Kapitel 1

Mengen und Abbildungen

Mengen

Der Begriff der *Menge* ist fundamental für die moderne Mathematik.
Wir begnügen uns mit einer höchst einfachen Definition.

Eine **Menge** ist eine Sammlung von unterscheidbaren Objekten.

Ein Objekt a einer Menge A heißt **Element** der Menge:

$$\boxed{a \in A}$$

Mengen werden durch *Aufzählung* oder *Beschreibung* ihrer Elemente in *geschwungenen Klammern* $\{\ldots\}$ definiert.

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$B = \{x \mid x \text{ ist eine natürliche Zahl und durch 2 teilbar}\}$$

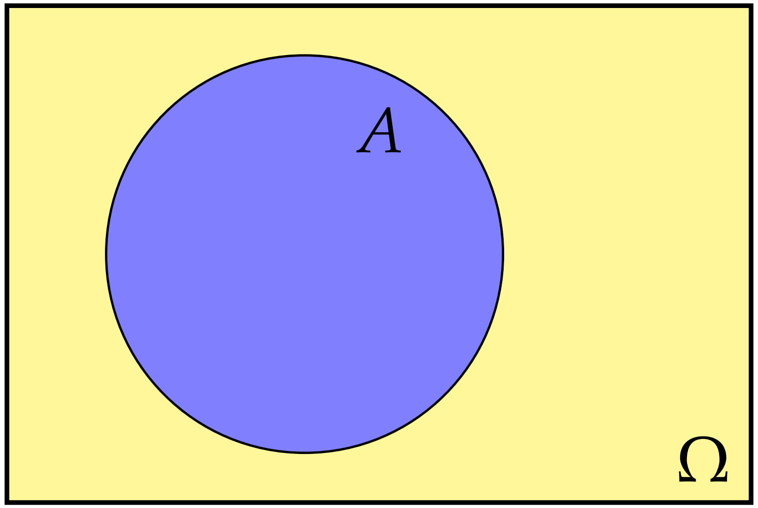
Wichtige Mengen

Symbol	Beschreibung
$\emptyset$	leere Menge (nur in der Schule: $\{\}$)
$\mathbb{N}$	natürliche Zahlen $\{1, 2, 3, \dots\}$
$\mathbb{Z}$	ganze Zahlen $\{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$
$\mathbb{Q}$	rationale Zahlen, Bruchzahlen $\{\frac{k}{n} \mid k, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\}$
$\mathbb{R}$	reelle Zahlen
$[a, b]$	abgeschlossenes Intervall $\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$
(a, b)	offenes Intervall $\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$
$[a, b)$	halboffenes Intervall $\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$
$\mathbb{C}$	komplexe Zahlen

Venn-Diagramme

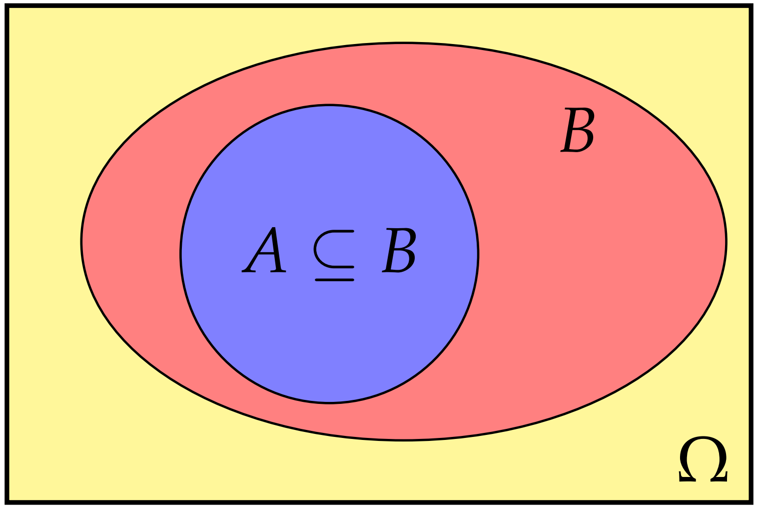
Beim Arbeiten mit Mengen nimmt man meist an, dass alle betrachteten Mengen Teilmengen einer vorgegebenen **Obermenge Ω** sind.

Mengen können durch so genannte **Venn-Diagramme** dargestellt werden. Die Obermenge wird durch ein Rechteck, die einzelnen Mengen durch Kreise oder Ovale dargestellt.



