Kapitel 2

Terme

Terme

Ein mathematischer Ausdruck wie

$$B = R \cdot \frac{q^n - 1}{q^n(q-1)} \qquad \text{oder} \qquad (x+1)(x-1) = x^2 - 1$$

heißt eine **Gleichung**. Die Ausdrücke auf beiden Seiten des „="-Zeichens heißen **Terme**.

Sie enthalten

- **Zahlen**,
- **Konstante** (das sind Symbole, die einen *fixen* Wert repräsentieren), und
- **Variable** (für die ein *beliebiger* Wert eingesetzt werden kann).

Wertebereich

Beim Rechnen mit Termen muss darauf geachtet werden, für welche Werte der Variablen der Ausdruck definiert ist.

- $\frac{1}{x-1}$ ist nur für $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ definiert.
- $\sqrt{x+1}$ nur für $x \geq -1$ definiert.

Die Menge aller erlaubten Variablenwerte heißt der **Definitionsbereich** des Terms.

Summensymbol

Terme, die viele Summanden enthalten, die gesetzmäßig zusammenhängen, lassen sich durch die Verwendung des **Summensymbols** $\sum$ vereinfachen:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n}$$

lies: „Summe über a_i von $i = 1$ bis $i = n$“

Wir können das Summensymbol auf der linke Seite auch als Abkürzung für die rechte Seite interpretieren.

Summensymbol

Die Summe der ersten 10 natürlichen Zahlen größer 2 ist in verschiedenen Notationen:

$$\sum_{i=1}^{10}(2+i) = (2+1) + (2+2) + (2+3) + \cdots + (2+10)$$

Summensymbol – Rechnen

Beim Rechnen mit dem Summensymbol gelten die üblichen Regeln der Arithmetik wie Assoziativgesetz und Distributivgesetz.

- $\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{k=1}^{n} a_k$
- $\sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i = \sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)$
- $\sum_{i=1}^{n} c\, a_i = c \sum_{i=1}^{n} b_i$

Summensymbol – Rechnen

Vereinfache

$$\sum_{i=2}^{n}(a_i+b_i)^2 - \sum_{j=2}^{n} a_j^2 - \sum_{k=2}^{n} b_k^2$$

Lösung:

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=2}^{n}(a_i+b_i)^2 - \sum_{j=2}^{n} a_j^2 - \sum_{k=2}^{n} b_k^2 \\
&= \sum_{i=2}^{n}(a_i+b_i)^2 - \sum_{i=2}^{n} a_i^2 - \sum_{i=2}^{n} b_i^2 \\
&= \sum_{i=2}^{n}\left((a_i+b_i)^2 - a_i^2 - b_i^2\right) \\
&= \sum_{i=2}^{n} 2\, a_i b_i
\end{aligned}$$

Aufgabe 2.1

Berechne:

(a) $\sum_{i=0}^{5} a^i b^{5-i}$

(b) $\sum_{i=1}^{5} (a_i - a_{i+1})$

(c) $\sum_{i=1}^{n} (a_i - a_{i+1})$

Lösung 2.1

(a) $b^5 + ab^4 + a^2b^3 + a^3b^2 + a^4b + a^5$;
(b) $a_1 - a_5$;
(c) $a_1 - a_n$.

Aufgabe 2.2

Welche der Lösungen für den Ausdruck

$$\sum_{i=2}^{10} 5(i+3)$$

ist richtig?

(a) $5(2+3+4+\ldots+9+10+3)$

(b) $5(2+3+3+3+4+3+5+3+6+3+\ldots+10+3)$

(c) $5(2+3+4+\ldots+9+10)+5\cdot 3$

(d) $5(2+3+4+\ldots+9+10)+9\cdot 5\cdot 3$

Lösung 2.2

(b) und (d).

