3}$
f_{yy}	$2y(x^3+y^3)^{-2/3} - 2y^4(x^3+y^3)^{-5/3}$

Lösung 7.11 / 2

	(c)
f_x	$x^{p-1}(x^p+y^p)^{(1-p)/p}$
f_y	$y^{p-1}(x^p+y^p)^{(1-p)/p}$
f_{xx}	$(p-1)x^{p-2}(x^p+y^p)^{(1-p)/p}-(p-1)x^{2(p-1)}(x^p+y^p)^{(1-2p}$
$f_{xy}=f_{yx}$	$-(p-1)x^{p-1}y^{p-1}(x^p+y^p)^{(1-2p)/p}$
f_{yy}	$(p-1)y^{p-2}(x^p+y^p)^{(1-p)/p}-(p-1)y^{2(p-1)}(x^p+y^p)^{(1-2p}$

Lösung 7.11 / 3

Ableitungen an der Stelle $(1,1)$:

	(a)	(b)	(c)
f_x	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$	$2^{(1-p)/p}$
f_y	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$	$2^{(1-p)/p}$
f_{xx}	$\frac{1}{\sqrt{8}}$	$\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$	$(p-1)2^{(1-2p)/p}$
$f_{xy}=f_{yx}$	$-\frac{1}{\sqrt{8}}$	$-\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$	$-(p-1)2^{(1-2p)/p}$
f_{yy}	$\frac{1}{\sqrt{8}}$	$\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$	$(p-1)2^{(1-2p)/p}$

Aufgabe 7.12

Berechnen Sie die ersten und zweiten partiellen Ableitungen der Funktion

$$f(x,y)=\exp(x^2+y^2)$$

an der Stelle $(0,0)$.

Lösung 7.12

– Fehlt –

Der Gradient

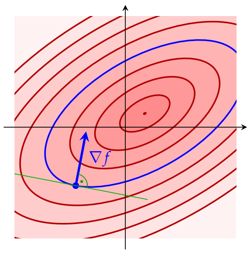
Wir fassen die partiellen Ableitungen erster Ordnung zu einem Zeilenvektor, dem **Gradienten** an der Stelle $\mathbf{x}$, zusammen.

$$\boxed{\nabla f(\mathbf{x})=(f_{x_1}(\mathbf{x}),\dots,f_{x_n}(\mathbf{x}))}$$

- ∇f heißt auch „Nabla f“.
- Der Gradient wird oft auch als Spaltenvektor geschrieben.
- Andere Notationen: $f'(\mathbf{x})$
- Der Gradient „spielt“ die gleiche Rolle wie die erste Ableitung bei Funktionen in einer Variablen.

Eigenschaften des Gradienten

- Der Gradient einer Funktion f zeigt in die Richtung des steilsten Anstieges von f.
- Seine Länge gibt diese Steigung an.
- Der Gradient steht immer normal auf die entsprechende Niveaulinie.



Beispiel

Gesucht ist der Gradient von

$$f(x,y)=x^2+3\,x\,y$$

an der Stelle $\mathbf{x}=(3,2)$.

$$f_x=2\,x+3\,y$$
$$f_y=0+3\,x$$

$$\nabla f(\mathbf{x})=(2x+3y,\,3x)$$

$$\nabla f(3,2)=(12,9)$$

Aufgabe 7.13

Berechnen Sie den Gradienten der folgenden Funktionen an der Stelle $(1,1)$:

(a) $f(x,y)=x+y$

(b) $f(x,y)=x\,y$

(c) $f(x,y)=x^2+y^2$

(d) $f(x,y)=x^2\,y^2$

(e) $f(x,y)=x^\alpha\,y^\beta,\quad \alpha,\beta>0$

Lösung 7.13

Gradient:
(a) $\nabla f(x,y) = (1,1)$,
(b) $\nabla f(x,y) = (y,x)$,
(c) $\nabla f(x,y) = (2x,2y)$,
(d) $\nabla f(x,y) = (2xy^2, 2x^2y)$,
(e) $\nabla f(x,y) = (\alpha\, x^{\alpha-1}\, y^{\beta}, \beta\, x^{\alpha}\, y^{\beta-1})$,

Gradient an der Stelle $(1,1)$:
(a) $\nabla f(x,y) = (1,1)$,
(b) $\nabla f(x,y) = (1,1)$,
(c) $\nabla f(x,y) = (2,2)$,
(d) $\nabla f(x,y) = (2,2)$,
(e) $\nabla f(x,y) = (\alpha, \beta)$.