Teilmenge

Eine Menge A heißt **Teilmenge** von B, $\boxed{A \subseteq B}$, falls jedes Element von A auch Element von B ist, formal: $x \in A \Rightarrow x \in B$.



Eine Menge A heißt **echte Teilmenge** von B, $\boxed{A \subset B}$, falls $A \subseteq B$ und $A \neq B$.

Aufgabe 1.1

Welche der folgenden Mengen ist Teilmenge von
$A = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ und } 10 < x < 200\}$:

(a) $\{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ und } 10 < x \leq 200\}$

(b) $\{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ und } x^2 = 121\}$

(c) $\{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ und } 4\pi < x < \sqrt{181}\}$

(d) $\{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ und } 20 < |x| < 100\}$

Lösung 1.1

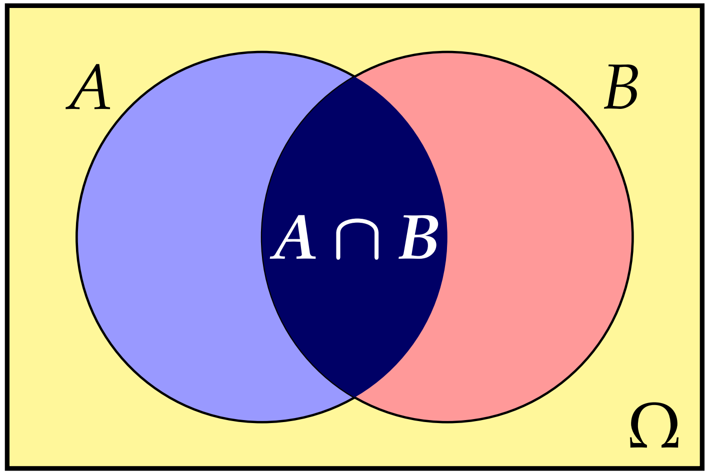
(a) keine Teilmenge;
(b) keine Teilmenge; da Menge $= \{-11, 11\}$;
(c) Teilmenge;
(d) keine Teilmenge.

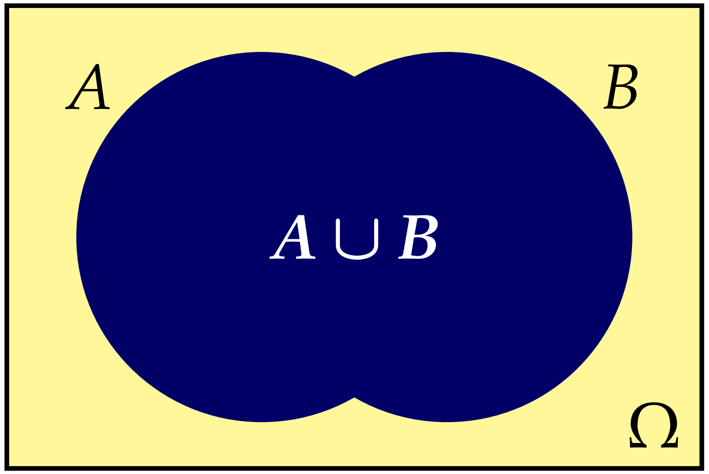
Mengenverknüpfungen

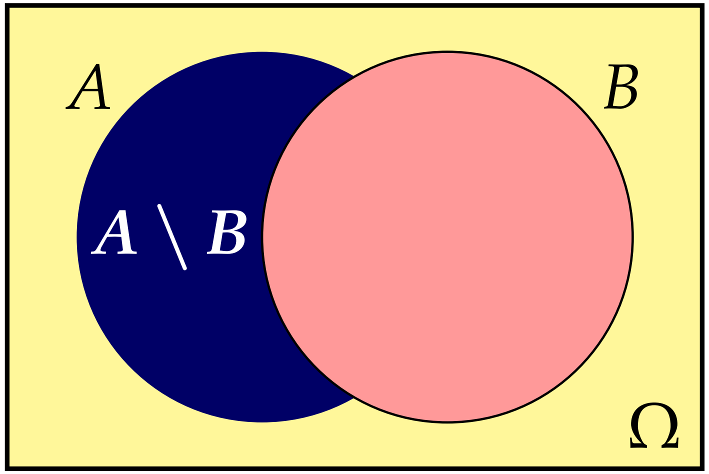
Symbol	Definition	Bezeichnung
$A \cap B$	$\{x \| x \in A$ und $x \in B\}$	Durchschnitt
$A \cup B$	$\{x \| x \in A$ oder $x \in B\}$	Vereinigung
$A \setminus B$	$\{x \| x \in A$ und $x \notin B\}$	Mengendifferenz
$\overline{A}$	$\Omega \setminus A$	Komplement

