Kapitel 1

# Mengen und Abbildungen



## Mengen

Der Begriff der *Menge* ist fundamental für die moderne Mathematik. Wir begnügen uns mit einer höchst einfachen Definition.

Eine **Menge** ist eine Sammlung von unterscheidbaren Objekten.

Ein Objekt $a$ einer Menge $A$ heißt **Element** der Menge:

$$\boxed{a \in A}$$

Mengen werden durch *Aufzählung* oder *Beschreibung* ihrer Elemente in *geschwungenen Klammern* $\{\dots\}$ definiert.

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
$B = \{x \mid x \text{ ist eine natürliche Zahl und durch 2 teilbar}\}$



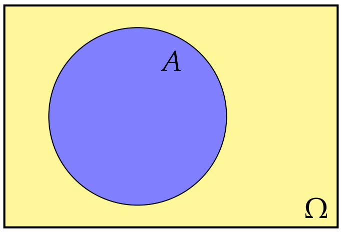
## Wichtige Mengen

| Symbol | Beschreibung |
|---|---|
| $\emptyset$ | leere Menge (nur in der Schule: $\{\}$) |
| $\mathbb{N}$ | natürliche Zahlen $\{1, 2, 3, \dots\}$ |
| $\mathbb{Z}$ | ganze Zahlen $\{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ |
| $\mathbb{Q}$ | rationale Zahlen, Bruchzahlen $\{\frac{k}{n} \mid k, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\}$ |
| $\mathbb{R}$ | reelle Zahlen |
| $[a, b]$ | abgeschlossenes Intervall $\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ |
| $(a, b)$ | offenes Intervall $\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ |
| $[a, b)$ | halboffenes Intervall $\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$ |
| $\mathbb{C}$ | komplexe Zahlen |

## Venn-Diagramme

Beim Arbeiten mit Mengen nimmt man meist an, dass alle betrachteten Mengen Teilmengen einer vorgegebenen **Obermenge $\Omega$** sind.

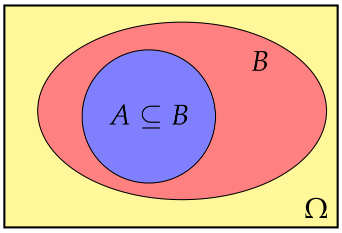
Mengen können durch so genannte **Venn-Diagramme** dargestellt werden. Die Obermenge wird durch ein Rechteck, die einzelnen Mengen durch Kreise oder Ovale dargestellt.






## Teilmenge

Eine Menge $A$ heißt **Teilmenge** von $B$, $\boxed{A \subseteq B}$, falls jedes Element von $A$ auch Element von $B$ ist, formal: $x \in A \Rightarrow x \in B$.




Eine Menge $A$ heißt **echte Teilmenge** von $B$, $\boxed{A \subset B}$, falls $A \subseteq B$ und $A \neq B$.



## Aufgabe 1.1

Welche der folgenden Mengen ist Teilmenge von $A = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ und } 10 < x < 200\}$:

**(a)** $\{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ und } 10 < x \leq 200\}$

**(b)** $\{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ und } x^2 = 121\}$

**(c)** $\{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ und } 4\pi < x < \sqrt{181}\}$

**(d)** $\{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ und } 20 < |x| < 100\}$

## Lösung 1.1

(a) keine Teilmenge;
(b) keine Teilmenge; da Menge $= \{-11, 11\}$;
(c) Teilmenge;
(d) keine Teilmenge.



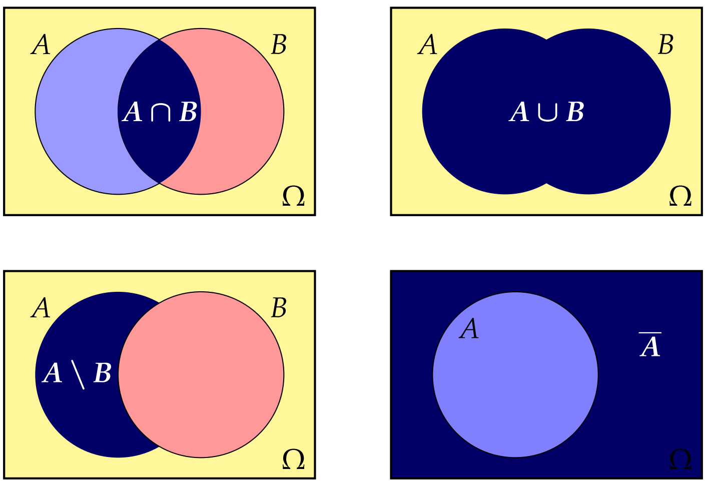
## Mengenverknüpfungen

| Symbol | Definition | Bezeichnung |
|---|---|---|
| $A \cap B$ | $\{x \mid x \in A$ und $x \in B\}$ | Durchschnitt |
| $A \cup B$ | $\{x \mid x \in A$ oder $x \in B\}$ | Vereinigung |
| $A \setminus B$ | $\{x \mid x \in A$ und $x \notin B\}$ | Mengendifferenz |
| $\overline{A}$ | $\Omega \setminus A$ | Komplement |

Zwei Mengen $A$ und $B$ heißen **disjunkt** falls $A \cap B = \emptyset$.