Aufgabe 2.3

Vereinfache die folgenden Summenausdrücke:

(a) $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 + \sum_{j=1}^{n} b_j^2 - \sum_{k=1}^{n} (a_k - b_k)^2$

(b) $\sum_{i=1}^{n} (a_i b_{n-i+1} - a_{n-i+1} b_i)$

(c) $\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^2 + \sum_{j=1}^{n} (x_j - y_j)^2$

(d) $\sum_{j=0}^{n-1} x_j - \sum_{i=1}^{n} x_i$

Lösung 2.3

(a) $\sum_{i=1}^{n} 2a_i b_i$;
(b) 0;
(c) $2\sum_{i=1}^{n}(x_i^2 + y_i^2)$;
(d) $x_0 - x_n$.

Aufgabe 2.4

Arithmetisches Mittel (Mittelwert)

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

und *Varianz*

$$\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

dienen als Lage- und Streumaß in der Statistik.

Zur Berechnung von σ^2 wird der
Verschiebungssatz aus der Statistik verwendet:

$$\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \bar{x}^2$$

Aufgabe 2.4 / 2

Verifiziere:

$$\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \bar{x}^2$$

für

(a) $n = 2$,
(b) $n = 3$,
(c) $n \geq 2$ beliebig.

Hinweise: Zeige, dass

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2\right) = 0.$$

Lösung 2.4

(a)

$$\begin{aligned}
&\big((x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2\big)-\big((x_1^2+x_2^2)-2\bar{x}^2\big)\\
&= x_1^2-2x_1\bar{x}+\bar{x}^2+x_2^2-2x_2\bar{x}+\bar{x}^2-x_1^2-x_2^2+2\bar{x}^2\\
&= -2x_1\bar{x}+\bar{x}^2-2x_2\bar{x}+\bar{x}^2+2\bar{x}^2\\
&= -2(x_1+x_2)\bar{x}+4\bar{x}^2\\
&= -2(2\bar{x})\bar{x}+4\bar{x}^2=0
\end{aligned}$$

Lösung 2.4 / 2

(c)

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2-(\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\bar{x}^2)\\
&= \sum_{i=1}^{n}x_i^2-2\sum_{i=1}^{n}x_i\bar{x}+n\bar{x}^2-\sum_{i=1}^{n}x_i^2+n\bar{x}^2\\
&= -2(n\bar{x})\bar{x}+2n\bar{x}^2=0
\end{aligned}$$

Aufgabe 2.5

Sei μ der “wahre” Wert eines metrischen Merkmals.
Dann heißt

$$MSE=\tfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$$

der *mittlere quadratische Fehler* (mean square error)
der Messung dieses Merkmals.

Verifiziere:

$$MSE=\sigma^2+(\bar{x}-\mu)^2$$

i.e., der MSE setzt sich zusammen aus einem

- zufälligen Fehler (Varianz der Messung), und einem
- systematischen Messfehlers (Verzerrung, *bias*).

Lösung 2.5

$$
\begin{aligned}
&\tfrac{1}{n}\textstyle\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2-(\sigma^2+(\bar{x}-\mu)^2)\\
&=\tfrac{1}{n}\textstyle\sum_{i=1}^{n}((x_i-\bar{x})+(\bar{x}-\mu))^2-\sigma^2-(\bar{x}-\mu)^2\\
&=\tfrac{1}{n}\textstyle\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2+\tfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\bar{x}-\mu)^2\\
&\quad-\tfrac{2}{n}\textstyle\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(\bar{x}-\mu)-\sigma^2-(\bar{x}-\mu)^2\\
&=-\tfrac{2}{n}\textstyle\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(\bar{x}-\mu)\\
&=-\tfrac{2}{n}(\bar{x}-\mu)\textstyle\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})\\
&=-2(\bar{x}-\mu)\left(\tfrac{1}{n}\textstyle\sum_{i=1}^{n}x_i-\tfrac{n}{n}\bar{x}\right)\\
&=-2(\bar{x}-\mu)\,(\bar{x}-\bar{x})\\
&=0
\end{aligned}
$$

Absolutbetrag

Der **Absolutbetrag** $|x|$ einer Zahl gibt den Abstand zum Nullpunkt an:

$$
\boxed{|x| = \begin{cases} x & \text{für } x \geq 0, \\ -x & \text{für } x < 0. \end{cases}}
$$

$|5| = 5$ und $|-3| = -(-3) = 3$.