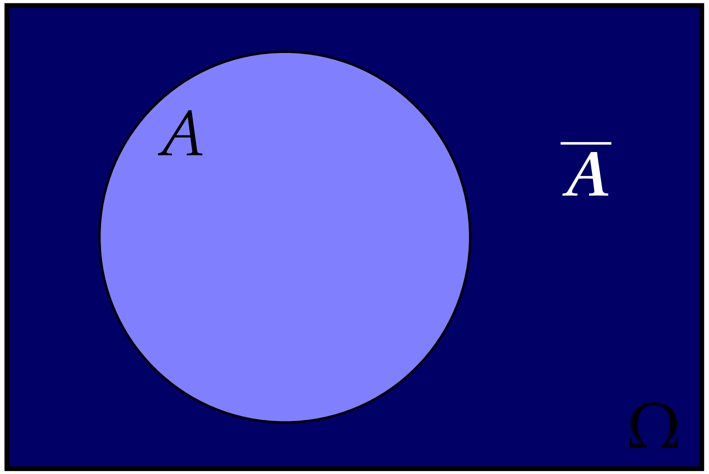
Zwei Mengen A und B heißen **disjunkt** falls $A \cap B = \emptyset$.

Mengenverknüpfungen









Aufgabe 1.2

Die Obermenge $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ hat die Teilmengen $A = \{1, 3, 6, 9\}$, $B = \{2, 4, 6, 10\}$ und $C = \{3, 6, 7, 9, 10\}$. Zeichnen Sie das Venn-Diagramm und bilden Sie die Mengen, die durch die folgenden Ausdrücke definiert sind:

(a) $A \cup C$

(b) $A \cap B$

(c) $A \setminus C$

(d) $\overline{A}$

(e) $(A \cup C) \cap B$

(f) $(\overline{A} \cup B) \setminus C$

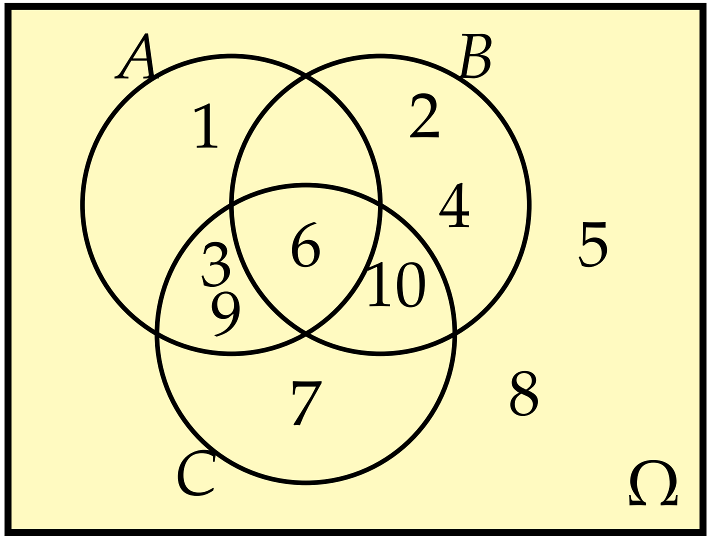
(g) $\overline{(A \cup C)} \cap B$

(h) $(\overline{A} \setminus B) \cap (\overline{A} \setminus C)$

(i) $(A \cap B) \cup (A \cap C)$

Lösung 1.2

(a) $\{1, 3, 6, 7, 9, 10\}$;
(b) $\{6\}$;
(c) $\{1\}$;
(d) $\{2, 4, 5, 7, 8, 10\}$;
(e) $\{6, 10\}$;
(f) $\{2, 4, 5, 8\}$;
(g) $\{2, 4\}$;
(h) $\{5, 8\}$;
(i) $\{3, 6, 9\}$.



