Kapitel 5

Reelle Funktionen

Reelle Funktion

Reelle Funktionen sind Abbildungen, in denen sowohl die *Definitionsmenge* als auch die *Wertemenge* Teilmengen von $\mathbb{R}$ (üblicherweise Intervalle) sind.

Bei reellen Funktionen wird meist weder Definitionsmenge noch Wertemenge angegeben. In diesem Fall gilt:

- Die *Definitionsmenge* ist die größtmögliche *sinnvolle* Teilmenge von $\mathbb{R}$, in der die Zuordnungsvorschrift definiert ist.
- Die *Wertemenge* ist die **Bildmenge**

$$f(D) = \{y \mid y = f(x) \text{ für ein } x \in D_f\}\ .$$

Beispiel

Die Produktionsfunktion $f(x) = \sqrt{x}$ ist eine Abkürzung für

$$f\colon [0,\infty) \to [0,\infty),\ x \mapsto f(x) = \sqrt{x}$$

(Es gibt keine „negativen“ Produktionsmengen.
Außerdem ist $\sqrt{x}$ für $x < 0$ nicht reell!)

Die abgeleitete Funktion $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ ist eine Abkürzung für

$$f'\colon (0,\infty) \to (0,\infty),\ x \mapsto f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

(Beachten sie das offene Intervall $(0,\infty)$.
$\frac{1}{2\sqrt{x}}$ ist für $x = 0$ nicht definiert!)

Aufgabe 5.1

Was ist der größtmögliche Definitionsbereich einer reellen Funktion mit dem angegeben Funktionsterm?

(a) $h(x) = \frac{x-1}{x-2}$
(b) $D(p) = \frac{2p+3}{p-1}$
(c) $f(x) = \sqrt{x-2}$
(d) $g(t) = \frac{1}{\sqrt{2t-3}}$
(e) $f(x) = 2 - \sqrt{9-x^2}$
(f) $f(x) = 1 - x^3$
(g) $f(x) = 2 - |x|$
(h) $f(x) = \frac{|x-3|}{x-3}$
(i) $f(x) = \ln(1+x)$
(j) $f(x) = \ln(1+x^2)$

Aufgabe 5.1 / 2

(k) $f(x) = \ln(1-x^2)$
(l) $f(x) = \exp(-x^2)$
(m) $f(x) = (e^x - 1)/x$

Lösung 5.1

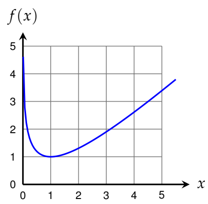
(a) $D_h = \mathbb{R} \setminus \{2\}$;
(b) $D_D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$;
(c) $D_f = [2,\infty)$;
(d) $D_g = (\frac{3}{2},\infty)$;
(e) $D_f = [-3,3]$;
(f) $D_f = \mathbb{R}$;
(g) $D_f = \mathbb{R}$;
(h) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{3\}$;
(i) $D_f = (-1,\infty)$;
(j) $D_f = \mathbb{R}$;
(k) $D_f = (-1,1)$;
(l) $D_f = \mathbb{R}$;
(m) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Graph einer Funktion

Jedem Paar $(x, f(x))$ entspricht ein Punkt in der xy-Ebene. Die Menge aller dieser Punkte bildet eine Kurve und heißt **Graph** der Funktion.

$$\mathcal{G}_f = \{(x,y) \mid y = f(x) \text{ für ein } x \in D_f\}$$

Wir können Funktionen mit Hilfe des Graphen veranschaulichen. Viele Eigenschaften von Funktionen lassen sich bereits aus deren Graphen herauslesen.



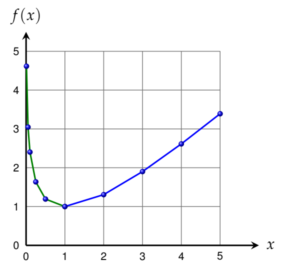
$$f(x) = x - \ln(x)$$

Zeichnen eines Graphen

1. Wir überlegen uns zuerst wie der Graph wahrscheinlich aussehen wird. Graphen von elementaren Funktionen sollten bereits aus dem Gedächtnis skizziert werden können.
2. Wir wählen einen geeigneten Bereich auf der x-Achse aus. (Er sollte einen charakteristischen Ausschnitt zeigen.)
3. Wir erstellen eine Wertetabelle und zeichnen die entsprechenden Zahlenpaare in der xy-Ebene ein.

   Charakteristische Punkte wie etwa lokale Extrema oder Wendepunkte sollten verwendet werden.
4. Wir überprüfen, ob aus den gezeichneten Punkten der Verlauf der Kurve ersichtlich ist. Andernfalls verlängern wir die Wertetabelle um einige geeignete Werte.
5. Die eingezeichneten Punkte werden in geeigneter Weise miteinander verbunden.

