Kapitel 3

Gleichungen und Ungleichungen

Gleichung

Eine **Gleichung** erhalten wir durch **Gleichsetzen** zweier Terme.

$\boxed{\textit{linke Seite} = \textit{rechte Seite}}$

- **Grundmenge**: Menge aller Zahlen, die wir als Lösung der Gleichung zulassen. (Im folgenden: $\mathbb{R}$ oder $[0, \infty)$)
- **Definitionsbereich**: Durchschnitt aller Definitionsmengen der Terme der Gleichung.
- **Lösungsmenge**: Menge aller Zahlen aus dem Definitionsbereich, die diese Gleichung erfüllen.

Äquivalenzumformung

Zum Lösen einer Gleichung versuchen wir die gesuchte Größe durch **Äquivalenzumformung** auf einer Seite der Gleichung zu isolieren.

- Addieren oder Subtrahieren einer Zahl oder eines beliebigen Term auf beiden Seiten der Gleichung
- Multiplizieren beider Seiten mit einer Zahl oder Term **ungleich** Null.
- Dividieren beider Seiten durch eine Zahl oder Term **ungleich** Null.
- Logarithmieren oder Exponenzieren beider Seiten.

Fehlerquellen

Achtung!
Beim Logarithmieren muss darauf geachtet werden, dass beide Seiten größer Null sind.

Achtung!
Ein Term, der die gesuchte Variable enthält, kann auch Null werden.

- Beim Multiplizieren erhält man möglicherweise eine zusätzliche falsche "Lösung".
- Beim Dividieren verliert man möglicherweise eine Lösung.

Achtung!
Beim Kürzen eines Bruchterms muss darauf geachtet werden, dass die Nullstellen des Nenners nicht zum Definitionsbereich des Bruchterms gehören.

Multiplizieren

Durch Multiplizieren von

$$\frac{x^2+x-2}{x-1} = 1$$

mit $(x-1)$ erhalten wir

$$x^2+x-2 = x-1$$

mit der Lösungsmenge $L = \{-1, 1\}$.

$x = 1$ ist aber nicht im Definitionsbereich von $\frac{x^2+x-2}{x-1}$ und daher keine Lösung der (ursprünglichen) Gleichung.

Dividieren

Wenn wir die Gleichung

$$(x-1)(x-2) = 0 \qquad \text{(Lösungsmenge } L = \{1,2\}\text{)}$$

durch $(x-1)$ dividieren erhalten wir die Gleichung

$$x-2 = 0 \qquad \text{(Lösungsmenge } L = \{2\}\text{)}$$

Die Lösung $x = 1$ geht durch das Dividieren „verloren".

Dividieren

Achtung
Beim Dividieren ist eine Fallunterscheidung durchzuführen:

1. Fall: Die Division ist erlaubt (der Divisor ist **ungleich** Null).
2. Fall: Die Division ist nicht erlaubt (der Divisor ist **gleich** Null).

Lösung von $(x-1)(x-2) = 0$:
Fall $x-1 \neq 0$: Wir erhalten durch Dividieren die Lösung $x_1 = 2$.
Fall $x-1 = 0$: Daraus folgt die Lösung $x_2 = 1$.

Wir werden später noch eine bessere Methode für diese Gleichung kennen lernen.

Dividieren

$$\begin{cases} x\,y - x = 0 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases}$$

Erste Gleichung:
Addition und Division ergibt

$$x\,y = x \rightsquigarrow y = \frac{x}{x} = 1$$

Und daher $x = \pm 1$.
Vermeintliche Lösungsmenge $L = \{(-1,1), (1,1)\}$.

Aber: Division ist nur erlaubt, falls $x \neq 0$ ist.

$x = 0$ erfüllt aber ebenfalls die erste Gleichung.
Tatsächliche Lösungsmenge $L = \{(-1,1), (1,1), (0,\sqrt{2}), (0,-\sqrt{2})\}$.