Es gilt

$$|x| \cdot |y| = |x \cdot y|$$

Potenz

Die n-te **Potenz** von x ist definiert durch

$$\boxed{x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{n \text{ Faktoren}}}$$

Dabei heißt

- x die **Basis**, und
- n der **Exponent** von x^n.

Für *negative* Exponenten gilt:

$$\boxed{x^{-n} = \frac{1}{x^n}}$$

Wurzel

Eine Zahl y heißt die

- n-te **Wurzel** $\sqrt[n]{x}$ von x, falls $y^n = x$.

Das *Ziehen der n-ten Wurzel* stellt somit die umgekehrte Operation des *Potenzierens* dar.

Wir schreiben kurz $\sqrt{x}$ für die *Quadratwurzel* $\sqrt[2]{x}$.

Rationale Potenz

Rationale Potenzen sind definiert als:

$$\boxed{x^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{x} \qquad \text{für } m \in \mathbb{Z} \text{ und } x \geq 0.}$$

Wichtig:
Bei nicht-ganzzahligen Exponenten muss die Basis größer oder gleich 0 sein.

Potenzen lassen sich auch auf irrationale Exponenten erweitern.

Rechenregeln für Potenzen und Wurzeln

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n} \qquad x^0 = 1 \qquad (x \neq 0)$$

$$x^{n+m} = x^n \cdot x^m \qquad x^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{x} \qquad (x \geq 0)$$

$$x^{n-m} = \frac{x^n}{x^m} \qquad x^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{x^n} \qquad (x \geq 0)$$

$$(x \cdot y)^n = x^n \cdot y^n \qquad x^{-\frac{n}{m}} = \frac{1}{\sqrt[m]{x^n}} \qquad (x \geq 0)$$

$$(x^n)^m = x^{n \cdot m}$$

Achtung!
0^0 ist *nicht* definiert!

Rechenregeln für Potenzen und Wurzeln

- $\sqrt[3]{5^6} = (5^6)^{\frac{1}{3}} = 5^{(6\cdot\frac{1}{3})} = 5^{\frac{6}{3}} = 5^2 = 25$
- $(\sqrt[3]{5})^6 = (5^{\frac{1}{3}})^6 = 5^{(\frac{1}{3}\cdot 6)} = 5^{\frac{6}{3}} = 5^2 = 25$
- $5^{4-3} = 5^1 = 5$
- $5^{4-3} = \frac{5^4}{5^3} = \frac{625}{125} = 5$
- $5^{2-2} = 5^0 = 1$
- $5^{2-2} = \frac{5^2}{5^2} = \frac{25}{25} = 1$

Rechenregeln für Potenzen und Wurzeln

- $\dfrac{(x\cdot y)^4}{x^{-2}y^3} = x^4\,y^4\,x^{-(-2)}\,y^{-3} = x^6\,y$
- $\dfrac{(2\,x^2)^3\,(3y)^{-2}}{(4\,x^2\,y)^2\,(x^3\,y)} = \dfrac{2^3\,x^{2\cdot 3}\,3^{-2}\,y^{-2}}{4^2\,x^{2\cdot 2}\,y^2\,x^3\,y} = \dfrac{\frac{8}{9}\,x^6\,y^{-2}}{16\,x^7\,y^3}$

  $= \frac{1}{18}\,x^{6-7}\,y^{-2-3} = \frac{1}{18}\,x^{-1}y^{-5} = \dfrac{1}{18\,x\,y^5}$
- $\left(3\,x^{\frac{1}{3}}\,y^{-\frac{4}{3}}\right)^3 = 3^3\,x^{\frac{3}{3}}\,y^{-\frac{12}{3}} = 27\,x\,y^{-4} = \dfrac{27\,x}{y^4}$

Rechenregeln für Potenzen und Wurzeln

Achtung!