Aufgabe 7.14

Berechnen Sie den Gradienten der folgenden Funktionen an der Stelle $(1,1)$:

(a) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$

(b) $f(x,y) = (x^3+y^3)^{\frac{1}{3}}$

(c) $f(x,y) = (x^p+y^p)^{\frac{1}{p}}$

Lösung 7.14

Gradient:
(a) $\nabla f(x,y) = (x(x^2+y^2)^{-1/2},\ \ y(x^2+y^2)^{-1/2})$,
(b) $\nabla f(x,y) = (x^2(x^3+y^3)^{-2/3},\ \ y^2(x^3+y^3)^{-2/3})$,
(c) $\nabla f(x,y) = (x^{p-1}(x^p+y^p)^{(1-p)/p},\ \ y^{p-1}(x^p+y^p)^{(1-p)/p})$,

Gradient an der Stelle $(1,1)$:
(a) $\nabla f(x,y) = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$,
(b) $\nabla f(x,y) = (\frac{1}{\sqrt[3]{4}}, \frac{1}{\sqrt[3]{4}})$,
(c) $\nabla f(x,y) = (2^{(1-p)/p}, 2^{(1-p)/p})$.

Das totale Differential

Wir wollen eine Funktion f durch eine lineare Funktion so approximieren, dass der Fehler möglichst klein ist.
Den Funktionswert an einer Stelle $\mathbf{x}+\mathbf{h}$ können wir näherungsweise analog zur Richtungsableitung berechnen.

$$f(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{x}) \approx f_{x_1}(\mathbf{x})\, h_1 + \ldots + f_{x_n}(\mathbf{x})\, h_n$$

Das totale Differential erhalten wir, wenn wir die h_i durch „unendlich kleine“ Differentiale dx_i ersetzen.

Die *lineare Funktion*

$$\boxed{df = f_{x_1}(\mathbf{x})\, dx_1 + \ldots + f_{x_n}(\mathbf{x})\, dx_n = \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}\, dx_i}$$

heißt das **totale Differential** von f an der Stelle $\mathbf{x}$.

Beispiel

Wir suchen das totale Differential von

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + 3\, x_1\, x_2$$

an der Stelle $\mathbf{x} = (3,2)$.

$$df = f_{x_1}(3,2)\, dx_1 + f_{x_2}(3,2)\, dx_2 = 12\, dx_1 + 9\, dx_2$$

Approximation von $f(3,1;1,8)$ mit Hilfe des totalen Differentials:

$$\begin{aligned} f(3,1;1,8) &\approx f(3;2) + df \\ &= 27 + 12 \cdot 0,1 + 9 \cdot (-0,2) = 26,40 \end{aligned}$$

Zum Vergleich: $f(3,1;1,8) = 26,35$

$$\mathbf{h} = (\mathbf{x}+\mathbf{h}) - \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 3,1 \\ 1,8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,1 \\ -0,2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 7.15

Sei

$$f(x,y) = 100\, (y-x^2)^2 + (1-x)^2$$

Berechnen Sie

(a) den Gradienten ∇f von f an der Stelle $(-1,1)$,

(b) das totale Differential an der Stelle $(-1,1)$,

(c) mit dessen Hilfe eine Näherung für f an der Stelle $(0,0)$,

Lösung 7.15

Die partiellen Ableitungen sind
$f_x = -400\, x\, (y-x^2) + 2\, (1-x)\, (-1)$ und
$f_y = 200\, (y-x^2)$.
(a) $(-4,0)^t$;
(b) $df = -4\, dx$;
(c) 0.

Jacobische Matrix

Sei $\mathbf{f}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m,\ \mathbf{x} \mapsto \mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} f_1(x_1,\ldots,x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1,\ldots,x_n) \end{pmatrix}$

Dann heißt die $m \times n$-Matrix

$$\boxed{D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{f}'(\mathbf{x}_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}}$$

die **Jacobische Matrix** von $\mathbf{f}$ an der Stelle $\mathbf{x}_0$.

Sie ist die *„Ableitung“* dieser vektorwertigen Funktion und somit eine Verallgemeinerung des Gradienten.

Beispiel

- $f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2) = \exp(-x_1^2 - x_2^2)$
  $$Df(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}\right) = \nabla f(\mathbf{x})$$
  $$= (-2\,x_1 \exp(-x_1^2 - x_2^2), -2\,x_2 \exp(-x_1^2 - x_2^2))$$
- $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} f_1(x_1,x_2) \\ f_2(x_1,x_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2^2 \\ x_1^2 - x_2^2 \end{pmatrix}$
  $$D\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\,x_1 & 2\,x_2 \\ 2\,x_1 & -2\,x_2 \end{pmatrix}$$
- $\mathbf{s}(t) = \begin{pmatrix} s_1(t) \\ s_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$
  $$D\mathbf{s}(t) = \begin{pmatrix} \frac{ds_1}{dt} \\ \frac{ds_2}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}$$

