Kapitel 1

Mengen und Abbildungen

Mengen

Der Begriff der *Menge* ist fundamental für die moderne Mathematik. Wir begnügen uns mit einer höchst einfachen Definition.

Eine **Menge** ist eine Sammlung von unterscheidbaren Objekten.

Ein Objekt a einer Menge A heißt **Element** der Menge:

$$\boxed{a \in A}$$

Mengen werden durch *Aufzählung* oder *Beschreibung* ihrer Elemente in *geschwungenen Klammern* $\{\dots\}$ definiert.

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
$B = \{x \mid x \text{ ist eine natürliche Zahl und durch 2 teilbar}\}$

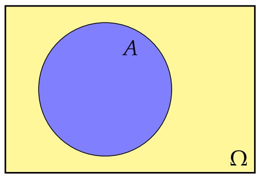
Wichtige Mengen

Symbol	Beschreibung
$\emptyset$	leere Menge (nur in der Schule: $\{\}$)
$\mathbb{N}$	natürliche Zahlen $\{1, 2, 3, \dots\}$
$\mathbb{Z}$	ganze Zahlen $\{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$
$\mathbb{Q}$	rationale Zahlen, Bruchzahlen $\{\frac{k}{n} \mid k, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\}$
$\mathbb{R}$	reelle Zahlen
$[a, b]$	abgeschlossenes Intervall $\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$
(a, b)	offenes Intervall $\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$
$[a, b)$	halboffenes Intervall $\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$
$\mathbb{C}$	komplexe Zahlen

Venn-Diagramme

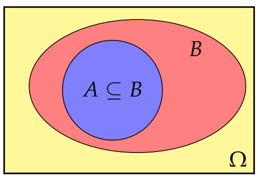
Beim Arbeiten mit Mengen nimmt man meist an, dass alle betrachteten Mengen Teilmengen einer vorgegebenen **Obermenge Ω** sind.

Mengen können durch so genannte **Venn-Diagramme** dargestellt werden. Die Obermenge wird durch ein Rechteck, die einzelnen Mengen durch Kreise oder Ovale dargestellt.



Teilmenge

Eine Menge A heißt **Teilmenge** von B, $\boxed{A \subseteq B}$, falls jedes Element von A auch Element von B ist, formal: $x \in A \Rightarrow x \in B$.



Eine Menge A heißt **echte Teilmenge** von B, $\boxed{A \subset B}$, falls $A \subseteq B$ und $A \neq B$.

Aufgabe 1.1

Welche der folgenden Mengen ist Teilmenge von $A = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ und } 10 < x < 200\}$:

(a) $\{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ und } 10 < x \leq 200\}$

(b) $\{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ und } x^2 = 121\}$

(c) $\{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ und } 4\pi < x < \sqrt{181}\}$

(d) $\{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ und } 20 < |x| < 100\}$

Lösung 1.1

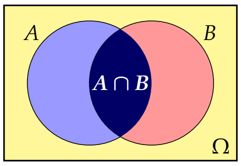
(a) keine Teilmenge;
(b) keine Teilmenge; da Menge $= \{-11, 11\}$;
(c) Teilmenge;
(d) keine Teilmenge.

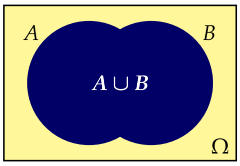
Mengenverknüpfungen

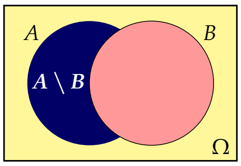
Symbol	Definition	Bezeichnung
$A \cap B$	$\{x \mid x \in A \text{ und } x \in B\}$	Durchschnitt
$A \cup B$	$\{x \mid x \in A \text{ oder } x \in B\}$	Vereinigung
$A \setminus B$	$\{x \mid x \in A \text{ und } x \notin B\}$	Mengendifferenz
$\overline{A}$	$\Omega \setminus A$	Komplement

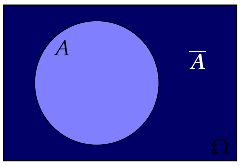
Zwei Mengen A und B heißen **disjunkt** falls $A \cap B = \emptyset$.