$-x^2$ ist **nicht** gleich $(-x)^2$
$(x+y)^n$ ist **nicht** gleich $x^n + y^n$
$x^n + y^n$ kann (im Allgemeinen) **nicht** vereinfacht werden!

Aufgabe 2.6

Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke:

(a) $\dfrac{(xy)^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{6}}y^{\frac{2}{3}}} =$

(b) $\dfrac{1}{(\sqrt{x})^{-\frac{3}{2}}} =$

(c) $\left(\dfrac{|x|^{\frac{1}{3}}}{|x|^{\frac{1}{6}}}\right)^6 =$

Lösung 2.6

(a) $x^{\frac{1}{6}}y^{-\frac{1}{3}}$;
(b) $x^{\frac{3}{4}}$;
(c) $|x|$.

Monom

Ein **Monom** ist ein Produkt von Konstanten und Variablen mit nichtnegativen ganzzahligen Potenzen.

Der **Grad** eines Monoms ist die Summe der Exponenten im Ausdruck.

$6\,x^2$ ist ein Monom 2. Grades.
$3\,x^3\,y$ und $x\,y^2\,z$ sind Monome 4. Grades.
$\sqrt{x}$ und $\frac{2}{3\,x\,y^2}$ sind *keine* Monome

Polynom

Ein **Polynom** ist die Summe von ein oder mehreren Monomen.

Der **Grad** (oder die **Ordnung**) eines Polynoms ist der größte Grad unter den einzelnen Monomen.

$4\,x^2\,y^3 - 2\,x^3\,y + 4\,x + 7\,y$ ist ein Polynom 5. Grades.

Summendarstellung:

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i\,x^i = a_n\,x^n + a_{n-1}\,x^{n-1} + \cdots + a_1\,x + a_0$$

wobei x die Variable und die a_i Konstanten sind.

Binomischer Lehrsatz

$$\boxed{(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k}\,y^k}$$

wobei

$$\boxed{\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}}$$

der **Binomialkoeffizient** (lies: „n über k“) und

$$\boxed{n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n}$$

die **Fakultät** von n (lies: „n-faktorielle“) ist.

Per Definition ist $0! = 1$.

Binomialkoeffizient

Es gilt:

$$\boxed{\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \binom{n}{n-k}}$$

Berechnung:

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k \cdot (k-1) \cdot \ldots \cdot 1}$$

Der Binomialkoeffizient ist die Anzahl der k-elementigen Teilmengen einer n-elementigen Menge.

Binomischer Lehrsatz

- $(x+y)^2 = \binom{2}{0}x^2 + \binom{2}{1}xy + \binom{2}{2}y^2 = x^2 + 2xy + y^2$
- $(x+y)^3 = \binom{3}{0}x^3 + \binom{3}{1}x^2y + \binom{3}{2}xy^2 + \binom{3}{3}y^3$

  $= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$

Multiplikation

Das Produkt zweier Polynome von Grad n und m ergibt ein Polynom vom Grad $n+m$.

$$\begin{aligned}
(2\,x^2 + 3\,x - 5)\cdot(x^3 - 2\,x + 1) = \\
&= 2\,x^2\cdot x^3 + 2\,x^2\cdot(-2\,x) + 2\,x^2\cdot 1 \\
&\quad + 3\,x\cdot x^3 + 3\,x\cdot(-2\,x) + 3\,x\cdot 1 \\
&\quad + (-5)\cdot x^3 + (-5)\cdot(-2\,x) + (-5)\cdot 1 \\
&= 2\,x^5 + 3\,x^4 - 9\,x^3 - 4\,x^2 + 13\,x - 5
\end{aligned}$$

Dividieren

Die **Division zweier Polynome** geschieht in analoger Weise wie die Division natürlicher Zahlen.