Aufgabe 1.3

Zeichnen Sie im zugehörigen Venn-Diagramm die Lösungsmenge von

$$(A \cap \overline{B}) \cup (A \cap B)\ .$$

Lösung 1.3

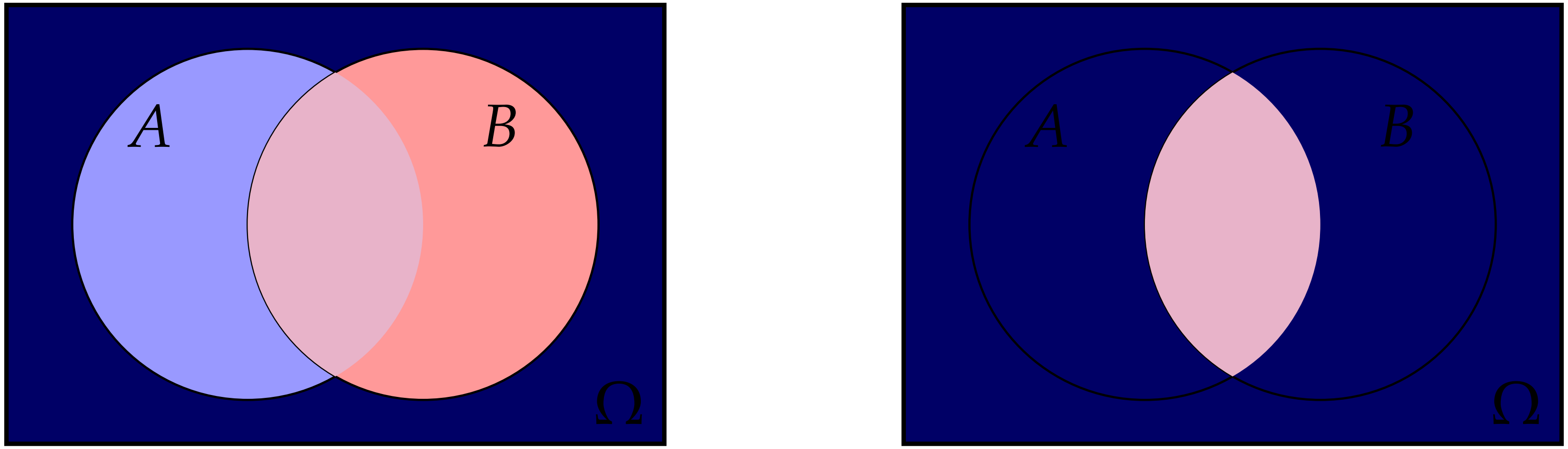
A.

Rechenregeln für Mengenverknüpfungen

Regel	Bezeichnung
$A \cup A = A \cap A = A$	Idempotenz
$A \cup \emptyset = A$ und $A \cap \emptyset = \emptyset$	Identität
$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ und $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$	Assoziativität
$A \cup B = B \cup A$ und $A \cap B = B \cap A$	Kommutativität
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ und $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	Distributivität
$\overline{A} \cup A = \Omega$ und $\overline{A} \cap A = \emptyset$ und $\overline{\overline{A}} = A$	

Gesetz von De Morgan

$$\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B} \qquad \text{und} \qquad \overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$$



Aufgabe 1.4

Vereinfachen Sie den folgenden Mengenausdruck:

$$(A \cap \overline{B}) \cup (A \cap B) \ .$$

Lösung 1.4

A.

Aufgabe 1.5

Vereinfachen Sie die folgenden Mengenausdrücke:

(a) $\overline{(A \cup B)} \cap \overline{B}$

(b) $(A \cup \overline{B}) \cap (A \cup B)$

(c) $((\overline{A} \cup \overline{B}) \cap \overline{(A \cap \overline{B})}) \cap A$

(d) $(C \cup B) \cap \overline{(\overline{C} \cap \overline{B})} \cap (C \cup \overline{B})$

Lösung 1.5

(a) $\overline{A} \cap \overline{B}$;
(b) A;
(c) $\emptyset$;
(d) C.