Faktorisieren

Es ist oft besser einen Term zu *Faktorisieren* anstatt zu Dividieren.

$$\begin{cases} x\,y - x = 0 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases}$$

Erste Gleichung $\quad x \cdot (y-1) = 0 \quad$ impliziert

$$x = 0 \quad \textit{oder} \quad y - 1 = 0 \quad \text{(oder beides)}.$$

Fall $x = 0$: $\quad y = \pm\sqrt{2}$

Fall $y - 1 = 0$: $\quad y = 1$ und $x = \pm 1$.

Lösungsmenge $L = \{(-1,1), (1,1), (0,\sqrt{2}), (0,-\sqrt{2})\}$.

Verifizieren

Wenn eine (angebliche) Lösung einer Gleichung vorliegt, ist es meist einfach diese durch *Einsetzen* zu verifizieren (“**Probe**”).

Wenn Sie unsicher sind, machen Sie die Probe.

Hinweis:
Falls Sie in einer Aufgabe eine angegebene Lösung verifizieren sollen, machen sie einfach die Probe.

Aufgabe 3.1

Wie müssen die Konstanten a, b und c gewählt werden, damit die folgenden Gleichungen für alle x erfüllt sind:

(a) $\dfrac{x}{1+x} - \dfrac{2}{2-x} = -\dfrac{2a+bx+cx^2}{2+x-x^2}$

(b) $\dfrac{x^2+2x}{x+2} - \dfrac{x^2+3}{x+3} = \dfrac{a(x-b)}{x+c}$

Lösung 3.1

(a) $a = 1$, $b = 0$, $c = 1$;
(b) $a = 3$, $b = 1$, $c = 3$.

Lineare Gleichung

Lineare Gleichungen enthalten nur *lineare Terme* und sind (fast) immer lösbar.

Aus der Barwertformel für eine nachschüssige Rente

$$B_n = R \cdot \frac{q^n - 1}{q^n(q-1)}$$

soll die Rente R ausgedrückt werden. Da R nur in 1. Potenz vorkommt, müssen wir eine lineare Gleichung lösen.
Durch Division durch die Konstante $\frac{q^n-1}{q^n(q-1)}$ $(\neq 0)$ erhalten wir als Lösung:

$$R = B_n \cdot \frac{q^n(q-1)}{q^n - 1}$$

Betragsgleichung

Eine Gleichung mit Absolutbetrag können wir als eine Abkürzung für zwei Gleichungen sehen:

$$\boxed{|x| = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1 \text{ oder } -x = 1}$$

Lösung von $\quad |2x-3| = |x+1|$.

Alle Lösungen von jeder der beiden Gleichungen:

$$\begin{aligned} (2x-3) &= (x+1) \qquad \Rightarrow\ x = 4 \\ -(2x-3) &= (x+1) \qquad \Rightarrow\ x = \tfrac{2}{3} \end{aligned}$$

(Die Gleichungen $-(2x-3) = -(x+1)$ und $(2x-3) = -(x+1)$ sind äquivalent.)

Die Lösungsmenge lautet daher $L = \left\{\frac{2}{3}, 4\right\}$.

Aufgabe 3.2

Lösen Sie die folgenden Gleichungen:

(a) $|x(x-2)| = 1$

(b) $|x+1| = \dfrac{1}{|x-1|}$

(c) $\left|\dfrac{x^2-1}{x+1}\right| = 2$

Lösung 3.2

(a) $\{1-\sqrt{2}, 1, 1+\sqrt{2}\}$;
(b) $\{-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}\}$;
(c) $\{3\}$ (-1 nicht im Definitionsbereich).

Gleichungen mit Exponenten

Wenn die gesuchte Variable im Exponenten lassen sich (manchmal) durch Logarithmieren lösen:

- Der Term mit der Variable wird auf einer Seite der Gleichung isoliert. Er darf dabei keine Addition enthalten.
- Durch **Logarithmieren** beider Seiten erhalten wir dann die gesuchte Lösung.

