

Kapitel 4

Folgen und Reihen

Folgen

Eine **Folge** ist eine Anordnung von reellen Zahlen. Die einzelnen *Zahlen* heißen **Glieder** der Folge.

Formal: Eine **Folge** ist eine *Abbildung*

$$a: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, n \mapsto a_n$$

Folgen werden mit $\langle a_i \rangle_{i=1}^n$ oder kurz $\langle a_i \rangle$ bezeichnet.

Auch: $(a_i)_{i=1}^n$ bzw. (a_i) .

Folgen

Folgen können definiert werden

- ▶ durch **Aufzählen** der Glieder,
- ▶ durch Angabe eines **Bildungsgesetzes** oder
- ▶ durch **Rekursion**.
Jedes Folgenglied wird durch seine(n) Vorgänger bestimmt.

Aufzählung: $\langle a_i \rangle = \langle 1, 3, 5, 7, 9, \dots \rangle$

Bildungsgesetz: $\langle a_i \rangle = \langle 2i - 1 \rangle$

Rekursion: $\langle a_i \rangle, a_1 = 1, a_{i+1} = a_i + 2$

Eigenschaften

Charakteristische Eigenschaften von Folgen $\langle a_i \rangle$:

Bezeichnung	Definition
monoton steigend	$a_{i+1} \geq a_i$ für alle $i \in \mathbb{N}$
monoton fallend	$a_{i+1} \leq a_i$
alternierend	$a_{i+1} \cdot a_i < 0$, d.h. das Vorzeichen wechselt.
beschränkt	$ a_i \leq M$, für ein $M \in \mathbb{R}$.

Die Folge $\langle \frac{1}{n} \rangle$ ist

- ▶ **monoton fallend**, und
- ▶ **beschränkt**, da für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, dass $|a_n| = |1/n| \leq 1$ gilt.
(Wir hätten auch $M = 1000$ wählen können.)
- ▶ Sie ist aber *nicht* alternierend.

Reihen

Die Summe der ersten k Elemente der $\langle a_i \rangle$

$$s_k = \sum_{i=1}^k a_i$$

heißt die k -te **Teilsumme** (oder **Partialsomme**) der Folge

Die Folge $\langle s_k \rangle$ aller Teilsummen einer Folge $\langle a_i \rangle$ heißt die **Reihe** der Folge $\langle a_i \rangle$.

Die Reihe der Folge $\langle a_i \rangle = \langle 2i - 1 \rangle$ lautet

$$\langle s_k \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^k (2i - 1) \right\rangle = \langle 1, 4, 9, 16, 25, \dots \rangle = \langle k^2 \rangle.$$

Aufgabe 4.1

Berechne die ersten fünf Partialsummen der Folgen und stellen Sie diese graphisch dar:

- (a) $2n$
- (b) $\frac{1}{2+n}$
- (c) $2^n/10$

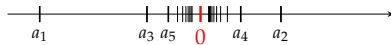
Lösung 4.1

- (a) $\langle 2, 6, 12, 20, 30 \rangle$;
- (b) $\langle 0,333; 0,583; 0,783; 0,95; 1,093 \rangle$;
- (c) $\langle 1,072; 2,220; 3,452; 4,771; 6,185 \rangle$.

Grenzwert einer Folge

Betrachten wir die Folge von Zahlen

$$(a_n)_{n=1}^{\infty} = \left((-1)^n \frac{1}{n} \right)_{n=1}^{\infty} = \left(-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \dots \right)$$



Die Folgenglieder „streben“ mit wachsendem n gegen 0.
Wir sagen, die Folge (a_n) **konvergiert** gegen 0.

Wir schreiben dafür

$$(a_n) \rightarrow 0 \quad \text{oder} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

Grenzwert einer Folge / Definition

Definition:

Eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ heißt **Grenzwert** (Limes) einer Folge (a_n) , wenn es für jedes noch so kleine Intervall $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ ein N gibt, sodass $a_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ für alle $n \geq N$.

M.a.W.: alle Folgenglieder ab a_N liegen im Intervall.

Äquivalente Formulierung:

Eine Folge (a_n) konvergiert gegen den Grenzwert $a \in \mathbb{R}$, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein N existiert, sodass $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$.

[Mathematiker verwenden gerne ε für eine ganz kleine positive Zahl.]

Eine Folge, die einen Grenzwert besitzt, heißt **konvergent**.

Sie **konvergiert** gegen ihren Grenzwert.

Nicht jede Folge besitzt einen Grenzwert.

So eine Folge heißt **divergent**.

Grenzwert / Beispiele

Im Beispiel

$$(a_n)_{n=1}^{\infty} = \left((-1)^n \frac{1}{n} \right)_{n=1}^{\infty} = \left(-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \dots \right)$$

ist $a = 0$.

Falls $\varepsilon = 0,3$ dann liegen alle Folgenglieder ab a_4 im Intervall $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$.

