Kapitel 6

Grenzwert und Stetigkeit

Grenzwert einer Funktion

Was passiert mit dem Funktionswert einer Funktion f, wenn das Argument x gegen einen bestimmten Wert x_0 strebt?
(Wobei x_0 nicht zum Definitionsbereich von f gehören muss.)

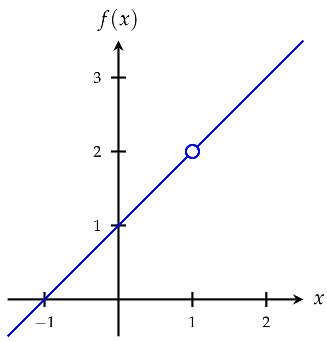
Die Funktion

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

ist in $x = 1$ nicht definiert.

Durch Faktorisieren und Kürzen erhalten wir die Funktion

$$g(x) = x + 1 = \begin{cases} f(x), & \text{falls } x \neq 1 \\ 2, & \text{falls } x = 1 \end{cases}$$



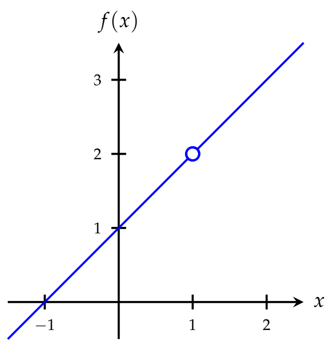
Grenzwert einer Funktion

Wenn wir uns in der Funktion $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ dem Argument $x_0 = 1$ nähern (egal wie), und uns ansehen, was mit dem Funktionswert geschieht, dann landen wir bei $y = 2$.

Wir sagen: $f(x)$ **konvergiert** gegen 2, wenn x gegen 1 strebt

und schreiben:

$$\boxed{\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2}$$



Grenzwert einer Funktion

Mathematisch wird das so formuliert:

Wenn für jede konvergente Folge von Argumenten $(x_n) \to x_0$ die Folge der Funktionswerte $(f(x_n))$ gegen eine Zahl a konvergiert, so heißt a der **Grenzwert** (oder **Limes**) der Funktion f *an der Stelle* x_0.

Wir schreiben dafür

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = a \quad \text{oder} \quad f(x) \to a \text{ für } x \to x_0}$$

x_0 muss nicht in der Definitionsmenge liegen.
Genauso muß a nicht in der Wertemenge der Funktion liegen.

Rechenregeln

Für Limiten von Funktionen gelten analoge Rechenregeln wie für Grenzewerte von Folgen.
Seien $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$ und $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = b$.

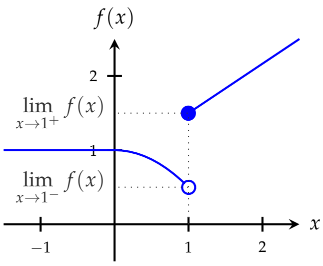
$$\begin{array}{lll}
(1) & \lim\limits_{x \to x_0} (c \cdot f(x) + d) = c \cdot a + d & \\
(2) & \lim\limits_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = a + b & \\
(3) & \lim\limits_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = a \cdot b & \\
(4) & \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{a}{b} & \text{für } b \neq 0 \\
(6) & \lim\limits_{x \to x_0} (f(x))^k = a^k & \text{für } k \in \mathbb{N}
\end{array}$$

Bestimmen eines Grenzwertes

Für einfache Funktionen eignet sich folgende Vorgangsweise:

1. Wir zeichnen den Graphen der Funktion.
2. Wir zeichnen den Wert x_0 auf der x-Achse ein.
3. Wir setzen den Bleistift auf dem Graphen und führen ihn auf dem Graphen von *rechts* bis zum x_0-Wert.
4. Wir lesen den y-Wert dieses Punktes von y-Achse ab. Dieser Wert heißt der **rechtsseitige Grenzwert** von f an der Stelle x_0: $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$.
5. Analog erhalten wir von der *linken* Seite den **linksseitige Grenzwert** von f an der Stelle x_0: $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$.
6. Wenn beide Limiten *gleich* sind, so existiert der Grenzwert und es gilt
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

Beispiel



$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{für } x < 0 \\ 1 - \frac{x^2}{2}, & \text{für } 0 \le x < 1 \\ \frac{x}{2} + 1, & \text{für } x \ge 1 \end{cases}$$

$0{,}5 = \lim_{x\to 1^-} f(x) \neq \lim_{x\to 1^+} f(x) = 1{,}5$
d.h., der Grenzwert an der Stelle $x_0 = 1$ existiert nicht.