Lösung der Gleichung $2^x = 32$.
Durch Logarithmieren beider Seiten erhalten wir

$$\begin{aligned} & 2^x = 32 \\ \Leftrightarrow\ & \ln(2^x) = \ln(32) \\ \Leftrightarrow\ & x\,\ln(2) = \ln(32) \\ \Leftrightarrow\ & x = \tfrac{\ln(32)}{\ln(2)} = 5 \end{aligned}$$

Gleichungen mit Exponenten

Aus der Formel für die Kreditrate

$$X = K \cdot q^n \frac{q-1}{q^n-1}$$

soll die Dauer n eines Kredits bei vorgegebener Kredithöhe K, Kreditrate X und Aufzinsungsfaktor q berechnet werden.

$$\begin{aligned} X &= K \cdot q^n \tfrac{q-1}{q^n-1} && | \cdot (q^n-1) \\ X\,(q^n-1) &= K\,q^n\,(q-1) && | - K\,q^n\,(q-1 \\ q^n\,(X - K(q-1)) - X &= 0 && | + X \\ q^n\,(X-K(q-1)) &= X && | : (X - K(q - \\ q^n &= \tfrac{X}{X-K(q-1)} && |\ \ln \\ n\,\ln(q) &= \ln(X) - \ln(X-K(q-1)) && | : \ln(q) \\ n &= \tfrac{\ln(X)-\ln(X-K(q-1))}{\ln(q)} \end{aligned}$$

Gleichungen mit Logarithmen

Gleichungen mit Logarithmen lassen sich (manchmal) durch Exponenzieren beider Seiten lösen.

Die Lösung von $\ln(x+1) = 0$ erhalten wir durch Exponenzieren beider Seiten der Gleichung.

$$\begin{aligned} & \ln(x+1) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & e^{\ln(x+1)} = e^0 \\ \Leftrightarrow\ & x+1 = 1 \\ \Leftrightarrow\ & x = 0 \end{aligned}$$

Aufgabe 3.3

Lösen Sie die folgenden Gleichungen:

(a) $2^x = 3^{x-1}$

(b) $3^{2-x} = 4^{\frac{x}{2}}$

(c) $2^x 5^{2x} = 10^{x+2}$

(d) $2 \cdot 10^{x-2} = 0{,}1^{3x}$

(e) $\frac{1}{2^{x+1}} = 0{,}2^x 10^4$

(f) $(3^x)^2 = 4 \cdot 5^{3x}$

Lösung 3.3

(a) $x = \frac{\ln 3}{\ln 3 - \ln 2} \approx 2{,}710$;
(b) $x = \frac{\ln 9}{\ln 6} \approx 1{,}226$;
(c) $x = \frac{\ln 100}{\ln 5} \approx 2{,}861$;
(d) $x = \frac{\ln 50}{4 \ln 10} \approx 0{,}425$;
(e) $x = -\frac{\ln 2 + 4 \ln 10}{\ln 0{,}4} \approx 10{,}808$;
(f) $x = \frac{\ln 4}{\ln 9 - \ln 125} \approx -0{,}527$.

Aufgabe 3.4

Lösen Sie die Gleichung

$$\ln\left(x^2\left(x - \frac{7}{4}\right) + \left(\frac{x}{4} + 1\right)^2\right) = 0$$

Lösung 3.4

$x_1 = 0$,
$x_2 = \frac{27}{32} + \frac{\sqrt{217}}{32} \approx 1{,}304$,
$x_3 = \frac{27}{32} - \frac{\sqrt{217}}{32} \approx 0{,}383$.

Potenzgleichung

Gleichungen, die **nur eine** *ganzzahlige* Potenz der gesuchten Variable enthalten, lassen sich durch **Wurzelziehen** lösen.

Achtung
Achten Sie bitte darauf, dass im Falle einer geraden Potenz die Gleichung (in $\mathbb{R}$) nicht immer lösbar, oder die Lösung nicht immer eindeutig ist. Im Falle einer ungeraden Potenz ist die Gleichung (in $\mathbb{R}$) immer eindeutig lösbar.

Die Lösungsmenge von $x^2 = 4$ lautet $L = \{-2, 2\}$.

Die Gleichung $x^2 = -4$ hat keine (reelle) Lösung.

Die Lösungsmenge von $x^3 = -8$ ist $L = \{-2\}$.

Wurzelgleichungen

Wurzelgleichungen lassen sich lösen, indem wir beide Seiten quadrieren oder potenzieren.