Mengenverknüpfungen









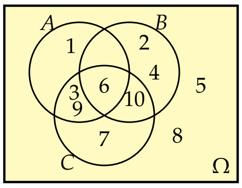
Aufgabe 1.2

Die Obermenge $\Omega = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ hat die Teilmengen $A = \{1,3,6,9\}$, $B = \{2,4,6,10\}$ und $C = \{3,6,7,9,10\}$. Zeichnen Sie das Venn-Diagramm und bilden Sie die Mengen, die durch die folgenden Ausdrücke definiert sind:

(a) $A \cup C$
(b) $A \cap B$
(c) $A \setminus C$
(d) $\overline{A}$
(e) $(A \cup C) \cap B$
(f) $(\overline{A} \cup B) \setminus C$
(g) $\overline{(A \cup C)} \cap B$
(h) $(\overline{A} \setminus B) \cap (\overline{A} \setminus C)$
(i) $(A \cap B) \cup (A \cap C)$

Lösung 1.2

(a) $\{1,3,6,7,9,10\}$;
(b) $\{6\}$;
(c) $\{1\}$;
(d) $\{2,4,5,7,8,10\}$;
(e) $\{6,10\}$;
(f) $\{2,4,5,8\}$;
(g) $\{2,4\}$;
(h) $\{5,8\}$;
(i) $\{3,6,9\}$.



Aufgabe 1.3

Zeichnen Sie im zugehörigen Venn-Diagramm die Lösungsmenge von

$$(A \cap \overline{B}) \cup (A \cap B)\,.$$

Lösung 1.3

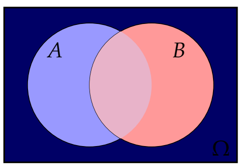
A.

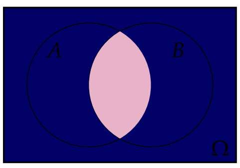
Rechenregeln für Mengenverknüpfungen

Regel	Bezeichnung
$A \cup A = A \cap A = A$	Idempotenz
$A \cup \emptyset = A$ und $A \cap \emptyset = \emptyset$	Identität
$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ und $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$	Assoziativität
$A \cup B = B \cup A$ und $A \cap B = B \cap A$	Kommutativität
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ und $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	Distributivität
$\overline{A} \cup A = \Omega$ und $\overline{A} \cap A = \emptyset$ und $\overline{\overline{A}} = A$	

Gesetz von De Morgan

$$\boxed{\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B} \quad \text{und} \quad \overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}}$$





Aufgabe 1.4

Vereinfachen Sie den folgenden Mengenausdruck:

$$(A \cap \overline{B}) \cup (A \cap B)\,.$$

Lösung 1.4

A.

Aufgabe 1.5

Vereinfachen Sie die folgenden Mengenausdrücke:

(a) $\overline{(A \cup B)} \cap \overline{B}$

(b) $(A \cup \overline{B}) \cap (A \cup B)$

(c) $((\overline{A} \cup \overline{B}) \cap \overline{(A \cap \overline{B})}) \cap A$

(d) $(C \cup B) \cap \overline{(\overline{C} \cap \overline{B})} \cap (C \cup \overline{B})$

Lösung 1.5

(a) $\overline{A} \cap \overline{B}$;
(b) A;
(c) $\emptyset$;
(d) C.

Cartesisches Produkt

Die Menge

$$\boxed{A \times B = \{(x,y) | x \in A, y \in B\}}$$

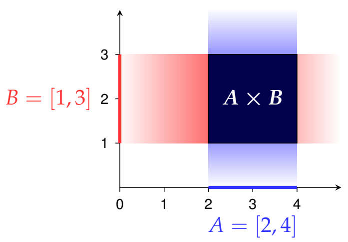
heißt das **Cartesisches Produkt** der *Mengen* A und B.

Im allgemeinen gilt: $A \times B \neq B \times A$.

Cartesisches Produkt

Das Cartesische Produkt aus $A = \{0,1\}$ und $B = \{2,3,4\}$ ist
$A \times B = \{(0,2), (0,3), (0,4), (1,2), (1,3), (1,4)\}$.

Das Cartesische Produkt aus $A = [2,4]$ und $B = [1,3]$ ist
$A \times B = \{(x,y) \mid x \in [2,4]$ und $y \in [1,3]\}$.



Aufgabe 1.6

Beschreiben Sie das Cartesische Produkt aus

(a) $A = [0,1]$ und $P = \{2\}$.

(b) $A = [0,1]$ und $Q = \{(x,y) \colon 0 \leq x, y \leq 1\}$.

(c) $A = [0,1]$ und $O = \{(x,y) \colon 0 < x, y < 1\}$.