Cartesisches Produkt

Die Menge

$$\boxed{A \times B = \{(x, y) | x \in A, y \in B\}}$$

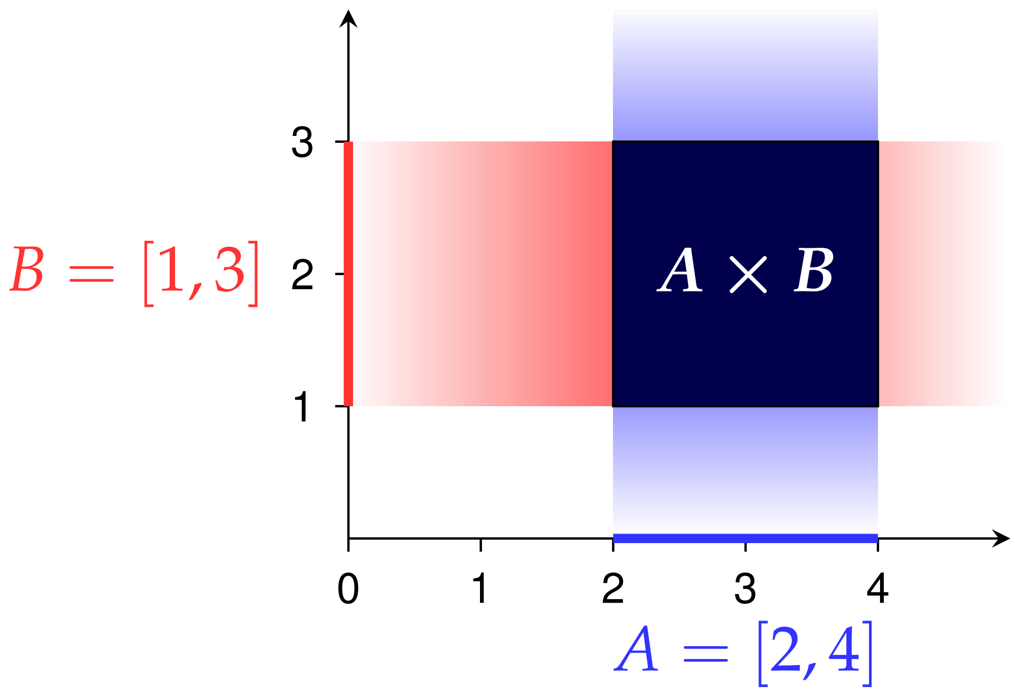
heißt das **Cartesisches Produkt** der *Mengen* A und B.

Im allgemeinen gilt: $A \times B \neq B \times A$.

Cartesisches Produkt

Das Cartesische Produkt aus $A = \{0, 1\}$ und $B = \{2, 3, 4\}$ ist
$A \times B = \{(0, 2), (0, 3), (0, 4), (1, 2), (1, 3), (1, 4)\}$.

Das Cartesische Produkt aus $A = [2, 4]$ und $B = [1, 3]$ ist
$A \times B = \{(x, y) \mid x \in [2, 4]$ und $y \in [1, 3]\}$.



Aufgabe 1.6

Beschreiben Sie das Cartesische Produkt aus

(a) $A = [0,1]$ und $P = \{2\}$.

(b) $A = [0,1]$ und $Q = \{(x,y)\colon 0 \leq x,y \leq 1\}$.

(c) $A = [0,1]$ und $O = \{(x,y)\colon 0 < x,y < 1\}$.

(d) $A = [0,1]$ und $C = \{(x,y)\colon x^2 + y^2 \leq 1\}$.

(e) $A = [0,1]$ und $\mathbb{R}$.

(f) $Q_1 = \{(x,y)\colon 0 \leq x,y \leq 1\}$ und $Q_2 = \{(x,y)\colon 0 \leq x,y \leq 1\}$.

Lösung 1.6

(a) die Strecke zwischen $(0, 2)$ und $(1, 2)$ im $\mathbb{R}^2$;
(b) der abgeschlossene Würfel $[0, 1]^3$ im $\mathbb{R}^3$;
(c) der halboffene Würfel $[0, 1] \times (0, 1)^2$ im $\mathbb{R}^3$;
(d) Zylinder im $\mathbb{R}^3$;
(e) unbeschränkter Streifen im $\mathbb{R}^2$;
(f) der abgeschlossene Würfel $[0, 1]^4$ im $\mathbb{R}^4$.

Abbildung

Eine **Abbildung** f ist definiert durch

(i) eine **Definitionsmenge** D,

(ii) eine **Wertemenge** W und

(iii) eine **Zuordnungsvorschrift**,
die jedem Element von D_f *genau ein* Element von W_f zuordnet.

$$\boxed{f\colon D_f \to W_f, \quad x \mapsto y = f(x)}$$

- x heißt **unabhängige** Variable, y heißt **abhängige** Variable.
- y ist das **Bild** von x, x ist das **Urbild** von y.
- $f(x)$ heißt **Funktionsterm**, x heißt **Argument** der Abbildung.