Die Lösung von $\sqrt[3]{x-1} = 2$ erhalten wir durch Potenzieren:

$$\sqrt[3]{x-1} = 2 \quad \Leftrightarrow \quad x-1 = 2^3 \quad \Leftrightarrow \quad x = 9$$

Quadratwurzel

Bei Wurzelgleichungen mit geraden Radices (z.B. Quadratwurzel) stellt das Potenzieren keine Äquivalenzumformung dar.

Aus der „Nicht-Gleichung" $-3 \neq 3$ wird durch Quadrieren die Gleichung $(-3)^2 = 3^2$.

Wir könnten (wie beim Multiplizieren mit einem Term) eine „zusätzliche Lösung" erzeugen.

Der Definitionsbereich der Gleichung ist meist nur mehr eine kleine Teilmenge der reellen Zahlen:
Der Radikand unter der Wurzel darf nicht negativ sein darf.

Quadratwurzel

Achtung!

Wir müssen bei Wurzelgleichungen daher **immer** eine *Probe* durchführen.

Quadratwurzel

Wir wollen die Gleichung $\sqrt{x-1} = 1 - \sqrt{x-4}$ lösen.

Die Definitionsmenge ist $D = \{x | x \geq 4\}$.

Durch Quadrieren erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\sqrt{x-1} &= 1 - \sqrt{x-4} && |^2 \\
x-1 &= 1 - 2\cdot\sqrt{x-4} + (x-4) && |-x+3 \quad |:2 \\
1 &= -\sqrt{x-4} && |^2 \\
1 &= x-4 \\
x &= 5
\end{aligned}$$

Die Probe ergibt aber $\sqrt{5-1} = 1 - \sqrt{5-4} \quad \Leftrightarrow \quad 2 = 0$,
eine **falsche** Aussage. Die Lösungsmenge ist daher $L = \emptyset$.

Aufgabe 3.5

Lösen Sie die folgenden Gleichungen:

(a) $\sqrt{x+3} = x+1$

(b) $\sqrt{x-2} = \sqrt{x+1} - 1$

Lösung 3.5

(a) 1, (-2 erfüllt nicht die Wurzelgleichung);
(b) 3.

Quadratische Gleichung

Eine **quadratische Gleichung** ist eine Gleichung der Form

$$a\,x^2 + b\,x + c = 0 \qquad \text{Lösungen: } x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

bzw. in Standardform

$$x^2 + p\,x + q = 0 \qquad \text{Lösungen: } x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Nullstellen von Polynomen

Quadratische Gleichungen sind ein Spezialfall von **algebraischen Gleichungen** n-ter Ordnung

$$P_n(x) = 0$$

wobei $P_n(x)$ ein Polynom vom Grad n ist.

Für die Lösungen von Gleichungen 3. Grades (*kubische Gleichungen*) und 4. Grades gibt es allgemeine Verfahren, die aber sehr aufwendig sind.

Für Polynome ab dem 5. Grad kann man beweisen, dass keine derartigen Verfahren existieren.

Nullstellen von Polynomen

Polynomgleichungen lassen sich schrittweise durch *Abspalten von Linearfaktoren* (durch Division, oder mittels Horner-Schema) lösen:

1. Wir suchen eine Nullstelle x_1 von $P_n(x)$
(z.B. durch gezieltes Ausprobieren (Satz von Vieta), oder mit dem Newton-Verfahren)

2. Mit $(x - x_1)$ erhalten wir einen Linearfaktor von $P_n(X)$.

3. $P_n(x) : (x - x_1)$ ergibt ein Polynom $P_{n-1}(x)$ von Grad $n - 1$.

4. Falls $n - 1 = 2$ erhalten wir eine quadratische Gleichung.
Andernfalls gehe zu Schritt 1.

Nullstellen von Polynomen

Wir suchen die Lösungen von

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0.$$

Durch Ausprobieren erhalten wir die Lösung $x_1 = 1$.

Wir dividieren nun durch den Linearfaktor $(x - 1)$ und erhalten:

$$(x^3 - 6x^2 + 11x - 6) : (x - 1) = x^2 - 5x + 6$$

Die quadratische Gleichung $x^2 - 5x + 6 = 0$ hat die Lösungen $x_2 = 2$, $x_3 = 3$.

Die Lösungsmenge lautet daher $L = \{1, 2, 3\}$.