Zeichnen eines Graphen



Graph der Funktion

$$f(x) = x - \ln x$$

Wertetabelle:

x	$f(x)$
0	ERROR
1	1
2	1,307
3	1,901
4	2,614
5	3,391
0,5	1,193
0,25	1,636
0,1	2,403
0,05	3,046

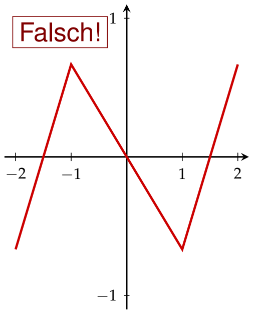
Fehlerquellen

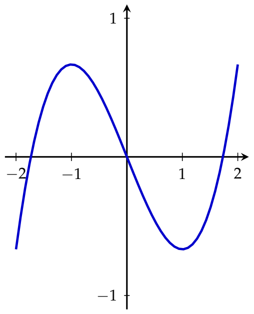
Häufige Fehler beim Zeichnen eines Graphen:

- **Zu kleine Wertetabelle:**
  Aus den gegebenen Daten lässt sich der Kurvenverlauf nicht konstruieren.
- **Ignorieren von wichtigen Punkten:**
  Extrema und Wendepunkte sollten idealerweise bekannt sein („Kurvendiskussion") und zur Konstruktion benutzt werden.
- **Ungeeigneter Bereich für x und y-Achse:**
  Der Funktionsgraph ist winzig oder wichtige Details verschwinden im „Rauschen" der Bleistiftstriches.

Fehlerquellen

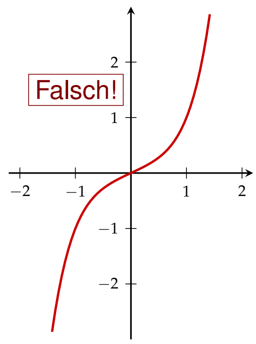
Der Graph der Funktion $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x$ im Intervall $[-2, 2]$:

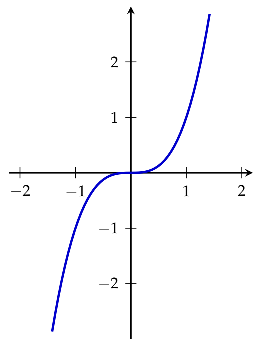




Fehlerquellen

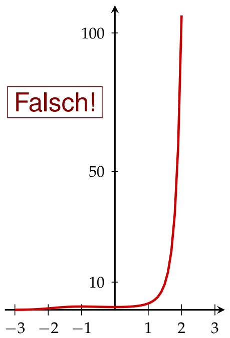
Der Graph von $f(x) = x^3$ hat im Ursprung Anstieg 0:

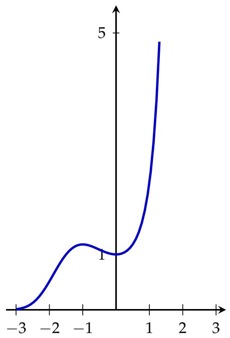




Fehlerquellen

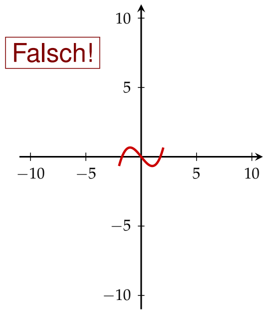
Die Funktion $f(x) = \exp(\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2)$ hat ein lokales Maximum in -1:

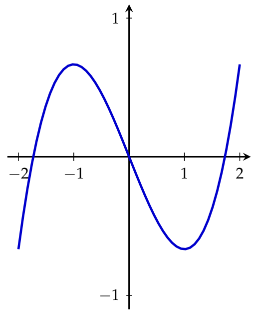




Fehlerquellen

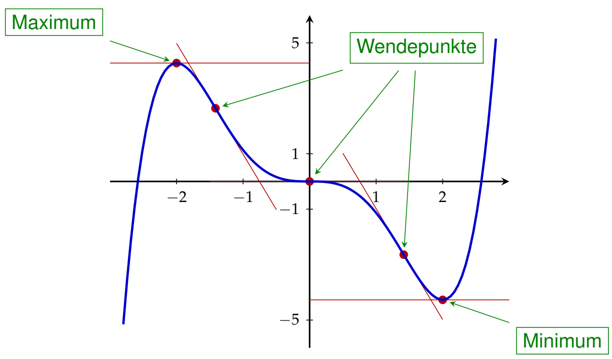
Der Graph der Funktion $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x$ im Intervall $[-2, 2]$:





Extrema und Wendetangenten

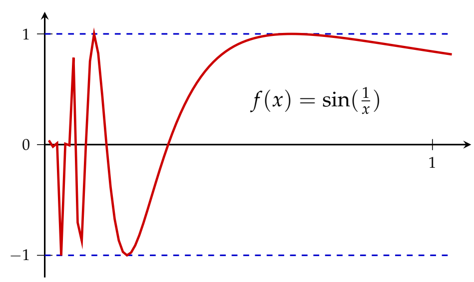
Graph der Funktion $f(x) = \frac{1}{15}(3x^5 - 20x^3)$:



Fehlerquellen

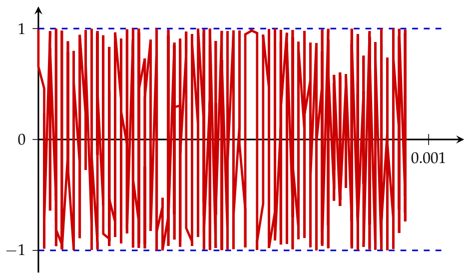
Es sei nochmals auf die Wichtigkeit hingewiesen, sich *zuerst* Gedanken über das mögliche Aussehen des Graphen zu machen.

Im Extremfall kann nämlich auch ein mit Computerhilfe erzeugter Graph wenig mit dem tatsächlichen Graphen gemeinsam haben.



Fehlerquellen

$$f(x) = \sin(\tfrac{1}{x})$$



Skizze eines Funktionsgraphs

Bei einer **Skizze** kommt es nicht auf die Genauigkeit der Funktionswerte an, die Skalen an den beiden Achsen werden meist nicht gezeichnet.