Andere Bezeichnungen: *Funktion*, *Transformation*

Aufgabe 1.7

Wie lauten

- Definitionsmenge,
- Wertemenge,
- Bildmenge,
- Funktionsterm,
- abhängige Variable,
- unabhängige Variable,

der Abbildung

$$\varphi\colon [0,\infty) \to \mathbb{R},\ x \mapsto y = x^{\alpha} \qquad \text{für } \alpha > 0?$$

Wie heißt diese Abbildung?

Lösung 1.7

Abbildung φ:
Definitionsmenge $= [0, \infty)$;
Wertemenge $= \mathbb{R}$;
Bildmenge $= [0, \infty)$;
Funktionsterm $\varphi(x) = x^{\alpha}$;
abhängige Variable $= x$;
unabhängige Variable $= y$.

Injektiv · surjektiv · bijektiv

Jedes Argument besitzt immer genau ein Bild. Die Anzahl der Urbilder eines Elementes $y \in W$ kann jedoch beliebig sein. Wir können daher Funktionen nach der Anzahl der Urbilder einteilen.

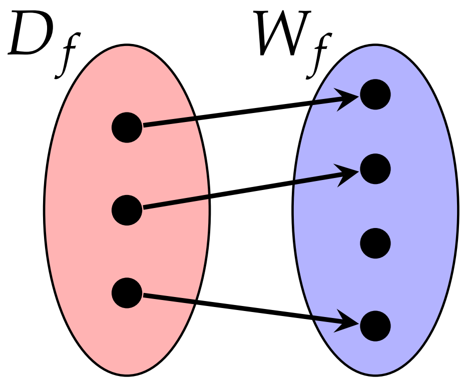
- Eine Abbildung f heißt **injektiv**, wenn jedes Element aus der Wertemenge *höchstens* ein Urbild besitzt.
- Sie heißt **surjektiv**, wenn jedes Element aus der Wertemenge *mindestens* ein Urbild besitzt.
- Sie heißt **bijektiv**, wenn sie sowohl injektiv als auch surjektiv ist.

Injektive Abbildungen haben die folgende wichtige Eigenschaft:

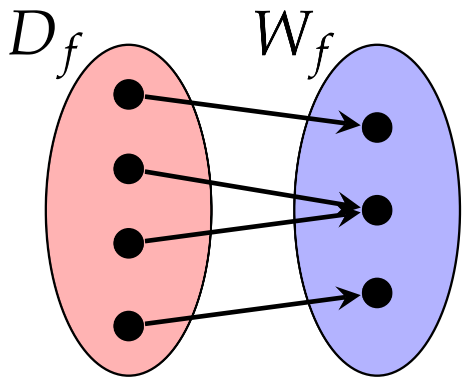
$$f(x) \neq f(y) \quad \Leftrightarrow \quad x \neq y$$

Injektiv · surjektiv · bijektiv

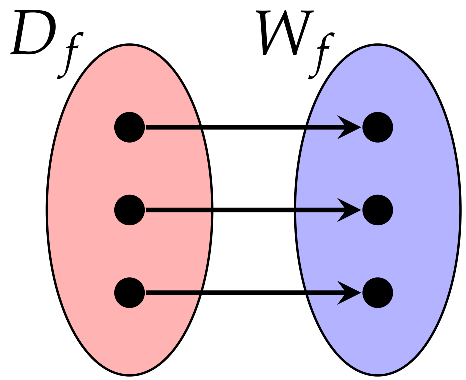
Abbildungen können durch „Pfeildiagramme“ veranschaulicht werden.



injektiv
(nicht surjektiv)