Nullstellen eines Produkts

Ein *Produkt* zweier (oder mehrerer) Terme $f(x) \cdot g(x)$ wird genau dann Null, wenn mindestens ein Faktor gleich Null ist, also

$$f(x) = 0 \quad \textit{oder} \quad g(x) = 0 \quad \text{(oder beides).}$$

Die Gleichung $x^2 \cdot (x - 1) \cdot e^x = 0$ ist genau dann erfüllt, wenn

- $x^2 = 0 \quad (\Rightarrow x = 0)$ *oder*
- $x - 1 = 0 \quad (\Rightarrow x = 1)$ *oder*
- $e^x = 0$ (keine Lösung).

Die Lösungsmenge dieser Gleichung lautet daher $L = \{0, 1\}$.

Nullstellen eines Produkts

Achtung

Wenn ein Polynom bereits als Produkt zweier oder mehrerer Faktoren vorliegt, dann sollte man der Versuchung widerstehen, dieses Produkt auszumultiplizieren.

Die Nullstellen von

$$(x - 1) \cdot (x + 2) \cdot (x - 3) = 0$$

sind offensichtlich, jene von

$$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$$

hingegen nicht.

Aufgabe 3.6

Berechnen Sie die Nullstellen und zerlegen Sie in Linearfaktoren:

(a) $f(x) = x^2 + 4x + 3$

(b) $f(x) = 3x^2 - 9x + 2$

(c) $f(x) = x^3 - x$

(d) $f(x) = x^3 - 2x^2 + x$

(e) $f(x) = (x^2 - 1)(x - 1)^2$

Lösung 3.6

(a) $(x + 1)(x + 3)$;
(b) $3\left(x - \frac{9+\sqrt{57}}{6}\right)\left(x - \frac{9-\sqrt{57}}{6}\right)$
(c) $x(x + 1)(x - 1)$;
(d) $x(x + 1)^2$;
(e) $(x + 1)(x - 1)^3$.

Aufgabe 3.7

Lösen Sie nach y und nach x auf:

(a) $xy + x - y = 0$

(b) $3xy + 2x - 4y = 1$

(c) $x^2 - y^2 + x + y = 0$

(d) $x^2y + xy^2 - x - y = 0$

(e) $x^2 + y^2 + 2xy = 4$

(f) $9x^2 + y^2 + 6xy = 25$

(g) $4x^2 + 9y^2 = 36$

(h) $4x^2 - 9y^2 = 36$

(i) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$

Lösung 3.7

Die meisten Lösungen erhalten wir durch Einsetzen in die Formel für quadratische Gleichungen oder durch Umformen (Faktorisieren) der Gleichungen (in eckigen Klammern [...]).
(a) $x = \frac{y}{y+1}$, $y = \frac{x}{1-x}$, $[x(y + 1) = y$ bzw. $y(x - 1) = -x]$;
(b) $x = \frac{4y+1}{3y+2}$, $y = \frac{1-2x}{3x-4}$, $[x(3y + 2) = 1 + 4y$ bzw. $y(3x - 4) = 1 - 2x]$;
(c) $x = y - 1$ und $x = -y$, bzw. $y = x + 1$ und $y = -x$, $[(x - y + 1)(x + y) = 0]$;
(d) $x = -y$ und $x = \frac{1}{y}$, bzw. $y = -x$ und $y = \frac{1}{x}$, $[(x + y) \cdot (xy - 1) = 0]$;
(e) $x = 2 - y$ und $x = -2 - y$, bzw. $y = 2 - x$ und $y = -2 - x$, $[(x + y)^2 = 4]$;
(f) $x = -\frac{1}{3}y + \frac{5}{3}$ und $x = -\frac{1}{3}y - \frac{5}{3}$, bzw. $y = 5 - 3x$ und $y = -5 - 3x$, $[(3x + y)^2 = 25]$;

Lösung 3.7 / 2

(g) $x = \pm\frac{3}{2}\sqrt{4-y^2}$, $y = \pm\frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}$;
(h) $x = \pm\frac{3}{2}\sqrt{4+y^2}$, $y = \pm\frac{2}{3}\sqrt{x^2-9}$;
(i) $x = y - 2\sqrt{y} + 1$, $y = x - 2\sqrt{x} + 1$.