Allerdings ist es wichtig, dass die Skizze alle wesentlichen Eigenschaften und Punkte (wie etwa Extrema) der Funktion widerspiegelt.

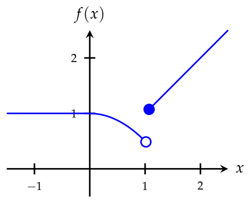
Skizzen können auch so etwas wie eine Karikatur sein: Sie heben die markanten, charakteristischen Eigenschaften der Funktion hervor.

Stückweise definierte Funktionen

Die Zuordnungsvorschrift einer Funktion kann auch in verschiedenen Intervallen des Definitionsbereichs verschieden definiert sein.

An den Intervallgrenzen müssen wir dann kennzeichnen, welche Punkte Bestandteil des Graphen sind:

- • (Bestandteil) und ∘ (nicht Bestandteil).



$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{für } x < 0 \\ 1 - \frac{x^2}{2}, & \text{für } 0 \le x < 1 \\ x, & \text{für } x \ge 1 \end{cases}$$

Aufgabe 5.2

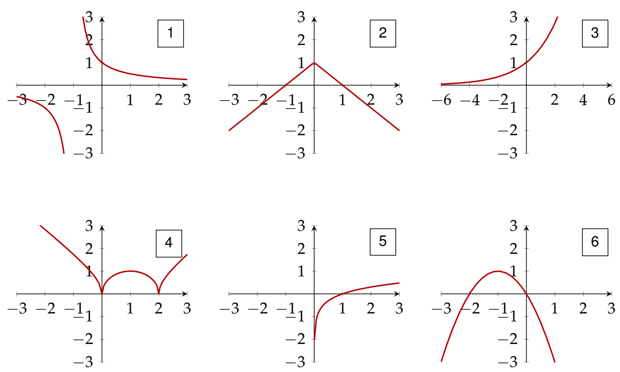
Ordnen Sie die Funktionsterme den Funktionsgraphen $\boxed{1}$ – $\boxed{18}$ zu:

(a) $f(x) = x^2$
(b) $f(x) = \frac{x}{x+1}$
(c) $f(x) = \frac{1}{x+1}$
(d) $f(x) = \sqrt{x}$
(e) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$
(f) $f(x) = \sqrt{|2x - x^2|}$
(g) $f(x) = -x^2 - 2x$
(h) $f(x) = (x^3 - 3x^2 + 2x)\operatorname{sgn}(1-x) + 1$
(i) $f(x) = e^x$
(j) $f(x) = e^{x/2}$
(k) $f(x) = e^{2x}$

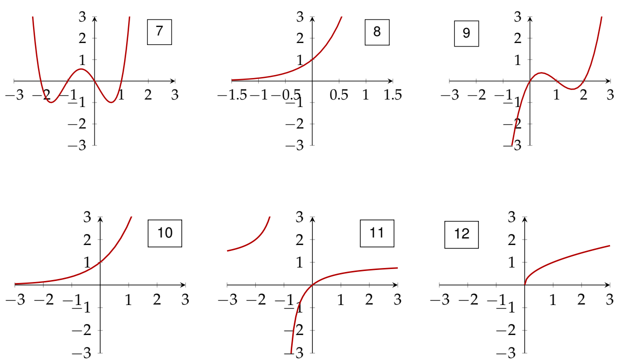
Aufgabe 5.2 / 2

(l) $f(x) = 2^x$
(m) $f(x) = \ln(x)$
(n) $f(x) = \log_{10}(x)$
(o) $f(x) = \log_2(x)$
(p) $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$
(q) $f(x) = 1 - |x|$
(r) $f(x) = \prod_{k=-1}^{2}(x+k)$

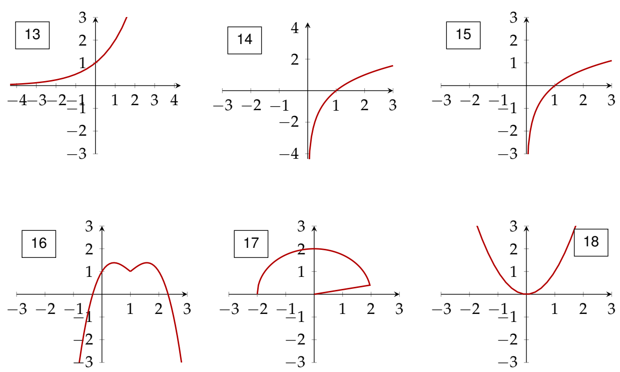
Aufgabe 5.2 / 3



Aufgabe 5.2 / 4



Aufgabe 5.2 / 5



Lösung 5.2

(a) $\boxed{18}$;
(b) $\boxed{11}$;
(c) $\boxed{1}$;
(d) $\boxed{12}$;
(e) $\boxed{9}$;
(f) $\boxed{4}$;
(g) $\boxed{6}$;
(h) $\boxed{16}$;
(i) $\boxed{10}$;
(j) $\boxed{3}$;
(k) $\boxed{8}$;
(l) $\boxed{13}$;
(m) $\boxed{15}$;
(n) $\boxed{5}$;
(o) $\boxed{14}$;
(p) $\boxed{17}$;
(q) $\boxed{2}$;
(r) $\boxed{7}$.