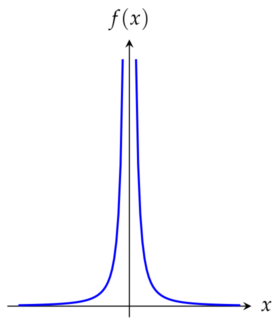
Der Grenzwert an anderen Stellen existiert hingegen,
z.B. $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$.

Unbeschränkte Funktion

Es gibt gegen ∞ (oder $-\infty$) wenn x gegen x_0 strebt.

Wir schreiben dann (in abuse of language):

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty}$$



$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$$

Grenzwert gegen ∞

Der Grenzwertbegriff gilt analog, wenn wir $x_0 = \infty$ oder $x_0 = -\infty$ setzen.

$$\lim_{x\to\infty} f(x)$$

existiert, falls $f(x)$ gegen einen Wert y konvergiert, wenn x immer größer wird.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2} = 0 \qquad \text{und} \qquad \lim_{x\to -\infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

Aufgabe 6.1

Zeichnen Sie den Graphen der Funktion

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{x^2}{2} & \text{für } x \leq -2 \\ x+1 & \text{für } -2 < x < 2 \\ \frac{x^2}{2} & \text{für } x \geq 2 \end{cases}$$

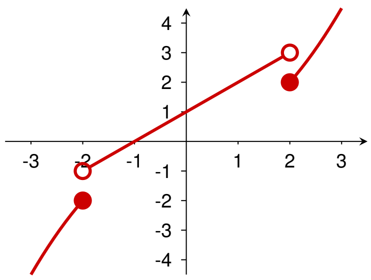
Berechnen Sie $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$, $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$ und $\lim_{x\to x_0} f(x)$
für $x_0 = -2$, 0 und 2:

$\lim_{x\to -2^+} f(x) =$ $\qquad \lim_{x\to -2^-} f(x) =$ $\qquad \lim_{x\to -2} f(x) =$

$\lim_{x\to 0^+} f(x) =$ $\qquad \lim_{x\to 0^-} f(x) =$ $\qquad \lim_{x\to 0} f(x) =$

$\lim_{x\to 2^+} f(x) =$ $\qquad \lim_{x\to 2^-} f(x) =$ $\qquad \lim_{x\to 2} f(x) =$

Lösung 6.1



$\lim_{x\to -2^+} f(x) = -1$, $\quad \lim_{x\to -2^-} f(x) = -2$, $\quad \lim_{x\to -2} f(x)$ existiert nicht;

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0} f(x) = 1$;

$\lim_{x\to 2^+} f(x) = 2$, $\quad \lim_{x\to 2^-} f(x) = 3$, $\quad \lim_{x\to 2} f(x)$ existiert nicht;

f ist stetig in 0 und nicht stetig in -2 und 2.

Aufgabe 6.2

Überlegen Sie sich den links- bzw. rechtsseitigen Grenzwert für

(a) $\lim_{x\to 0^-} f(x) =$

$\lim_{x\to 0^+} f(x) =$

für $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$

(b) $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} =$

$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} =$

(c) $\lim_{x\to 1^-} x =$

$\lim_{x\to 1^+} x =$

Lösung 6.2

(a) $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$;
(b) $\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$, $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$;
(c) $\lim_{x \to 1^-} x = \lim_{x \to 1^+} x = 1$.

Aufgabe 6.3

Geben Sie folgende Grenzwerte an, soferne sie existieren.

(a) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x+1}$

(b) $\lim\limits_{x \to 0} x^2$

(c) $\lim\limits_{x \to \infty} \ln(x)$

(d) $\lim\limits_{x \to 0} \ln|x|$

(e) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x+1}{x-1}$

Lösung 6.3

(a) 0;
(b) 0;
(c) ∞;
(d) $-\infty$;
(e) 1.

Aufgabe 6.4

Bestimmen Sie

(a) $\lim\limits_{x\downarrow 1} \frac{x^{3/2}-1}{x^3-1}$

(b) $\lim\limits_{x\uparrow -2} \frac{\sqrt{|x^2-4|^2}}{x+2}$

(c) $\lim\limits_{x\uparrow 0} \lfloor x \rfloor$

(d) $\lim\limits_{x\downarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x-1}}$

(e) $\lim\limits_{x\downarrow 2} \frac{2x^2-3x-2}{|x-2|}$

(f) $\lim\limits_{x\uparrow 2} \frac{2x^2-3x-2}{|x-2|}$

(g) $\lim\limits_{x\downarrow -2} \frac{|x+2|^{3/2}}{2+x}$

(h) $\lim\limits_{x\uparrow 1} \frac{x+1}{x^2-1}$

Aufgabe 6.4 / 2

(i) $\lim\limits_{x\downarrow -7} \frac{2|x+7|}{x^2+4x-21}$

Hinweis: $\lfloor x \rfloor$ ist die größte ganze Zahl kleiner oder gleich x.