$$\begin{array}{rl}
 & (\,x^3 + x^2 \quad + 0\,x - 2\,) : (x-1) = \mathbf{x^2 + 2\,x + 2} \\
\mathbf{x^2}\cdot(x-1) \longrightarrow & \underline{x^3 - x^2} \\
 & \qquad 2\,x^2 + 0\,x \\
\mathbf{2\,x}\cdot(x-1) \longrightarrow & \qquad \underline{2\,x^2 - 2\,x} \\
 & \qquad\qquad 2\,x - 2 \\
\mathbf{2}\cdot(x-1) \longrightarrow & \qquad\qquad \underline{2\,x - 2} \\
 & \qquad\qquad\quad 0
\end{array}$$

Wir erhalten daher $x^3 + x^2 - 2 = (x-1)\cdot(x^2 + 2\,x + 2)$.

Falls der *Divisor* kein Faktor des *Dividenden* ist, erhalten wir einen *Divisionsrest*.

Faktorisieren

Die *Zerlegung* eines Polynoms in ein Produkt von Polynomen niedrigerer Ordnung (**Faktor**) heißt **Faktorisierung**.

$$2\,x^2 + 4\,x\,y + 8\,x\,y^3 = 2\,x \cdot (x + 2\,y + 4\,y^3)$$

$$x^2 - y^2 = (x+y) \cdot (x-y)$$

$$x^2 - 1 = (x+1) \cdot (x-1)$$

$$x^2 + 2\,x\,y + y^2 = (x+y) \cdot (x+y) = (x+y)^2$$

$$x^3 + y^3 = (x+y) \cdot (x^2 - x\,y + y^2)$$

Einfache Verifikation durch Ausmultiplizieren der rechten Seite.

Der Ausmultiplizierreflex

Achtung!

Das Faktorisieren eines Polynoms ist oft sehr schwierig während das Ausmultiplizieren immer rasch und einfach geht.

Die Faktoren eines Polynoms enthalten aber mehr Informationen als die ausmultiplizierte Form.

(Auf dieses Prinzip bauen kryptographische Methoden mit privatem und öffentlichem Schlüssel auf.)

Meiner Erfahrung nach besitzen aber viele Studentinnen und Studenten einen **antrainierten Ausmultiplizierreflex**:
Alles wird *zuallererst* (und gedankenlos) *ausmultipliziert*
(und dabei oft einfache Probleme in schwierige verwandelt).

Der Ausmultiplizierreflex

Zügeln Sie Ihren Ausmultiplizierreflex!

Linearer Term

Ein Polynom *ersten Grades* wird auch als **linearer Term** bezeichnet.

- $a + b\,x + y + a\,c$ ist ein linearer Term in x und y, falls wir a, b und c als Konstante auffassen.
- $xy + x + y$ ist nicht linear, da xy Grad 2 besitzt.

Linearfaktor

Ein Faktor (Polynom) 1. Grades wird als **Linearfaktor** bezeichnet.

Für Polynome in einer Variable mit der Nullstelle x_1 erhalten wir mit $(x - x_1)$ einen Linearfaktor.

Wenn ein Polynom n-ten Grades $P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i\,x^i$ die n reellen Nullstellen $x_1, x_2, \dots, x_n$ besitzt, so lässt sich dieses Polynom als Produkt der n Linearfaktoren $(x - x_i)$ zerlegen:

$$\boxed{P(x) = a_n \prod_{i=1}^{n} (x - x_i)}$$

Aufgabe 2.7

Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke:

(a) $(x + h)^2 - (x - h)^2 =$

(b) $(a + b)c - (a + bc) =$

(c) $(A - B)(A^2 + AB + B^2) =$

(d) $(x + y)^4 - (x - y)^4 =$

Lösung 2.7

(a) $4xh$;
(b) $a(c-1)$;
(c) $A^3 - B^3$;
(d) $8xy(x^2+y^2)$.

Aufgabe 2.8

(a) Geben Sie ein Polynom 4. Grades mit den Nullstellen -1, 2, 3 und 4 an.

(b) Wie lautet die Menge aller Polynome mit diesen Nullstellen?

(c) Kann so ein Polynom noch andere Nullstellen haben?