(d) $A = [0,1]$ und $C = \{(x,y) \colon x^2 + y^2 \leq 1\}$.

(e) $A = [0,1]$ und $\mathbb{R}$.

(f) $Q_1 = \{(x,y) \colon 0 \leq x, y \leq 1\}$ und $Q_2 = \{(x,y) \colon 0 \leq x, y \leq 1\}$.

Lösung 1.6

(a) die Strecke zwischen $(0,2)$ und $(1,2)$ im $\mathbb{R}^2$;
(b) der abgeschlossene Würfel $[0,1]^3$ im $\mathbb{R}^3$;
(c) der halboffene Würfel $[0,1] \times (0,1)^2$ im $\mathbb{R}^3$;
(d) Zylinder im $\mathbb{R}^3$;
(e) unbeschränkter Streifen im $\mathbb{R}^2$;
(f) der abgeschlossene Würfel $[0,1]^4$ im $\mathbb{R}^4$.

Abbildung

Eine **Abbildung** f ist definiert durch

(i) eine **Definitionsmenge** D,

(ii) eine **Wertemenge** W und

(iii) eine **Zuordnungsvorschrift**,
die jedem Element von D_f *genau ein* Element von W_f zuordnet.

$$\boxed{f \colon D_f \to W_f, \quad x \mapsto y = f(x)}$$

- x heißt **unabhängige** Variable, y heißt **abhängige** Variable.
- y ist das **Bild** von x, x ist das **Urbild** von y.
- $f(x)$ heißt **Funktionsterm**, x heißt **Argument** der Abbildung.

Andere Bezeichnungen: *Funktion*, *Transformation*

Aufgabe 1.7

Wie lauten

- Definitionsmenge,
- Wertemenge,
- Bildmenge,
- Funktionsterm,
- abhängige Variable,
- unabhängige Variable,

der Abbildung

$$\varphi\colon [0,\infty) \to \mathbb{R},\ x \mapsto y = x^\alpha \qquad \text{für } \alpha > 0?$$

Wie heißt diese Abbildung?

Lösung 1.7

Abbildung φ:
Definitionsmenge $= [0,\infty)$;
Wertemenge $= \mathbb{R}$;
Bildmenge $= [0,\infty)$;
Funktionsterm $\varphi(x) = x^\alpha$;
abhängige Variable $= x$;
unabhängige Variable $= y$.

Injektiv · surjektiv · bijektiv

Jedes Argument besitzt immer genau ein Bild. Die Anzahl der Urbilder eines Elementes $y \in W$ kann jedoch beliebig sein. Wir können daher Funktionen nach der Anzahl der Urbilder einteilen.

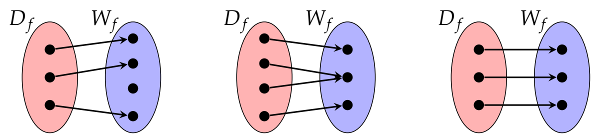
- Eine Abbildung f heißt **injektiv**, wenn jedes Element aus der Wertemenge *höchstens* ein Urbild besitzt.
- Sie heißt **surjektiv**, wenn jedes Element aus der Wertemenge *mindestens* ein Urbild besitzt.
- Sie heißt **bijektiv**, wenn sie sowohl injektiv als auch surjektiv ist.

Injektive Abbildungen haben die folgende wichtige Eigenschaft:

$$f(x) \neq f(y) \quad \Leftrightarrow \quad x \neq y$$

Injektiv · surjektiv · bijektiv

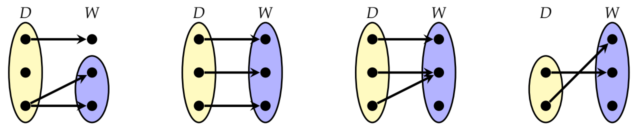
Abbildungen können durch „Pfeildiagramme“ veranschaulicht werden.



injektiv (nicht surjektiv) | surjektiv (nicht injektiv) | bijektiv

Aufgabe 1.8

Beschreiben die folgenden Diagramme Abbildungen? Wenn ja, ist die jeweilige Abbildung injektiv, surjektiv oder bijektiv?



(a) (b) (c) (d)

Lösung 1.8

(a) keine Abbildung;
(b) bijektive Abbildung;
(c) Abbildung, weder injektiv noch surjektiv;
(d) injektive Abbildung, nicht surjektiv.