Kettenregel

Seien $\mathbf{f}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ und $\mathbf{g}\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$. Dann gilt

$$\boxed{D(\mathbf{g} \circ \mathbf{f})(\mathbf{x}) = D\mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{x})) \cdot D\mathbf{f}(\mathbf{x})}$$

$$\mathbf{f}(x,y) = \begin{pmatrix} e^x \\ e^y \end{pmatrix} \qquad \mathbf{g}(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 \\ x^2 - y^2 \end{pmatrix}$$

$$D\mathbf{f}(x,y) = \begin{pmatrix} e^x & 0 \\ 0 & e^y \end{pmatrix} \qquad D\mathbf{g}(x,y) = \begin{pmatrix} 2\,x & 2\,y \\ 2\,x & -2\,y \end{pmatrix}$$

$$D(\mathbf{g} \circ \mathbf{f})(\mathbf{x}) = D\mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{x})) \cdot D\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 2\,e^x & 2\,e^y \\ 2\,e^x & -2\,e^y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^x & 0 \\ 0 & e^y \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 2\,e^{2x} & 2\,e^{2y} \\ 2\,e^{2x} & -2\,e^{2y} \end{pmatrix}$$

Beispiel – Indirekte Abhängigkeit

Sei $f(x_1, x_2, t)$ wobei $x_1(t)$ und $x_2(t)$ ebenfalls von t abhängen.
Wie ändert sich f mit t?

Kettenregel:
Sei $\mathbf{x}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\ t \mapsto \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ t \end{pmatrix}$

$$\frac{df}{dt} = D(f \circ \mathbf{x})(t) = Df(\mathbf{x}(t)) \cdot D\mathbf{x}(t)$$
$$= \nabla f(\mathbf{x}(t)) \cdot \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ 1 \end{pmatrix} = (f_{x_1}(\mathbf{x}(t)), f_{x_2}(\mathbf{x}(t)), f_t(\mathbf{x}(t)) \cdot \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$= f_{x_1}(\mathbf{x}(t)) \cdot x_1'(t) + f_{x_2}(\mathbf{x}(t)) \cdot x_2'(t) + f_t(\mathbf{x}(t))$$
$$= f_{x_1}(x_1, x_2, t) \cdot x_1'(t) + f_{x_2}(x_1, x_2, t) \cdot x_2'(t) + f_t(x_1, x_2, t)$$

Aufgabe 7.16

Sei
$$f(x,y) = x^2 + y^2 \quad \text{und} \quad \mathbf{g}(t) = \begin{pmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Ableitung der zusammengesetzten Funktion $h = f \circ \mathbf{g}$ mit Hilfe der Kettenregel.

Lösung 7.16

$$Dh(t) = Df(\mathbf{g}(t)) \cdot D\mathbf{g}(t) = (2g_1(t), 2g_2(t)) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix} =$$
$$(2t, 2t^2) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix} = 2t + 4t^3.$$

(Die zusammengesetzte Funktion lautet $h(t) = f(\mathbf{g}(t)) = t^2 + t^4$.)

Aufgabe 7.17

Seien $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (x_1^3 - x_2, x_1 - x_2^3)^t$ und $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = (x_2^2, x_1)^t$. Berechnen Sie die Ableitungen der zusammengesetzten Funktionen $\mathbf{g} \circ \mathbf{f}$ und $\mathbf{f} \circ \mathbf{g}$ mit Hilfe der Kettenregel.

Lösung 7.17

$$D\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 3x_1^2 & -1 \\ 1 & -3x_2^2 \end{pmatrix}, D\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 & 2x_2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$
$$D(\mathbf{g} \circ \mathbf{f})(\mathbf{x}) = D\mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{x}))\, D\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 & 2(x_1 - x_2^3) \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3x_1^2 & -1 \\ 1 & -3x_2^2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 2(x_1 - x_2^3) & 6(-x_1 x_2^2 + x_2^5) \\ 3x_1^2 & -1 \end{pmatrix}$$
$$D(\mathbf{f} \circ \mathbf{g})(\mathbf{x}) = D\mathbf{f}(\mathbf{g}(\mathbf{x}))\, D\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 3x_2^4 & -1 \\ 1 & -3x_1^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2x_2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -1 & 6x_2^5 \\ -3x_1^2 & 2x_2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 7.18

Sei $Q(K, L, t)$ eine Produktionsfunktion, wobei $L = L(t)$ und $K = K(t)$ selbst Funktionen der Zeit t sind. Berechnen Sie $\frac{dQ}{dt}$ mit Hilfe der Kettenregel.

Lösung 7.18

Sei $\mathbf{s}(t) = \begin{pmatrix} K(t) \\ L(t) \\ t \end{pmatrix}$. Dann ist

$\frac{dQ}{dt} = DQ(\mathbf{s}(t)) \cdot D\mathbf{s}(t) = (Q_K(\mathbf{s}(t)), Q_L(\mathbf{s}(t)), Q_t(\mathbf{s}(t)) \cdot \begin{pmatrix} K'(t) \\ L'(t) \\ 1 \end{pmatrix} = Q_K K'(t) + Q_L L'(t) + Q_t$.

Aufgabe 7.19

Sei $\mathbf{A}$ eine $n \times m$ Matrix. Bestimmen Sie die Jacobische Matrix der Funktion $\mathbf{f}\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{A}\mathbf{x}$.

Lösung 7.19

$D\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}$.