Falls $\varepsilon = \frac{1}{1000000}$ dann liegen alle Folgenglieder ab dem 1 000 001-ten Glied in diesem Intervall.

Daher

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0.$$

Grenzwert / Beispiele

Die Folge $(a_n)_{n=1}^{\infty} = \left(\frac{1}{2^n} \right)_{n=1}^{\infty} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots \right)$ konvergiert gegen 0:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

Die Folge $(b_n)_{n=1}^{\infty} = \left(\frac{n-1}{n+1} \right)_{n=1}^{\infty} = \left(0, \frac{1}{3}, \frac{2}{4}, \frac{3}{5}, \frac{4}{6}, \dots \right)$ ist konvergent:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1$$

Die Folge $(c_n)_{n=1}^{\infty} = \left((-1)^n \right)_{n=1}^{\infty} = (-1, 1, -1, 1, \dots)$ ist divergent.

Die Folge $(d_n)_{n=1}^{\infty} = (2^n)_{n=1}^{\infty} = (2, 4, 8, 16, 32, \dots)$ ist divergent, strebt aber gegen ∞ . Man schreibt daher (nicht ganz korrekt):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = \infty$$

Grenzwerte wichtiger Folgen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^a = \begin{cases} 0 & \text{für } a < 0 \\ 1 & \text{für } a = 0 \\ \infty & \text{für } a > 0 \end{cases}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \begin{cases} 0 & \text{für } |q| < 1 \\ 1 & \text{für } q = 1 \\ \infty & \text{für } q > 1 \\ \nexists & \text{für } q \leq -1 \end{cases}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^a}{q^n} = \begin{cases} 0 & \text{für } |q| > 1 \\ \infty & \text{für } 0 < q < 1 \\ \nexists & \text{für } -1 < q < 0 \end{cases} \quad (|q| \notin \{0, 1\})$$

Rechenregeln

Seien $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ und $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergente Folgen mit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ und

$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$; und $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ eine beschränkte Folge.

- (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} (k \cdot a_n + d) = k \cdot a + d$
- (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b$
- (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$
- (4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$ für $b \neq 0$
- (5) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot c_n) = 0$ falls $a = 0$
- (6) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^k = a^k$

Rechenregeln / Beispiele

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{3}{n^2} \right) = 2 + 3 \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-2}}_{=0} = 2 + 3 \cdot 0 = 2$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (2^{-n} \cdot n^{-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{-1}}{2^n} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{n}}{2 - \frac{3}{n^2}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})}{\lim_{n \rightarrow \infty} (2 - \frac{3}{n^2})} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\sin(n)}_{\text{beschränkt}} \cdot \underbrace{\frac{1}{n^2}}_{\rightarrow 0} = 0$$

Rechenregeln

Achtung

Wir müssen beim Anwenden dieser Rechenregeln darauf achten, dass wir keine Ausdrücke der Form $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$ oder $0 \cdot \infty$ erhalten.

Diese Ausdrücke sind **nicht definiert!**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 1}{n^2 - 1} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 + 1}{\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 - 1} = \frac{\infty}{\infty} \quad (\text{nicht definiert})$$

Trick: Kürzen durch die *höchste vorkommende Potenz im Nenner*.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 1}{n^2 - 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2} \cdot \frac{1 + n^{-2}}{1 - n^{-2}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 1 + n^{-2}}{\lim_{n \rightarrow \infty} 1 - n^{-2}} = \frac{1}{1} = 1$$

Die Eulersche Zahl

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e = 2,7182818284590\dots$$

Dieser Grenzwert ist in der Finanzmathematik wichtig (stetige Verzinsung).

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n/x}\right)^n \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{mx} && \left(m = \frac{n}{x}\right) \\ &= \left(\lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m\right)^x = e^x \end{aligned}$$

Aufgabe 4.2

Berechne die folgenden Grenzwerte:

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(7 + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) =$

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^3 - 6n^2 + 3n - 1}{7n^3 - 16}\right) =$

(c) $\lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 - (-1)^n n^3) =$

(d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 + 1}{n + 1}\right) =$

(e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n \bmod 10}{(-2)^n}\right) =$

Lösung 4.2

- (a) 7;
- (b) $\frac{2}{7}$;
- (c) unbestimmt divergent;
- (d) bestimmt divergent gegen ∞ ;
- (e) 0.

Aufgabe 4.3

Bestimme die folgenden Grenzwerte:

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{nx} =$

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n =$

(c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{nx}\right)^n =$

Lösung 4.3

- (a) e^x ;
- (b) e^x ;
- (c) $e^{1/x}$.

Arithmetische Folge

Bildungsgesetz:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$$

Differenz aufeinander folgender Glieder ist konstant:

$$a_{n+1} - a_n = d$$

Jedes Glied ist das *arithmetische Mittel* seiner Nachbarglieder:

$$a_n = \frac{1}{2}(a_{n+1} + a_{n-1})$$

Arithmetische Reihe:

$$s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

Geometrische Folge

Bildungsgesetz:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Quotient aufeinander folgender Glieder ist konstant:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$$

Jedes Glied ist das *geometrische Mittel* seiner Nachbarglieder:

$$a_n = \sqrt{a_{n+1} \cdot a_{n-1}}$$

Geometrische Reihe:

$$s_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \quad \text{für } q \neq 1$$

Fehlerquelle

Es ist manchmal üblich, bei Folgen und Reihen bei 0 anstatt bei 1 zu zählen zu beginnen.