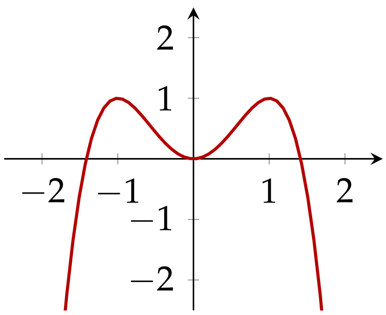
Aufgabe 5.3

Zeichnen Sie den Graphen der Funktion

$$f(x) = -x^4 + 2x^2$$

im Intervall $[-2, 2]$.

Lösung 5.3



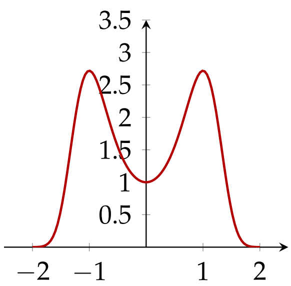
Aufgabe 5.4

Zeichnen Sie den Graphen der Funktion

$$f(x) = e^{-x^4+2x^2}$$

im Intervall $[-2, 2]$.

Lösung 5.4



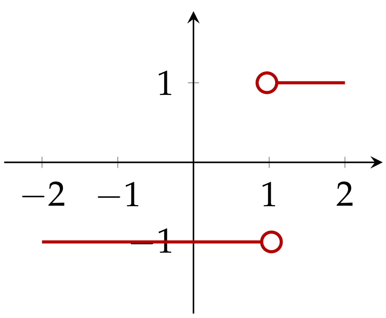
Aufgabe 5.5

Zeichnen Sie den Graphen der Funktion

$$f(x) = \frac{x-1}{|x-1|}$$

im Intervall $[-2, 2]$.

Lösung 5.5



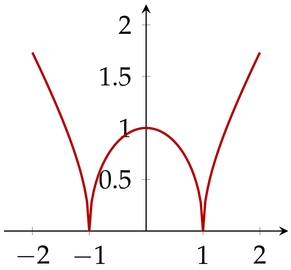
Aufgabe 5.6

Zeichnen Sie den Graphen der Funktion

$$f(x) = \sqrt{|1 - x^2|}$$

im Intervall $[-2, 2]$.

Lösung 5.6



Bijektivität

Jedes Argument besitzt immer genau ein Bild. Die Anzahl der Urbilder eines Elementes $y \in W$ kann jedoch beliebig sein. Wir können daher Funktionen nach der Anzahl der Urbilder einteilen.

- Eine Abbildung f heißt **injektiv**, wenn jedes Element aus der Wertemenge *höchstens* ein Urbild besitzt.
- Sie heißt **surjektiv**, wenn jedes Element aus der Wertemenge *mindestens* ein Urbild besitzt.
- Sie heißt **bijektiv**, wenn sie sowohl injektiv als auch surjektiv ist.

Eine Funktion besitzt genau dann eine *Umkehrfunktion* wenn sie *bijektiv* ist.

Horizontalen-Test

Wie kann man feststellen, ob eine reelle Funktion injektiv / surjektiv ist?
Wie viele Urbilder kann ein $y \in W_f$ besitzen?

(1) Wir zeichnen den Graphen der zu untersuchenden Funktion.

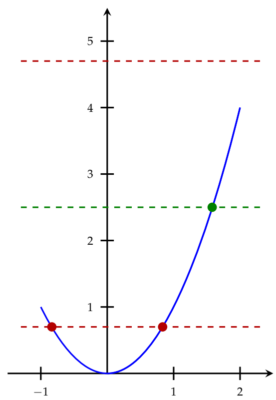
(2) Wir zeichnen ein $y \in W$ auf der y-Achse ein und legen eine Gerade parallel zur x-Achse (Horizontale) durch diesen y-Wert.

(3) Die Anzahl der Schnittpunkte von Horizontale und Graph ist die Anzahl der Urbilder von y.

(4) Wir wiederholen (2) und (3) für eine *repräsentative* Auswahl von y-Werten.

(5) Interpretation: Schneidet jede Horizontale den Graphen in
- **(a)** *höchstens* einem Punkt, so ist f **injektiv**;
- **(b)** *mindestens* einem Punkt, so ist f **surjektiv**;
- **(c)** *genau* einem Punkt, so ist f **bijektiv**.

Beispiel



$f\colon [-1,2] \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$
- ist nicht injektiv;
- ist nicht surjektiv;

$f\colon [0,2] \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$
- ist injektiv;
- ist nicht surjektiv;

$f\colon [0,2] \to [0,4],\ x \mapsto x^2$
- ist bijektiv;

Definitions- und Wertemenge sind Bestandteil der Funktion!

Aufgabe 5.7

Zeichnen Sie die Graphen der folgenden Funktionen und überprüfen Sie, ob Injektivität, Surjektivität oder Bijektivität vorliegt.

(a) $f\colon [-2,2] \to \mathbb{R},\ x \mapsto 2\,x+1$

(b) $f\colon \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{x}$

(c) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^3$

(d) $f\colon [2,6] \to \mathbb{R},\ x \mapsto (x-4)^2-1$

(e) $f\colon [2,6] \to [-1,3],\ x \mapsto (x-4)^2-1$

(f) $f\colon [4,8] \to [-1,15],\ x \mapsto (x-4)^2-1$

Lösung 5.7

(a) injektiv, nicht surjektiv;
(b) injektiv, nicht surjektiv;
(c) bijektiv;
(d) nicht injektiv, nicht surjektiv;
(e) nicht injektiv, surjektiv;
(f) bijektiv.
Beachten Sie, dass Definitions- und Wertemenge Bestandteil der Funktion sind.