Lösung 6.4

(a) $\frac{1}{2}$; (b) -4; (c) -1; (d) 0; (e) 5; (f) -5; (g) 0; (h) $-\infty$; (i) $-\frac{1}{5}$.

Aufgabe 6.5

Berechnen Sie den Grenzwert von

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

für

(a) $f(x) = x$

(b) $f(x) = x^2$

(c) $f(x) = x^3$

(d) $f(x) = x^n$, für $n \in \mathbb{N}$.

Lösung 6.5

(a) 1;
(b) $2x$;
(c) $3x^2$;
(d) nx^{n-1}.

Regel von de l'Hospital

Bei der Bestimmung des Grenzwertes

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

kann es vorkommen, dass

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0 \qquad \text{(oder } = \pm\infty\text{)}$$

Allerdings sind Ausdrücke wie $\frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$ nicht definiert.
(Man kann nicht einfach durch 0 oder ∞ kürzen!)

Regel von de l'Hospital

Wenn $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$ (oder $= \infty$ oder $= -\infty$), dann gilt

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}}$$

Vorsetzung: f und g sind in x_0 differenzierbar.

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 7x + 6}{x^2 - x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{3x^2 - 7}{2x - 1} = \frac{5}{3}$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x^2} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{1}{x}}{2x} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{2x^2} = 0$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \ln(1+x)}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - (1+x)^{-1}}{2x} = \lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^{-2}}{2} = \frac{1}{2}$$

Aufgabe 6.6

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

(a) $\lim_{x \to 4} \frac{x^2 - 2x - 8}{x^3 - 2x^2 - 11x + 12} =$

(b) $\lim_{x \to -1} \frac{x^2 - 2x - 8}{x^3 - 2x^2 - 11x + 12} =$

(c) $\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 5x^2 + 8x - 4}{x^3 - 3x^2 + 4} =$

(d) $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} =$

(e) $\lim_{x \to 0^+} x \ln(x) =$

(f) $\lim_{x \to \infty} x \ln(x) =$

Lösung 6.6

(a) $\frac{2}{7}$;
(b) $-\frac{1}{4}$;
(c) $\frac{1}{3}$;
(d) $\frac{1}{2}$;
(e) $= \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{x^{-1}} = 0$;
(f) ∞.
In (b) und (f) kann die Regel von de l'Hospital nicht verwendet werden.

Aufgabe 6.7

Warum führt die folgende Anwendung der Regel von de l'Hospital zu einem falschen Ergebnis? (Der wahre Grenzwert ist 2.)

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3 + x^2 - x - 1}{x^2 - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{3\,x^2 + 2\,x - 1}{2\,x} = \lim_{x\to 1} \frac{6\,x + 2}{2} = 4$$

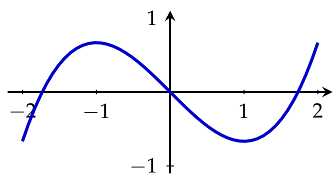
Lösung 6.7

Die Voraussetzung für die Anwendung der Regel von de l'Hospital ist für den zweiten Quotienten nicht gegeben. (Der Nenner strebt nicht gegen 0.)

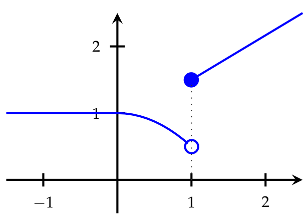
Stetigkeit

Beim Zeichen von Graphen fällt auf, dass es Funktionen gibt, die sich *ohne Absetzen des Bleistifts* zeichnen lassen.
Solche Funktionen heißen **stetig**.

Andere Funktionen besitzen *Sprungstellen* und man muss beim Zeichnen den Bleistift vom Papier heben. Solche Stellen heißen *Unstetigkeitsstellen* der Funktion.
Der Graph der Funktion $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x$ im Intervall $[-2, 2]$:



stetig



unstetig in $x = 1$

Stetigkeit

Formal läßt sich das so ausdrücken:

Definition:
Eine Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ heißt **stetig** an der Stelle $x_0 \in D$, falls

1. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ existiert,
2. $f(x_0)$ existiert, und
3. $\boxed{\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)}$.