Lösung 2.8

Alle Polynome 4. Grades mit diesen Nullstellen haben die Form $c\,(x+1)\,(x-2)\,(x-3)\,(x-4)$ mit $c \neq 0$. Ein Polynom 4. Grades kann nicht mehr als 4 Nullstellen haben.

Aufgabe 2.9

Zeigen Sie, dass
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

Lösung 2.9

Durch direktes Ausrechnen von $2^n = (1+1)^n$ mittels Binomischen Lehrsatzes.

Bruchterm

Ein **rationaler Term** (**Bruchterm**) ist ein Ausdruck der Form
$$\boxed{\frac{P(x)}{Q(x)}}$$
wobei $P(x)$ und $Q(x)$ Polynome sind und **Zähler** bzw. **Nenner** heißen.

Der Definitionsbereich eines Bruchterms ist $\mathbb{R}$ ohne die Nullstellen des Nenners. Eine alternative Schreibweise ist $P(x)/Q(x)$.

$\frac{x^2 + x - 4}{x^3 + 5}$ ist ein Bruchterm mit Definitionsbereich $\mathbb{R} \setminus \{\sqrt[3]{5}\}$.

Rechenregeln für Brüche und Bruchterme

Seien $b, c, e \neq 0$.

$\frac{c \cdot a}{c \cdot b} = \frac{a}{b}$	*Kürzen*
$\frac{a}{b} = \frac{c \cdot a}{c \cdot b}$	*Erweitern*
$\frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$	*Multiplizieren*
$\frac{a}{b} : \frac{e}{c} = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{e}$	*Dividieren*
$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{e}{c}} = \frac{a \cdot c}{b \cdot e}$	*Doppelbruch Auflösen*

Rechenregeln für Brüche und Bruchterme

Seien $b, c \neq 0$.

$\frac{a}{b} + \frac{d}{b} = \frac{a+d}{b}$	*Addition bei gleichem Nenner*
$\frac{a}{b} + \frac{d}{c} = \frac{a \cdot c + d \cdot b}{b \cdot c}$	*Addition*

Wichtig!
Bei der *Addition* immer zuerst auf **gemeinsamen Nenner** bringen!

Achtung!
Der Ausdruck $\frac{0}{0}$ ist nicht definiert.

Rechenregeln für Brüche und Bruchterme

- $\frac{x^2-1}{x+1} = \frac{(x+1)(x-1)}{x+1} = x-1$
- $\frac{4\,x^3 + 2\,x^2}{2\,x\,y} = \frac{2\,x^2(2\,x+1)}{2\,x\,y} = \frac{x(2\,x+1)}{y}$
- $\frac{x+1}{x-1} + \frac{x-1}{x+1} = \frac{(x+1)^2 + (x-1)^2}{(x-1)(x+1)}$
  $= \frac{x^2 + 2\,x + 1 + x^2 - 2\,x + 1}{(x-1)(x+1)} = 2\,\frac{x^2+1}{x^2-1}$

Rechenregeln für Brüche und Bruchterme

Es sei an dieser Stelle darauf hingewiesen, dass beim Rechnen mit Bruchtermen immer wieder eklatante Rechenfehler passieren!

Die folgenden Beispiele für derartige Irrtümer stammen aus der Prüfungspraxis des Autors.

Rechenregeln für Brüche und Bruchterme

Achtung!

$\frac{a+c}{b+c}$ ist **nicht** gleich $\frac{a}{b}$

$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}$ ist **nicht** gleich $\frac{x+y}{a+b}$

$\frac{a}{b+c}$ ist **nicht** gleich $\frac{a}{b}+\frac{a}{c}$

$$\frac{x+2}{y+2} \neq \frac{x}{y} \qquad \frac{1}{2}+\frac{1}{3} \neq \frac{1}{5}.$$

$$\frac{1}{x^2+y^2} \neq \frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}$$

Aufgabe 2.10

Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke:

(a) $\frac{1}{1+x}+\frac{1}{x-1}=$

(b) $\frac{s}{st^2-t^3}-\frac{1}{s^2-st}-\frac{1}{t^2}=$

(c) $\frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}{xy+xz+y(z-x)}=$

(d) $\frac{\frac{x+y}{y}}{\frac{x-y}{x}}+\frac{\frac{x+y}{x}}{\frac{x-y}{y}}=$

Lösung 2.10

(a) $\frac{2x}{x^2-1}$;
(d) $\frac{1}{st}$;
(c) $\frac{1}{xyz}$;
(d) $\frac{(x^2+y^2)(x+y)}{xy(x-y)}$.