Bildungsgesetze und Summenformel für die arithmetische Folge lauten dann

$$a_n = a_0 + n \cdot d \quad \text{bzw.} \quad s_n = \frac{n+1}{2}(a_0 + a_n)$$

und für die geometrische Folge

$$a_n = a_0 \cdot q^n \quad \text{bzw.} \quad s_n = a_0 \cdot \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} \quad (\text{für } q \neq 1)$$

Aufgabe 4.4

$\langle a_n \rangle$ sei eine geometrische Folge mit $a_1 = 2$ und relativer Zuwachsrate 0,1. Wie lautet das Bildungsgesetz von $\langle a_n \rangle$ und wie lautet a_7 ?

Lösung 4.4

$$a_n = 2 \cdot 1,1^{n-1};$$
$$a_7 = 3,543.$$

Aufgabe 4.5

Berechnen Sie die ersten 10 Partialsummen der arithmetischen Reihe für

(a) $a_1 = 0$ und $d = 1$,

(b) $a_1 = 1$ und $d = 2$.

Lösung 4.5

(a) $\langle s_n \rangle = \left\langle \frac{n(n-1)}{2} \right\rangle = \langle 0, 1, 3, \dots, 45 \rangle;$

(b) $\langle s_n \rangle = \langle n^2 \rangle = \langle 1, 4, 9, \dots, 100 \rangle.$

Aufgabe 4.6

Berechne $\sum_{n=1}^N a_n$ für

(a) $N = 7$ und $a_n = 3^{n-2}$

(b) $N = 7$ und $a_n = 2(-1/4)^n$

Lösung 4.6

(a) $s_7 = \frac{1}{3} \cdot \frac{3^7-1}{3-1} = 364,33;$

(b) $s_7 = -\frac{1}{2} \cdot \frac{(-1/4)^7-1}{-1/4-1} = -0,400.$

Endwert (nachsüssig)

Eine Zahlung, die in gleicher Höhe in regelmäßigen Abständen erfolgt, heißt eine **Rente**.

Wird die Rente jeweils zum Ende einer Periode bezahlt, so heißt sie **nachsüssig**

Der **Endwert** ist die Summe aller Zahlungen auf den *Endzeitpunkt* der Rente *aufgezinst*:

$$E_n = \underbrace{R \cdot q^{n-1}}_{\text{erste Zahlung}} + \underbrace{R \cdot q^{n-2}}_{\text{zweite Zahlung}} + \dots + \underbrace{R \cdot q^0}_{\text{letzte Zahlung}}$$
$$= \sum_{k=1}^n Rq^{k-1} = R \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

wobei R die Rente, q der Aufzinsungsfaktor und n die Anzahl der Zahlungen ist.

Barwert (nachsüssig)

Der **Barwert** die Summe aller Rentenzahlungen auf den *Beginn* der Rente *abgezinst*.

$$B_n = \frac{E_n}{q^n} = R \cdot \frac{q^n - 1}{q^n(q - 1)}$$

wobei R die Rente, q der Aufzinsungsfaktor und n die Anzahl der Zahlungen ist.

Aufgabe 4.7

Die **ewige Rente** wird *unendlich* oft (und lang) gezahlt.
Ihr Endwert ist immer unendlich.

Berechne ihren Barwert.

(Wir nehmen hier – wie vor der Finanzkrise üblich – an, dass der Zinssatz positiv ist.)

Lösung 4.7

$$\text{Grenzwert: } B_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} B_n = \lim_{n \rightarrow \infty} R \cdot \frac{q^n - 1}{q^n(q-1)} = \frac{R}{q-1}.$$

Aufgabe 4.8

Bei der Tilgung von Darlehen muss der Barwert der Tilgungszahlungen der ursprünglichen Darlehenssumme entsprechen.

Berechne die Tilgungsraten X eines Kredits bei konstanten Rückzahlungsraten.

Dabei sei K die Kredithöhe, p der Zinssatz, und n die Laufzeit des Kredits (Anzahl der Zahlungen).

Lösung 4.8

$$K = B_n = X \cdot \frac{q^n - 1}{q^n(q-1)} \text{ impliziert } X = K \cdot q^n \frac{q-1}{q^n - 1}.$$

Aufgabe 4.9

Berechne bei gegebener Kredithöhe K , Zinssatz p und maximaler Tilgungszahlung X die Mindestlaufzeit n des Kredits.

Lösung 4.9

$$n = \frac{\ln X - \ln(X - K(q-1))}{\ln q}. \text{ Achtung: es muss immer aufgerundet werden.}$$