Aufgabe 1.9

Beschreiben die folgenden Strukturen Abbildungen?
Wenn ja, ist die jeweilige Abbildung injektiv, surjektiv oder bijektiv?

(a) $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$

(b) $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^{-2}$

(c) $f\colon [0,\infty) \to [0,\infty),\ x \mapsto x^2$

(d) $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R},\ x \mapsto \{y \in \mathbb{R}\colon y = x^2\}$

(e) $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R},\ x \mapsto \{y \in \mathbb{R}\colon x = y^2\}$

(f) $f\colon [0,\infty) \to [0,\infty),\ x \mapsto \{y \in \mathbb{R}\colon x = y^2\}$

Lösung 1.9

(a) injektiv;
(b) keine Abbildung, da 0^{-2} nicht definiert;
(c) bijektiv;
(d) injektiv, äquivalent zu (a);
(e) keine Abbildung, da $4 = 2^2 = (-2)^2$;
(f) bijektiv, da äquivalent zu $y = \sqrt{x}$.

Aufgabe 1.10

Sei $\mathcal{P}_k = \{\sum_{i=0}^{k} a_i x^i : a_i \in \mathbb{R}\}$ die Menge aller Polynome in x vom Grad kleiner gleich k.

Beschreiben die Strukturen Abbildungen (für $n \geq 2$)?
Wenn ja, ist die jeweilige Abbildung injektiv, surjektiv oder bijektiv?

(a) $D\colon \mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_n,\ p(x) \mapsto \frac{dp(x)}{dx}$

(b) $D\colon \mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_{n-1},\ p(x) \mapsto \frac{dp(x)}{dx}$

(c) $D\colon \mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_{n-2},\ p(x) \mapsto \frac{dp(x)}{dx}$

Lösung 1.10

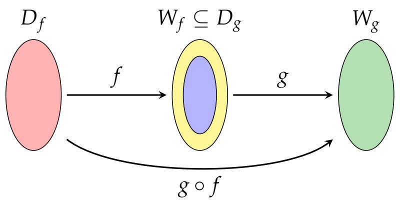
(a) Abbildung, weder injektiv (5' = 3' = 0) noch surjektiv;
(b) surjektiv.keine Abbildung, da 0^{-2} nicht definiert;
(e) keine Abbildung, da $(x^n)' = nx^{n-1} \notin \mathcal{P}_{n-2}$.

Zusammengesetzte Funktion

Seien $f\colon D_f \to W_f$ und $g\colon D_g \to W_g$ Funktionen mit $W_f \subseteq D_g$.
Dann heißt die Funktion

$$\boxed{g \circ f\colon D_f \to W_g,\ x \mapsto (g \circ f)(x) = g(f(x))}$$

zusammengesetzte Funktion („*g zusammengesetzt f*“).



Inverse Abbildung

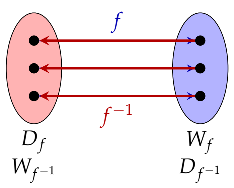
Bei einer **bijektiven** Abbildung $f\colon D_f \to W_f$ können wir jedem $y \in W_f$ sein Urbild $x \in D_f$ zuordnen.
Wir erhalten dadurch wieder eine Abbildung f^{-1} mit der Definitionsmenge W_f und der Wertemenge D_f:

$$\boxed{f^{-1}\colon W_f \to D_f,\ y \mapsto x = f^{-1}(y)}$$

Diese Abbildung heißt **Umkehrfunktion** oder **inverse Abbildung**. Sie hat die Eigenschaft, dass für alle Elemente $x \in D_f$ und $y \in W_f$ gilt:

$$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y) = x \quad \text{und} \quad f(f^{-1}(y)) = f(x) = y$$

Inverse Abbildung



Identische Abbildung

Die einfachste Funktion ist die **Einheitsfunktion** (oder **identische Abbildung** id, die das Argument auf sich selbst abbildet, d.h.

$$\boxed{\mathrm{id}\colon D \to W = D,\ x \mapsto x}$$

Die Einheitsfunktion bei zusammengesetzten Abbildungen die Rolle der Zahl 1 bei der Multiplikation von Zahlen.

$$f \circ \mathrm{id} = f \qquad \text{und} \qquad \mathrm{id} \circ f = f$$

Insbesondere gilt:

$$\boxed{f^{-1} \circ f = \mathrm{id}\colon D_f \to D_f \qquad \text{und} \qquad f \circ f^{-1} = \mathrm{id}\colon W_f \to W_f}$$