## Mengenverknüpfungen



## Aufgabe 1.2

Die Obermenge $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ hat die Teilmengen $A = \{1, 3, 6, 9\}$, $B = \{2, 4, 6, 10\}$ und $C = \{3, 6, 7, 9, 10\}$. Zeichnen Sie das Venn-Diagramm und bilden Sie die Mengen, die durch die folgenden Ausdrücke definiert sind:

**(a)** $A \cup C$

**(b)** $A \cap B$

**(c)** $A \setminus C$

**(d)** $\overline{A}$

**(e)** $(A \cup C) \cap B$

**(f)** $(\overline{A} \cup B) \setminus C$

**(g)** $\overline{(A \cup C)} \cap B$

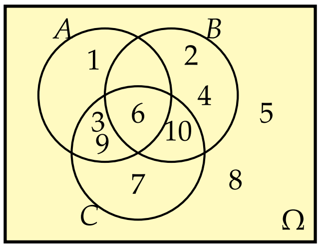
**(h)** $(\overline{A} \setminus B) \cap (\overline{A} \setminus C)$

**(i)** $(A \cap B) \cup (A \cap C)$



## Lösung 1.2

(a) $\{1, 3, 6, 7, 9, 10\}$;
(b) $\{6\}$;
(c) $\{1\}$;
(d) $\{2, 4, 5, 7, 8, 10\}$;
(e) $\{6, 10\}$;
(f) $\{2, 4, 5, 8\}$;
(g) $\{2, 4\}$;
(h) $\{5, 8\}$;
(i) $\{3, 6, 9\}$.






## Aufgabe 1.3

Zeichnen Sie im zugehörigen Venn-Diagramm die Lösungsmenge von

$$(A \cap \overline{B}) \cup (A \cap B) .$$

## Lösung 1.3

$A$.



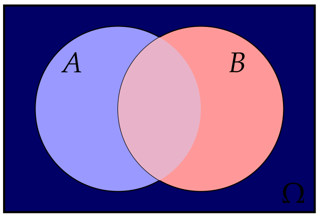
## Rechenregeln für Mengenverknüpfungen

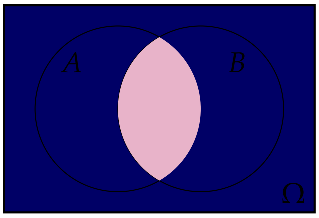
| Regel | Bezeichnung |
|---|---|
| $A \cup A = A \cap A = A$ | Idempotenz |
| $A \cup \emptyset = A$ und $A \cap \emptyset = \emptyset$ | Identität |
| $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ und<br>$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ | Assoziativität |
| $A \cup B = B \cup A$ und $A \cap B = B \cap A$ | Kommutativität |
| $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ und<br>$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ | Distributivität |
| $\overline{A} \cup A = \Omega$ und $\overline{A} \cap A = \emptyset$ und $\overline{\overline{A}} = A$ | |



## Gesetz von De Morgan

$$\boxed{\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B} \quad \text{und} \quad \overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}}$$



## Aufgabe 1.4

Vereinfachen Sie den folgenden Mengenausdruck:

$$(A \cap \overline{B}) \cup (A \cap B) .$$



## Lösung 1.4

$A$.



## Aufgabe 1.5

Vereinfachen Sie die folgenden Mengenausdrücke:

**(a)** $\overline{(A \cup B)} \cap \overline{B}$

**(b)** $(A \cup \overline{B}) \cap (A \cup B)$

**(c)** $((\overline{A} \cup \overline{B}) \cap \overline{(A \cap \overline{B})}) \cap A$

**(d)** $(C \cup B) \cap \overline{(\overline{C} \cap \overline{B})} \cap (C \cup \overline{B})$

## Lösung 1.5

(a) $\overline{A} \cap \overline{B}$;
(b) $A$;
(c) $\emptyset$;
(d) $C$.



## Cartesisches Produkt

Die Menge

$$\boxed{A \times B = \{(x,y) | x \in A, y \in B\}}$$

heißt das **Cartesisches Produkt** der *Mengen* $A$ und $B$.

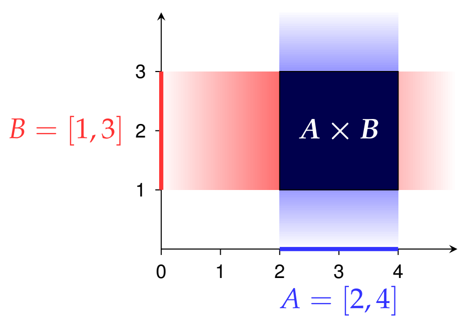
Im allgemeinen gilt: $A \times B \neq B \times A$.



## Cartesisches Produkt

Das Cartesische Produkt aus $A = \{0, 1\}$ und $B = \{2, 3, 4\}$ ist
$A \times B = \{(0, 2), (0, 3), (0, 4), (1, 2), (1, 3), (1, 4)\}$.