Die zusammengesetzte Funktion

Seien $f\colon D_f \to W_f$ und $g\colon D_g \to W_g$ Funktionen mit $W_f \subseteq D_g$.
Dann heißt die Funktion

$$\boxed{g \circ f\colon D_f \to W_g,\ x \mapsto (g\circ f)(x) = g(f(x))}$$

zusammengesetzte Funktion („g *zusammengesetzt* f“).

Seien $g\colon \mathbb{R} \to [0,\infty),\ x \mapsto g(x) = x^2,$
$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x) = 3x-2.$

Dann ist $(g\circ f)\colon \mathbb{R} \to [0,\infty),$
$x \mapsto (g\circ f)(x) = g(f(x)) = g(3x-2) = (3x-2)^2$

und $(f\circ g)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},$
$x \mapsto (f\circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2) = 3x^2-2$

Aufgabe 5.8

Es sei $f(x) = x^2+2x-1$ und $g(x) = 1+|x|^{\frac{3}{2}}$.
Berechnen Sie

(a) $(f\circ g)(4)$

(b) $(f\circ g)(-9)$

(c) $(g\circ f)(0)$

(d) $(g\circ f)(-1)$

Lösung 5.8

(a) $(f \circ g)(4) = f(g(4)) = f(9) = 98$;
(b) $(f \circ g)(-9) = f(g(-9)) = f(28) = 839$;
(c) $(g \circ f)(0) = g(f(0)) = g(-1) = 2$;
(d) $(g \circ f)(-1) = g(f(-1)) = g(-2) \approx 3{,}828$.

Aufgabe 5.9

Bestimmen Sie $f \circ g$ und $g \circ f$.
Bestimmen Sie die Definitionsbereiche von f, g, $f \circ g$ und $g \circ f$.

(a) $f(x) = x^2, \quad g(x) = 1 + x$

(b) $f(x) = \sqrt{x} + 1, \quad g(x) = x^2$

(c) $f(x) = \frac{1}{x+1}, \quad g(x) = \sqrt{x} + 1$

(d) $f(x) = 2 + \sqrt{x}, \quad g(x) = (x-2)^2$

(e) $f(x) = x^2 + 2, \quad g(x) = x - 3$

(f) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad g(x) = \frac{1}{x}$

(g) $f(x) = \ln(x), \quad g(x) = \exp(x^2)$

(h) $f(x) = \ln(x-1), \quad g(x) = x^3 + 1$

Lösung 5.9

(a) $(f \circ g)(x) = (1+x)^2$,
$(g \circ f)(x) = 1 + x^2$,
$D_f = D_g = D_{f \circ g} = D_{g \circ f} = \mathbb{R}$;

(b) $(f \circ g)(x) = |x| + 1$,
$(g \circ f)(x) = (\sqrt{x} + 1)^2$,
$D_f = D_{g \circ f} = [0, \infty)$, $D_g = D_{f \circ g} = \mathbb{R}$;

(c) $(f \circ g)(x) = \frac{1}{\sqrt{x}+2}$,
$(g \circ f)(x) = \sqrt{\frac{1}{x+1}} + 1$,
$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $D_g = D_{f \circ g} = [0, \infty)$, $D_{g \circ f} = (-1, \infty)$;

(d) $(f \circ g)(x) = 2 + |x - 2|$,
$(g \circ f)(x) = |x|$,
$D_f = D_{g \circ f} = [0, \infty)$, $D_g = D_{f \circ g} = \mathbb{R}$;

Lösung 5.9 / 2

(e) $(f \circ g)(x) = (x-3)^2 + 2$,
$(g \circ f)(x) = x^2 - 1$,
$D_f = D_g = D_{f \circ g} = D_{g \circ f} = \mathbb{R}$;

(f) $(f \circ g)(x) = \frac{1}{1+(\frac{1}{x})^2}$,
$(g \circ f)(x) = 1 + x^2$,
$D_f = D_{g \circ f} = \mathbb{R}$, $D_g = D_{f \circ g} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$;

(g) $(f \circ g)(x) = x^2$,
$(g \circ f)(x) = \exp(\ln(x)^2) = x^{\ln x}$,
$D_f = D_{g \circ f} = (0, \infty)$, $D_g = D_{f \circ g} = \mathbb{R}$;

(h) $(f \circ g)(x) = \ln(x^3)$,
$(g \circ f)(x) = (\ln(x-1))^3 + 1$,
$D_f = D_{g \circ f} = (1, \infty)$, $D_g = \mathbb{R}$, $D_{f \circ g} = (0, \infty)$.

Inverse Funktion

Eine **bijektive** Funktion $f\colon D_f \to W_f$ besitzt eine **Umkehrfunktion** $f^{-1}\colon W_f \to D_f$ mit der Eigenschaft $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}$ und $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}$, i.e.,

$$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y) = x \quad \text{und} \quad f(f^{-1}(y)) = f(x) = y$$

Die Zuordnungsvorschrift der inversen Abbildung einer reellen Funktion erhalten wir durch Vertauschen der Rollen von Argument x und Bild y.

Beispiel

Zur Berechnung der inversen Funktion drücken wir x als Funktion von y aus.