Aufgabe 3.8

Lösen Sie nach y und nach x auf:

(a) $xy^2 + yx^2 = 6$

(b) $xy^2 + (x^2-1)y - x = 0$

(c) $\frac{x}{x+y} = \frac{y}{x-y}$

(d) $\frac{y}{y+x} = \frac{y-x}{y+x^2}$

(e) $\frac{1}{y-1} = \frac{y+x}{2y+1}$

(f) $\frac{yx}{y+x} = \frac{1}{y}$

(g) $(y+2x)^2 = \frac{1}{1+x} + 4x^2$

(h) $y^2 - 3xy + (2x^2 + x - 1) = 0$

(i) $\frac{y}{x+2y} = \frac{2x}{x+y}$

Lösung 3.8

Die meisten Lösungen erhalten wir durch Umformen der Gleichungen und Einsetzen in die Formel für quadratische Gleichungen In eckigen Klammern [. . .] stehen Ausdrücke, die durch Umformungen (Faktorisieren) erhalten werden können.
(a) $x = -\frac{1}{2}\,y \pm \frac{1}{2\,y}\sqrt{y^4 + 24\,y}$, $y = -\frac{1}{2}\,x \pm \frac{1}{2\,x}\sqrt{x^4 + 24\,x}$;
(b) $x = -y$ und $x = \frac{1}{y}$, bzw. $y = -x$ und $y = \frac{1}{x}$,
$[(x+y)\cdot(xy-1) = 0]$;
(c) $x = (1 \pm \sqrt{2})y$, $y = \frac{1}{1\pm\sqrt{2}}x$, $[x^2 - 2xy - y^2 = 0]$;
(d) $x \in \mathbb{R} \setminus \{-y, \pm\sqrt{-y}\}$ beliebig falls $y = -1$ und $x = 0$ sonst,
$y \in \mathbb{R} \setminus \{-x, -x^2\}$ beliebig falls $x = 0$ und $y = -1$ sonst,
$[x^2(1+y) = 0]$;
(e) $x = \frac{1+3y-y^2}{y-1}$, $y = \frac{1}{2}(3-x) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(x-3)^2 + 4(x+1)}$,
$[y^2 - 3\,y + x\,y - x - 1 = 0]$;
(f) $x = \frac{y}{y^2-1}$, $y = \frac{1\pm\sqrt{1+4x^2}}{2x}$, $[x(y^2-1) = y$ bzw. $xy^2 - y - x = 0]$;

Lösung 3.8 / 2

(g) $x = -\frac{1}{8}(y+4) \pm \sqrt{\frac{1}{64}(y+4)^2 - \frac{1}{4}\left(y + \frac{1}{y}\right)}$,
$y = -2x \pm \sqrt{4x^2 + \frac{1}{x+1}}$,
$[4x^2y + 4xy + xy^2 + y^2 - 1 = 0]$;
(h) $x = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}$ und $x = y - 1$, bzw. $y = 2x - 1$ und $y = y + 1$,
$[(2x - y - 1)\cdot(x - y + 1) = 0]$;
(i) $x = \frac{-3+\sqrt{17}}{4}y$ und $x = \frac{-3-\sqrt{17}}{4}y$, bzw. $y = \frac{3+\sqrt{17}}{2}x$ und
$y = \frac{3-\sqrt{17}}{2}x$,
$[2x^2 + 3xy - y^2 = 0]$.

Ungleichungen

Eine **Ungleichung** erhalten wir durch Vergleichen zweier Terme mit einem der Ungleichheitszeichen $\leq, <, >$ oder $\geq$.

linke Seite $\leq$ rechte Seite

Die **Lösungsmenge** einer Ungleichung ist die Menge aller Zahlen aus dem Definitionsbereich die die Ungleichung erfüllen.
Sie besteht — im Gegensatz zu Gleichungen — meist aus einem Intervall oder der Vereinigung von Intervallen.

Äquivalenzumformungen

Zum Lösen einer Ungleichung versuchen wir diese zu *vereinfachen*. Idealerweise wird dabei die gesuchte Größe auf einer Seite *isoliert*.