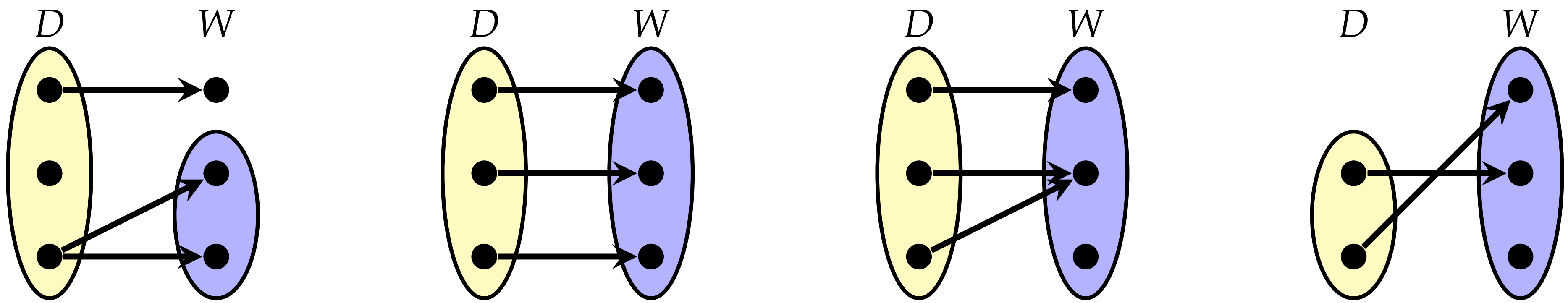
surjektiv
(nicht injektiv)



bijektiv

Aufgabe 1.8

Beschreiben die folgenden Diagramme Abbildungen? Wenn ja, ist die jeweilige Abbildung injektiv, surjektiv oder bijektiv?



(a) (b) (c) (d)

Lösung 1.8

(a) keine Abbildung;
(b) bijektive Abbildung;
(c) Abbildung, weder injektiv noch surjektiv;
(d) injektive Abbildung, nicht surjektiv.

Aufgabe 1.9

Beschreiben die folgenden Strukturen Abbildungen?
Wenn ja, ist die jeweilige Abbildung injektiv, surjektiv oder bijektiv?

(a) $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$

(b) $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^{-2}$

(c) $f\colon [0,\infty) \to [0,\infty),\ x \mapsto x^2$

(d) $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R},\ x \mapsto \{y \in \mathbb{R}\colon y = x^2\}$

(e) $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R},\ x \mapsto \{y \in \mathbb{R}\colon x = y^2\}$

(f) $f\colon [0,\infty) \to [0,\infty),\ x \mapsto \{y \in \mathbb{R}\colon x = y^2\}$

Lösung 1.9

(a) injektiv;
(b) keine Abbildung, da 0^{-2} nicht definiert;
(c) bijektiv;
(d) injektiv, äquivalent zu (a);
(e) keine Abbildung, da $4 = 2^2 = (-2)^2$;
(f) bijektiv, da äquivalent zu $y = \sqrt{x}$.

Aufgabe 1.10

Sei $\mathcal{P}_k = \{\sum_{i=0}^{k} a_i x^i \colon a_i \in \mathbb{R}\}$ die Menge aller Polynome in x vom Grad kleiner gleich k.

Beschreiben die Strukturen Abbildungen (für $n \geq 2$)?
Wenn ja, ist die jeweilige Abbildung injektiv, surjektiv oder bijektiv?

(a) $D \colon \mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_n,\ p(x) \mapsto \frac{dp(x)}{dx}$

(b) $D \colon \mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_{n-1},\ p(x) \mapsto \frac{dp(x)}{dx}$

(c) $D \colon \mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_{n-2},\ p(x) \mapsto \frac{dp(x)}{dx}$

Lösung 1.10

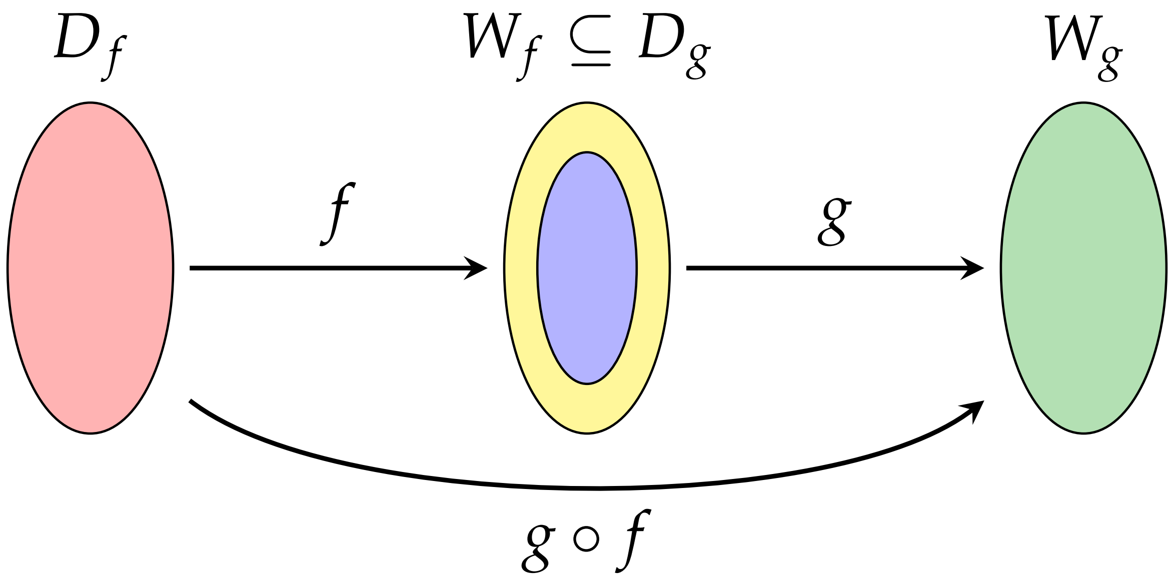
(a) Abbildung, weder injektiv (5' = 3' = 0) noch surjektiv;
(b) surjektiv.keine Abbildung, da 0^{-2} nicht definiert;
(e) keine Abbildung, da $(x^n)' = nx^{n-1} \notin \mathcal{P}_{n-2}$.