Wir suchen die Umkehrfunktion von

$$y = f(x) = 2x - 1$$

Durch Umformung erhalten wir:

$$y = 2x - 1 \quad \Leftrightarrow \quad y + 1 = 2x \quad \Leftrightarrow \quad \tfrac{1}{2}(y+1) = x$$

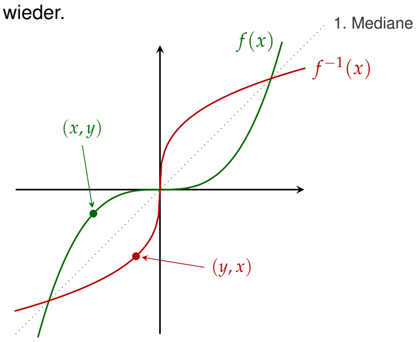
Die Umkehrfunktion lautet daher $f^{-1}(y) = \frac{1}{2}(y+1)$.
Da es üblich ist, das Argument mit x zu bezeichnen, schreiben wir

$$f^{-1}(x) = \tfrac{1}{2}(x+1)$$

Die Umkehrfunktion von $f(x) = x^3$ ist $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$.

Geometrische Interpretation

Das Vertauschen von x und y spiegelt sich auch im Graphen der Umkehrfunktion wieder.



(Graph der Funktion $f(x) = x^3$ und ihrer Inversen.)

Aufgabe 5.10

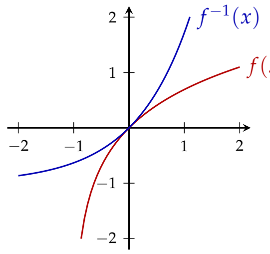
Bestimmen Sie die Inverse der Funktion

$$f(x) = \ln(1+x)$$

Zeichnen Sie den Funktionsgraphen von f und f^{-1}.

Lösung 5.10

$$f^{-1}(x) = e^x - 1$$

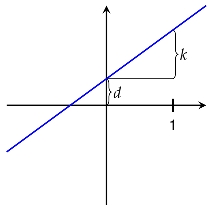


Lineare Funktion und Absolutbetrag

- **lineare Funktion**

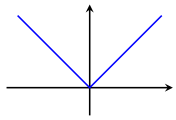
$$\boxed{f(x) = k\,x + d}$$

k ... **Steigung**
d ... **konstantes Glied**



- **Betragsfunktion**

$$\boxed{f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{für } x \geq 0 \\ -x & \text{für } x < 0 \end{cases}}$$



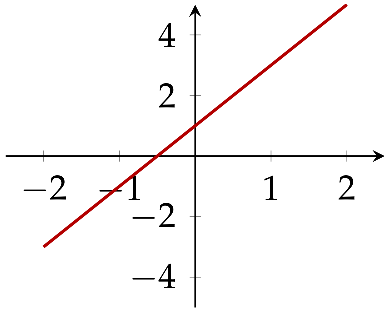
Aufgabe 5.11

Zeichnen Sie den Graphen der Funktion

$$f(x) = 2x + 1$$

im Intervall $[-2, 2]$.

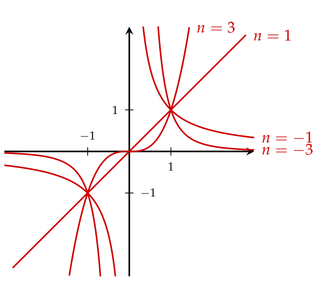
Lösung 5.11

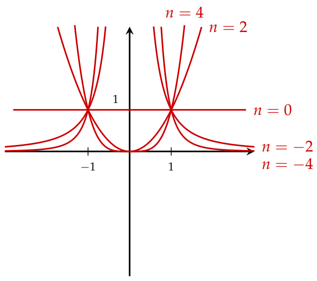


Potenzfunktion

Potenzfunktion mit ganzzahligen Exponenten:

$$\boxed{f\colon x \mapsto x^n \quad n \in \mathbb{Z}} \qquad D = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{falls } n \geq 0 \\ \mathbb{R} \setminus \{0\} & \text{falls } n < 0 \end{cases}$$

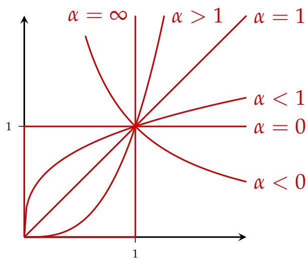




Potenzfunktion

Potenzfunktion mit reellen Exponenten:

$$\boxed{f\colon x \mapsto x^\alpha \qquad \alpha \in \mathbb{R}}$$



Aufgabe 5.12

Zeichnen Sie die Graphen der Potenzfunktion

$$f(x) = x^n$$

im Intervall $[0, 2]$ für

$$n = -4, -2, -1, -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{4}, 0, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{2}, 1, 2, 4\,.$$

Lösung 5.12

– Fehlt –

Polynome und rationale Funktionen

- **Polynome** von Grad n:

$$\boxed{f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k}$$

$a_i \in \mathbb{R}$, für $i = 1, \dots, n$
$a_n \neq 0$

- **Rationale Funktionen:**

$$\boxed{D \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{p(x)}{q(x)}}$$

$p(x)$ und $q(x)$ sind Polynome
$D = \mathbb{R} \setminus \{\text{Nullstellen von } q\}$

Aufgabe 5.13

Zeichnen Sie die Graphen folgender Funktionen im Intervall $[-2, 2]$:

(a) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$

(b) $f(x) = \dfrac{x}{x^2-1}$

(c) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1}$

(d) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2-1}$

Lösung 5.13

– Fehlt –

Exponentialfunktion

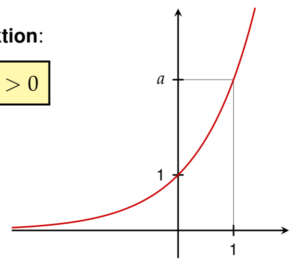
- **Exponentialfunktion**:

$$\boxed{\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+, \quad x \mapsto \exp(x) = e^x}$$