Achtung
Beim *Multiplizieren* mit einer **negativen** Zahl dreht sich die Richtung des *Ungleichheitszeichens* um.

Fallunterscheidung bei Multiplikation (Division) mit einem Term:

- Term ist **größer** Null:
  Das Ungleichheitszeichen dreht sich *nicht um*.
- Term ist **kleiner** Null:
  Das Ungleichheitszeichen dreht sich *um*.
- Term ist **gleich** Null:
  Die Multiplikation oder Division ist *nicht erlaubt*!

Äquivalenzumformungen

Wir suchen die Lösung von $\dfrac{2\,x-1}{x-2} \leq 1$.

Wir multiplizieren mit die Ungleichung mit $(x-2)$.

- Fall $x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > 2$:
  Wir erhalten $2\,x - 1 \leq x - 2 \Leftrightarrow x \leq -1$,
  ein Widerspruch zur Annahme $x > 2$.
- Fall $x - 2 < 0 \Leftrightarrow x < 2$:
  Das Ungleichheitszeichen dreht sich um.
  Daher ist $2\,x - 1 \geq x - 2 \Leftrightarrow x \geq -1$.
  Also $x < 2$ und $x \geq -1$.
- Fall $x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$:
  Liegt nicht im Definitionsbereich.

Die Lösungsmenge ist daher das Intervall $L = [-1, 2)$.

Fehlerquelle

Polynomungleichungen lassen sich nicht einfach durch Äquivalenzumformungen lösen.

Man **darf auch nicht** einfach das „=“-Zeichen in der Lösungsformel der quadratischen Gleichung durch das Ungleichheitszeichens ersetzen!

Wir suchen die Lösung von

$$x^2 - 3\,x + 2 \leq 0$$

Falsche Lösung: $x_{1,2} \leq \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 2} = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}$

und somit $x \leq 1$ (und damit auch $x \leq 2$).

0 ist zwar kleiner als 1 (oder 2),
erfüllt aber trotzdem nicht die Ungleichung!

Polynomungleichung

1. Wir bringen alle Terme auf die linke Seite und erhalten einen Ausdruck der Form $T(x) \leq 0$ (bzw. $T(x) < 0$).
2. Wir bestimmen alle Nullstellen $x_1 < \ldots < x_k$ von $T(x)$. D.h., wir lösen die Gleichung $T(x) = 0$.
3. Diese Nullstellen zerlegen den *Definitionsbereich* in Intervalle I_j. Im Falle von **echten** Ungleichungen (mit $<$ oder $>$) sind diese Intervalle sind **offen**, andernfalls abgeschlossen.

   In jedem dieser Intervalle ist nun die Ungleichung **entweder** *überall* **oder** in *keinem* einzigen Punkt erfüllt.
4. Wir wählen einen Punkt $z_j \in I_j$ aus, der *nicht* am Rand liegt. Ist die (strikte) Ungleichung in z_j erfüllt, so ist sie im gesamten Intervall I_j erfüllt, andernfalls nicht.

Polynomungleichung

Wir suchen (noch einmal) die Lösung von

$$x^2 - 3\,x + 2 \leq 0$$

Der Definitionsbereich ist $\mathbb{R}$.

Die Lösungen von $x^2 - 3\,x + 2 = 0$ sind $x_1 = 1$ und $x_2 = 2$.

Wir erhalten drei Intervalle und überprüfen anhand dreier Punkte, ob die Ungleichung in den einzelnen Intervallen erfüllt ist:

$(-\infty, 1]$	nicht erfüllt:	$0^2 - 3 \cdot 0 + 2 = 2 \not\leq 0$
$[1, 2]$	erfüllt:	$\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 3 \cdot \frac{3}{2} + 2 = -\frac{1}{4} < 0$
$[2, \infty)$	nicht erfüllt:	$3^2 - 3 \cdot 3 + 2 = 2 \not\leq 0$

Die Lösungsmenge lautet daher $L = [1, 2]$.

Stetige Terme

Dieses Verfahren funktioniert in Prinzip auch für andere Ungleichungen, wenn alle beteiligten Terme **stetig** sind.