Die Funktion heißt *stetig*, falls sie in allen Punkten des Definitionsbereichs stetig ist.

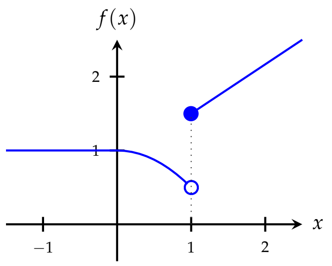
Stetigkeit

Vorgangsweise für einfache Funktionen:

(1) Wir zeichnen den Graphen der Funktion.

(2) In allen Punkten des *Definitionsbereichs*, in denen wir beim Zeichnen *nicht* den Bleistift absetzen müssen, ist die Funktion stetig.

(3) In allen Punkten des *Definitionsbereichs*, in denen wir absetzen müssen ist, die Funktion nicht stetig.



$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{für } x < 0 \\ 1 - \frac{x^2}{2}, & \text{für } 0 \le x < 1 \\ \frac{x}{2} + 1, & \text{für } x \ge 1 \end{cases}$$

f ist überall stetig
außer im Punkt $x = 1$.

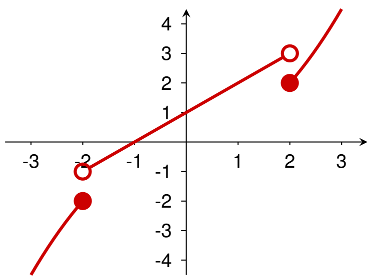
Aufgabe 6.8

Zeichnen Sie den Graphen der Funktion

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{x^2}{2} & \text{für } x \le -2 \\ x + 1 & \text{für } -2 < x < 2 \\ \frac{x^2}{2} & \text{für } x \ge 2 \end{cases}$$

Berechnen Sie $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ und $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$
für $x_0 = -2$, 0 und 2.
Ist f in diesen Punkten stetig?

Lösung 6.8



$\lim_{x \to -2^+} f(x) = -1$, $\lim_{x \to -2^-} f(x) = -2$, $\lim_{x \to -2} f(x)$ existiert nicht;

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0} f(x) = 1$;

$\lim_{x \to 2^+} f(x) = 2$, $\lim_{x \to 2^-} f(x) = 3$, $\lim_{x \to 2} f(x)$ existiert nicht;

f ist stetig in 0 und nicht stetig in -2 und 2.

Aufgabe 6.9

Bestimmen Sie den links- und rechtsseitigen Grenzwert der Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \\ -x^2 - 1 & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

an der Stelle 0. Ist f in diesem Punkt stetig bzw. differenzierbar?

Lösung 6.9

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -1$, $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$.
Nicht stetig an der Stelle 0. (Daher auch nicht differenzierbar.)

Aufgabe 6.10

Ist die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{für } x \leq 1 \\ \frac{x}{2} + \frac{3}{2} & \text{für } x > 1 \end{cases}$$

an der Stelle 1 stetig bzw. differenzierbar?

Berechnen Sie den (links- und rechtsseiten) Grenzwert an der Stelle $x_0 = 1$.

Lösung 6.10

$\lim_{x \to 1} f(x) = 2$.
Stetig im Punkt 1, aber nicht differenzierbar.

Aufgabe 6.11

Sind die folgenden Funktionen stetig auf dem Definitionsbereich? Skizzieren Sie die Funktionen.

(a) $D = \mathbb{R}$, $f(x) = x$

(b) $D = \mathbb{R}$, $f(x) = 3x + 1$

(c) $D = \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-x} - 1$

(d) $D = \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$

(e) $D = \mathbb{R}^+$, $f(x) = \ln(x)$

(f) $D = \mathbb{R}, f(x) = \lfloor x \rfloor$

(g) $D = \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \leq 0, \\ x+1 & \text{für } 0 < x \leq 2, \\ x^2 & \text{für } x > 2. \end{cases}$

Hinweis: $\lfloor x \rfloor$ ist die größte ganze Zahl kleiner oder gleich x.

Lösung 6.11

Die Funktion sind stetig in
(a) D;
(b) D;
(c) D;
(d) D;
(e) D;
(f) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$;
(g) $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Aufgabe 6.12

Welchen Wert muss h besitzen, damit die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2hx & \text{für } x \leq 2, \\ 3x - h & \text{für } x > 2 \end{cases}$$

stetig ist?

Lösung 6.12

$h = \frac{2}{5}$.