$e = 2{,}7182818\ldots$ *Eulersche Zahl*

- **Allgemeine Exponentialfunktion**:

$$\boxed{\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+, \quad x \mapsto a^x \qquad a > 0}$$



Aufgabe 5.14

Zeichnen Sie die Graphen folgender Funktionen:

(a) $f(x) = e^x$

(b) $f(x) = 3^x$

(c) $f(x) = e^{-x}$

(d) $f(x) = e^{x^2}$

(e) $f(x) = e^{-x^2}$

(f) $f(x) = e^{-1/x^2}$

(g) $\cosh(x) = (e^x + e^{-x})/2$

(h) $\sinh(x) = (e^x - e^{-x})/2$

Lösung 5.14

– Fehlt –

Logarithmusfunktion

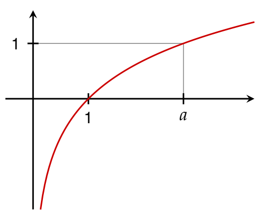
- **Logarithmusfunktion**:

Inverse Funktion zur *Exponentialfunktion*.

$$\boxed{\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \log(x) = \ln(x)}$$

- **Allgemeine Logarithmusfunktion** zur Basis a

$$\boxed{\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \log_a(x)}$$



Aufgabe 5.15

Zeichnen Sie die Funktionsgraphen folgender Funktionen:

(a) $f(x) = \ln(x)$

(b) $f(x) = \ln(x+1)$

(c) $f(x) = \ln\left(\frac{1}{x}\right)$

(d) $f(x) = \log_{10}(x)$

(e) $f(x) = \log_{10}(10x)$

(f) $f(x) = (\ln(x))^2$

Lösung 5.15

– Fehlt –

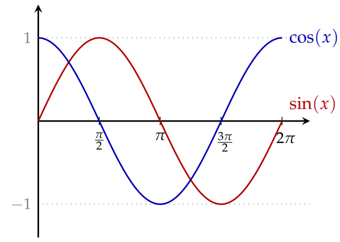
Winkelfunktionen

- **Sinusfunktion**:

$$\boxed{\mathbb{R} \to [-1,1],\; x \mapsto \sin(x)}$$

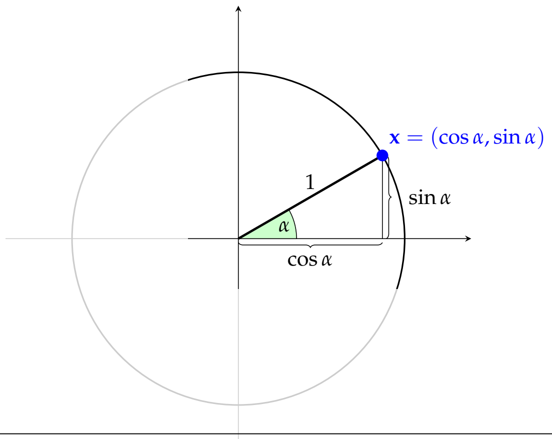
- **Cosinusfunktion**:

$$\boxed{\mathbb{R} \to [-1,1],\; x \mapsto \cos(x)}$$



Achtung!
x wird im *Bogenmaß* (*Radiant*) angegeben, d.h., ein rechter Winkel entspricht $x = \pi/2$.

Sinus und Cosinus



Sinus und Cosinus

Wichtige Formel:

Periodisch: Es gilt für alle $k \in \mathbb{Z}$

$$\boxed{\begin{aligned} \sin(x + 2k\pi) &= \sin(x) \\ \cos(x + 2k\pi) &= \cos(x) \end{aligned}}$$

Zusammenhang zwischen sin und cos:

$$\boxed{\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1}$$

Funktionen in mehreren Variablen

Eine **reelle Funktion in mehreren Variablen** ist eine Abbildung, die jedem Vektor $\mathbf{x}$ eine reelle Zahl zuordnet.

$$\boxed{f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \mathbf{x} \mapsto f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)}$$

Die Komponenten x_i des Vektors $\mathbf{x}$ heißen die **Variablen** der Funktion f.

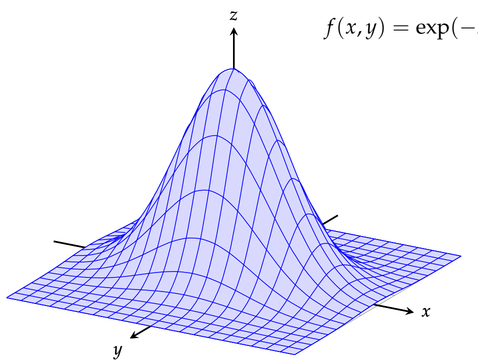
Funktionen in *zwei* Variablen lassen sich durch den **Graphen** (Funktionengebirge) veranschaulichen:

$$\mathcal{G}_f = \{(\mathbf{x}, y) \mid y = f(\mathbf{x}) \text{ für ein } \mathbf{x} \in D_f\}$$

(Der Graph einer Funktion mit vielen Variablen ist analog definiert, er dient aber nicht mehr zur Veranschaulichung.)