Aufgabe 2.11

Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke:

(a) $y(xy+x+1) - \dfrac{x^2y^2-1}{x-\frac{1}{y}} =$

(b) $\dfrac{\frac{x^2+y}{2x+1}}{\frac{2xy}{2x+y}} =$

(c) $\dfrac{\frac{a}{x}-\frac{b}{x+1}}{\frac{a}{x+1}+\frac{b}{x}} =$

(d) $\dfrac{2x^2y-4xy^2}{x^2-4y^2} + \dfrac{x^2}{x+2y} =$

Lösung 2.11

(a) xy;
(b) $\frac{(x^2+y)(2x+y)}{(2x+1)\,2xy}$;
(c) $\frac{x(a-b)+a}{x(a+b)+b}$;
(d) x.

Aufgabe 2.12

Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke:

(a) $\dfrac{x^{\frac{1}{4}} - y^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{8}} + y^{\frac{1}{6}}} =$

(b) $\dfrac{\sqrt{x} - 4}{x^{\frac{1}{4}} - 2} =$

(c) $\dfrac{\frac{2}{x^{-\frac{1}{7}}}}{x^{-\frac{7}{2}}} =$

Lösung 2.12

(a) $x^{\frac{1}{8}} - y^{\frac{1}{6}}$;
(b) $x^{\frac{1}{4}} + 2$;
(c) $2\,x^{\frac{51}{14}}$.

Aufgabe 2.13

Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke:

(a) $\dfrac{(\sqrt{x} + y)^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{6}}}$

(b) $\dfrac{1}{3\sqrt{x} - 1} \cdot \dfrac{1}{1 + \frac{1}{3\sqrt{x}}} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{x}} =$

(c) $\dfrac{(xy)^{\frac{1}{6}} - 3}{(xy)^{\frac{1}{3}} - 9} =$

(d) $\dfrac{x - y}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} =$

Lösung 2.13

(a) $(1+\frac{y}{\sqrt{x}})^{\frac{1}{3}}$;
(b) $\frac{1}{3x^{-\frac{1}{3}}}$;
(c) $\frac{1}{(xy)^{\frac{1}{6}}+3}$;
(d) $\sqrt{x}+\sqrt{y}$.

Exponent und Logarithmus

Eine Zahl y heißt **Logarithmus** von x zur Basis a, falls $a^y = x$. Der Logarithmus ist der *Exponent einer Zahl bezüglich einer Basis* a. Wir schreiben dafür

$$y = \log_a(x) \qquad \Leftrightarrow \qquad x = a^y$$

Wichtige Logarithmen:

- **natürlicher Logarithmus** $\ln(x)$ zur Basis $e = 2{,}7182818\ldots$ (*Eulersche Zahl*)
- **dekadischer Logarithmus** $\lg(x)$ zur Basis 10

Exponent und Logarithmus

- $\log_{10}(100) = 2,$ da $10^2 = 100$
- $\log_{10}\left(\frac{1}{1000}\right) = -3,$ da $10^{-3} = \frac{1}{1000}$
- $\log_2(8) = 3,$ da $2^3 = 8$
- $\log_{\sqrt{2}}(16) = 8,$ da $\sqrt{2}^8 = 2^{8/2} = 2^4 = 16$

Rechnen mit Exponenten und Logarithmus

Umrechnungsformel:

$$\boxed{a^x = e^{x \ln(a)} \qquad \log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}}$$

$$\log_2(123) = \frac{\ln(123)}{\ln(2)} = \frac{4,812184}{0,6931472} = 6,942515$$

Rechnen mit Exponenten und Logarithmus

Achtung:
Oft schreibt man nur $\log(x)$ ohne Angabe der Basis.