Zusammengesetzte Funktion

Seien $f\colon D_f \to W_f$ und $g\colon D_g \to W_g$ Funktionen mit $W_f \subseteq D_g$.
Dann heißt die Funktion

$$\boxed{g \circ f\colon D_f \to W_g,\ x \mapsto (g \circ f)(x) = g(f(x))}$$

zusammengesetzte Funktion („g *zusammengesetzt* f“).



Inverse Abbildung

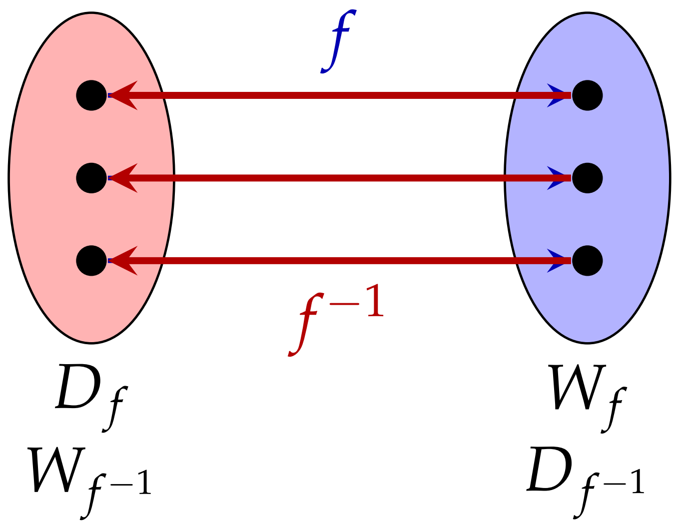
Bei einer **bijektiven** Abbildung $f\colon D_f \to W_f$ können wir jedem $y \in W_f$ sein Urbild $x \in D_f$ zuordnen.
Wir erhalten dadurch wieder eine Abbildung f^{-1} mit der Definitionsmenge W_f und der Wertemenge D_f:

$$\boxed{f^{-1}\colon W_f \to D_f,\ y \mapsto x = f^{-1}(y)}$$

Diese Abbildung heißt **Umkehrfunktion** oder **inverse Abbildung**. Sie hat die Eigenschaft, dass für alle Elemente $x \in D_f$ und $y \in W_f$ gilt:

$$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y) = x \quad \text{und} \quad f(f^{-1}(y)) = f(x) = y$$

Inverse Abbildung



Identische Abbildung

Die einfachste Funktion ist die **Einheitsfunktion** (oder **identische Abbildung** id, die das Argument auf sich selbst abbildet, d.h.

$$\boxed{\mathrm{id}\colon D \to W = D,\ x \mapsto x}$$

Die Einheitsfunktion bei zusammengesetzten Abbildungen die Rolle der Zahl 1 bei der Multiplikation von Zahlen.

$$f \circ \mathrm{id} = f \qquad \text{und} \qquad \mathrm{id} \circ f = f$$

Insbesondere gilt:

$$\boxed{f^{-1} \circ f = \mathrm{id}\colon D_f \to D_f \qquad \text{und} \qquad f \circ f^{-1} = \mathrm{id}\colon W_f \to W_f}$$