Graph einer bivariaten Funktion

$$f(x, y) = \exp(-x^2 - 2y^2)$$



Niveaulinien einer bivariaten Funktion

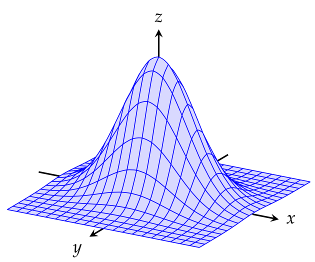
Die Menge aller Punkte (x, y) mit $f(x, y) = c$ für ein $c \in \mathbb{R}$ wird als **Niveaulinie** der Funktion f bezeichnet.

Die Funktion f hat daher auf einer Höhenlinie den gleichen Funktionswert.

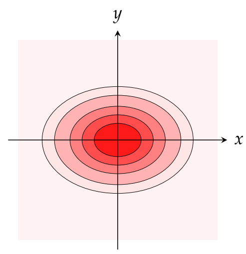
Andere Bezeichnungen:

- *Indifferenzkurve*
- *Isoquante* (Isonutzenlinie)
- *Höhenlinie*
- *Contourlinie*

Niveaulinien einer bivariaten Funktion



Graph



Niveaulinien

$$f(x, y) = \exp(-x^2 - 2y^2)$$

Aufgabe 5.16

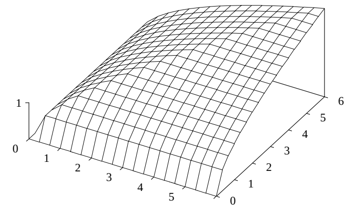
Gegeben ist die Nutzenfunktion U eines Haushalts bezüglich zweier komplementärer Güter, Gut 1 und Gut 2 (z.B. linker Schuh und rechter Schuh eines Paares).

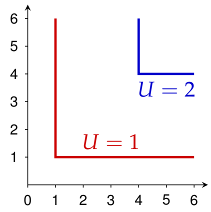
$$U(x_1, x_2) = \sqrt{\min\{x_1, x_2\}}, \quad x_1, x_2 \geq 0.$$

(a) Skizzieren Sie den Funktionsgraphen.

(b) Zeichnen Sie die Isonutzenlinien für $U = U_0 = 1$ und $U = U_1 = 2$.

Lösung 5.16





Implizite Funktionen

Indifferenzkurven sind *mathematisch* gesehen implizite Funktionen.
Der Zusammenhang zwischen zwei Variablen x und y wird durch eine Gleichung beschrieben:

$$F(x, y) = 0$$

Zum Zeichnen von *Graphen* von impliziten Funktionen kann versuchen, eine der Variablen als (explizite) Funktion der anderen auszudrücken.

Den Graphen dieser univariate Funktion können wir dann wie oben beschrieben zeichnen.

Cobb-Douglas-Funktion

Zum Zeichnen des Graphen von

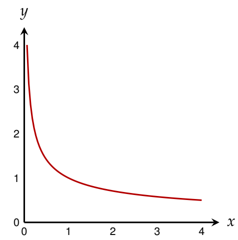
$$x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{2}{3}} = 1\,, \qquad x, y > 0,$$

können wir x durch y ausdrücken:

$$x = \frac{1}{y^2}$$

Alternativ können wir auch y durch x ausdrücken:

$$y = \frac{1}{\sqrt{x}}$$



CES-Funktion

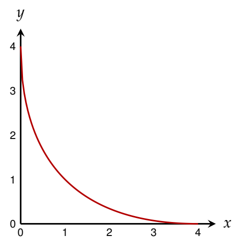
Zum Zeichnen des Graphen von

$$\left(x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}\right)^2 = 4\,, \qquad x, y > 0,$$

können wir y durch x ausdrücken:

$$y = \left(2 - x^{\frac{1}{2}}\right)^2$$

(Achten Sie auf den Definitionsbereich!)



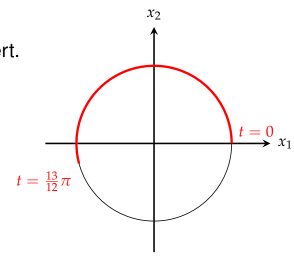
Weg

Eine Funktion

$$\boxed{s\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n,\ t \mapsto s(t) = \begin{pmatrix} s_1(t) \\ \vdots \\ s_n(t) \end{pmatrix}}$$

heißt ein **Weg** (oder *Pfad*) im $\mathbb{R}^n$.
Die Variable t wird oft als *Zeit* interpretiert.

$$[0, \infty) \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$$



Aufgabe 5.17

Skizzieren Sie folgende Wege:

(a) $s\colon [0, \infty) \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$

(b) $s\colon [0, \infty) \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(2\pi t) \\ \sin(2\pi t) \end{pmatrix}$

(c) $s\colon [0, \infty) \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto \begin{pmatrix} t\,\cos(2\pi t) \\ t\,\sin(2\pi t) \end{pmatrix}$

Lösung 5.17

– Fehlt –

Vektorwertige Funktion

Allgemeine vektorwertige Funktionen:

$$\mathbf{f}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m,\ \mathbf{x} \mapsto \mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} f_1(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ f_m(\mathbf{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}$$

- Univariate Funktionen:
  $\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto y = x^2$
- Multivariate Funktionen:
  $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ \mathbf{x} \mapsto y = x_1^2 + x_2^2$
- Wege:
  $[0,1) \to \mathbb{R}^n,\ s \mapsto (s, s^2)^t$
- Lineare Abbildungen:
  $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m,\ \mathbf{x} \mapsto \mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ $\quad\quad$ $\mathbf{A} \dots\ m \times n$-Matrix