Enthält der Term $T(x)$ Unstetigkeitsstellen, so müssen wir diese im Punkt 3 bei der Zerlegung des Definitionsbereichs in Intervalle berücksichtigen.

Es muss eventuell auch berücksichtigt werden, dass der Definitionsbereich der Ungleichung aus der Vereinigung disjunkte Intervalle und Punkten besteht.

Stetige Terme

Wir suchen die Lösung von

$$\frac{x^2 + x - 3}{x - 2} \geq 1$$

Die Definitionsmenge besteht aus zwei Intervallen: $(-\infty, 2) \cup (2, \infty)$.

Die Lösung von $\dfrac{x^2 + x - 3}{x - 2} = 1$ erhalten wir durch

$$\frac{x^2 + x - 3}{x - 2} = 1 \;\Leftrightarrow\; x^2 + x - 3 = x - 2 \;\Leftrightarrow\; x^2 - 1 = 0$$

und somit

$$x_1 = -1,\ x_2 = 1$$

Wir erhalten insgesamt vier Intervalle:
$(-\infty, -1]$, $[-1, 1]$, $[1, 2)$ und $(2, \infty)$.

Stetige Terme

Wir überprüfen an hand von vier Punkten, ob die Ungleichung in den einzelnen Intervallen erfüllt ist:

$(-\infty, -1]$	nicht erfüllt:	$\frac{(-2)^2 + (-2) - 3}{(-2) - 2} = \frac{1}{4} \not\geq 1$
$[-1, 1]$	erfüllt:	$\frac{0^2 - 0 - 3}{0 - 2} = \frac{3}{2} > 1$
$[1, 2)$	nicht erfüllt:	$\frac{1{,}5^2 + 1{,}5 - 3}{1{,}5 - 2} = -\frac{3}{2} \not\geq 1$
$(2, \infty)$	erfüllt:	$\frac{3^2 + 3 - 3}{3 - 2} = 9 > 1$

Die Lösungsmenge lautet daher $L = [-1, 1] \cup (2, \infty)$.

Betragsungleichung

Ungleichungen mit **Absolutbeträgen** lassen sich ebenfalls nach dem oben beschriebenen Verfahren lösen.

Wir können aber eine Betragsungleichung auch lesen als eine Abkürzung für zwei Ungleichungen:

$\lvert x\rvert < 1$	$\Leftrightarrow$	$x < 1$ und $x > -1$
$\lvert x\rvert > 1$	$\Leftrightarrow$	$x > 1$ oder $x < -1$

Aufgabe 3.9

Lösen Sie folgende Ungleichungen:

(a) $x^3 - 2x^2 - 3x \geq 0$

(b) $x^3 - 2x^2 - 3x > 0$

(c) $x^2 - 2x + 1 \leq 0$

(d) $x^2 - 2x + 1 \geq 0$

(e) $x^2 - 2x + 6 \leq 1$

Lösung 3.9

(a) $L = [-1, 0] \cup [3, \infty)$;
(b) $L = (-1, 0) \cup (3, \infty)$;
(c) $L = \{1\}$;
(d) $L = \mathbb{R}$;
(e) $L = \emptyset$.

Aufgabe 3.10

Stellen Sie die Lösungsmenge als Vereinigung von Intervallen dar:

(a) $7 \le |12x + 1|$

(b) $\dfrac{x+4}{x+2} < 2$

(c) $\dfrac{3(4-x)}{x-5} \le 2$

(d) $25 < (-2x+3)^2 \le 50$

(e) $42 \le |12x + 6| < 72$

(f) $5 \le \dfrac{(x+4)^2}{|x+4|} \le 10$

Lösung 3.10

(a) $(-\infty, -\frac{2}{3}] \cup [\frac{1}{2}, \infty)$;
(b) $(-\infty, -2) \cup (0, \infty)$;
(c) $(-\infty, \frac{22}{5}] \cup (5, \infty)$;
(d) $\left[\frac{3}{2} - \sqrt{\frac{25}{2}}, -1\right) \cup \left(4, \frac{3}{2} + \sqrt{\frac{25}{2}}\right]$;
(e) $(-\frac{13}{2}, -4] \cup [3, \frac{11}{2})$;
(f) $[-14, -9] \cup [1, 6]$.