In diesem Fall ist (sollte) die verwendete Basis aus dem Zusammenhang oder einer Konvention ersichtlich (sein).

- Im *mathematischen* Bereich: *natürlicher* Logarithmus
  Finanzmathematik, Programme wie R, *Mathematica*, Maxima, ...
- Im *technischen* Bereich: *dekadischer* Logarithmus
  Wirtschaftswissenschaften, Taschenrechner, Excel, ...

Rechenregeln für Exponenten und Logarithmus

$a^{x+y} = a^x \cdot a^y$	$\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)$
$a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$	$\log_a(\frac{x}{y}) = \log_a(x) - \log_a(y)$
$(a^x)^y = a^{x \cdot y}$	$\log_a(x^\beta) = \beta \cdot \log_a(x)$
$(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$	
$a^{\log_a(x)} = x$	$\log_a(a^x) = x$
$a^0 = 1$	$\log_a(1) = 0$

$\log_a(x)$ ist (innerhalb der reellen Zahlen) nur für $x > 0$ definiert!

Aufgabe 2.14

Berechnen Sie ohne Taschenrechner:

(a) $\log_2(2) =$

(b) $\log_2(4) =$

(c) $\log_2(16) =$

(d) $\log_2(0) =$

(e) $\log_2(1) =$

(f) $\log_2\left(\frac{1}{4}\right) =$

(g) $\log_2\left(\sqrt{2}\right) =$

(h) $\log_2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) =$

(i) $\log_2(-4) =$

Lösung 2.14

(a) 1;
(b) 2;
(c) 4;
(d) nicht definiert;
(e) 0;
(f) -2;
(g) $\frac{1}{2}$;
(h) $-\frac{1}{2}$;
(i) nicht reell.

Aufgabe 2.15

Berechnen Sie ohne Taschenrechner:

(a) $\log_{10}(300) =$

(b) $\log_{10}(3^{10}) =$

Verwenden Sie $\log_{10}(3) = 0,47712$.

Lösung 2.15

(a) $2,47712$;
(b) $4,7712$.

Aufgabe 2.16

Berechnen (vereinfachen) Sie ohne Taschenrechner:

(a) $0{,}01^{-\log_{10}(100)} =$

(b) $\log_{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{25}\right) =$

(c) $10^{3\log_{10}(3)} =$

(d) $\frac{\log_{10}(200)}{\log_{\frac{1}{\sqrt{7}}}(49)} =$

(e) $\log_8\left(\frac{1}{512}\right) =$

(f) $\log_{\frac{1}{3}}(81) =$

Lösung 2.16

(a) $10\,000$;
(b) -4;
(c) 27;
(d) $-\frac{\log_{10}(2)}{4} - \frac{1}{2}$;
(e) -3;
(f) -4.

Aufgabe 2.17

Schreiben Sie in der Form $y = A\,e^{cx}$
(i.e., bestimmen Sie A und c):

(a) $y = 10^{x-1}$

(b) $y = 4^{x+2}$

(c) $y = 3^x 5^{2x}$

(d) $y = 1{,}08^{x-\frac{x}{2}}$

(e) $y = 0{,}9 \cdot 1{,}1^{\frac{x}{10}}$

(f) $y = \sqrt{q}\,2^{x/2}$

Lösung 2.17

(a) $y = \frac{1}{10}\,e^{x\,\ln 10}$;
(b) $y = 16\,e^{x\,\ln 4}$;
(c) $y = e^{x(\ln 3+\ln 25)}$;
(d) $y = e^{x\,\ln\sqrt{1{,}08}}$;
(e) $y = 0{,}9\,e^{x\,\frac{1}{10}\ln 1{,}1}$;
(f) $y = \sqrt{q}\,e^{x\,\ln\sqrt{2}}$.