Das Cartesische Produkt aus $A = [2, 4]$ und $B = [1, 3]$ ist
$A \times B = \{(x, y) \mid x \in [2, 4]$ und $y \in [1, 3]\}$.



## Aufgabe 1.6

Beschreiben Sie das Cartesische Produkt aus

**(a)** $A = [0,1]$ und $P = \{2\}$.

**(b)** $A = [0,1]$ und $Q = \{(x,y) \colon 0 \leq x,y \leq 1\}$.

**(c)** $A = [0,1]$ und $O = \{(x,y) \colon 0 < x,y < 1\}$.

**(d)** $A = [0,1]$ und $C = \{(x,y) \colon x^2 + y^2 \leq 1\}$.

**(e)** $A = [0,1]$ und $\mathbb{R}$.

**(f)** $Q_1 = \{(x,y) \colon 0 \leq x,y \leq 1\}$ und $Q_2 = \{(x,y) \colon 0 \leq x,y \leq 1\}$.



## Lösung 1.6

(a) die Strecke zwischen $(0,2)$ und $(1,2)$ im $\mathbb{R}^2$;
(b) der abgeschlossene Würfel $[0,1]^3$ im $\mathbb{R}^3$;
(c) der halboffene Würfel $[0,1] \times (0,1)^2$ im $\mathbb{R}^3$;
(d) Zylinder im $\mathbb{R}^3$;
(e) unbeschränkter Streifen im $\mathbb{R}^2$;
(f) der abgeschlossene Würfel $[0,1]^4$ im $\mathbb{R}^4$.



## Abbildung

Eine **Abbildung** $f$ ist definiert durch

**(i)** eine **Definitionsmenge** $D$,

**(ii)** eine **Wertemenge** $W$ und

**(iii)** eine **Zuordnungsvorschrift**,
die jedem Element von $D_f$ *genau ein* Element von $W_f$ zuordnet.

$$\boxed{f \colon D_f \to W_f, \quad x \mapsto y = f(x)}$$

- $x$ heißt **unabhängige** Variable, $y$ heißt **abhängige** Variable.
- $y$ ist das **Bild** von $x$, $x$ ist das **Urbild** von $y$.
- $f(x)$ heißt **Funktionsterm**, $x$ heißt **Argument** der Abbildung.

Andere Bezeichnungen: *Funktion*, *Transformation*

## Aufgabe 1.7

Wie lauten

- Definitionsmenge,
- Wertemenge,
- Bildmenge,
- Funktionsterm,
- abhängige Variable,
- unabhängige Variable,

der Abbildung

$$\varphi\colon [0,\infty) \to \mathbb{R},\ x \mapsto y = x^\alpha \qquad \text{für } \alpha > 0?$$

Wie heißt diese Abbildung?



## Lösung 1.7

Abbildung $\varphi$:
Definitionsmenge $= [0,\infty)$;
Wertemenge $= \mathbb{R}$;
Bildmenge $= [0,\infty)$;
Funktionsterm $\varphi(x) = x^\alpha$;
abhängige Variable $= x$;
unabhängige Variable $= y$.



## Injektiv · surjektiv · bijektiv

Jedes Argument besitzt immer genau ein Bild. Die Anzahl der Urbilder eines Elementes $y \in W$ kann jedoch beliebig sein. Wir können daher Funktionen nach der Anzahl der Urbilder einteilen.

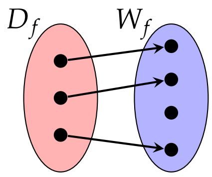
- Eine Abbildung $f$ heißt **injektiv**, wenn jedes Element aus der Wertemenge *höchstens* ein Urbild besitzt.
- Sie heißt **surjektiv**, wenn jedes Element aus der Wertemenge *mindestens* ein Urbild besitzt.
- Sie heißt **bijektiv**, wenn sie sowohl injektiv als auch surjektiv ist.

*Injektive* Abbildungen haben die folgende wichtige Eigenschaft:

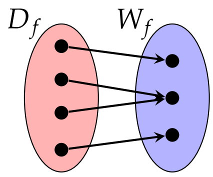
$$f(x) \neq f(y) \quad \Leftrightarrow \quad x \neq y$$

## Injektiv · surjektiv · bijektiv

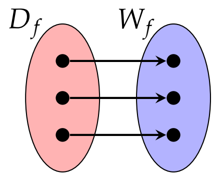
Abbildungen können durch „Pfeildiagramme“ veranschaulicht werden.




injektiv
(nicht surjektiv)




surjektiv
(nicht injektiv)

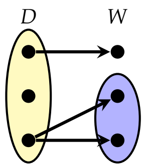



bijektiv

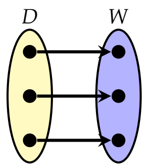


## Aufgabe 1.8

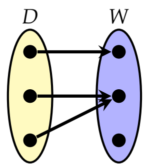
Beschreiben die folgenden Diagramme Abbildungen? Wenn ja, ist die jeweilige Abbildung injektiv, surjektiv oder bijektiv?



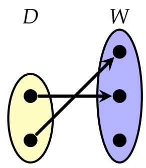

(a)




(b)




(c)




(d)



## Lösung 1.8

(a) keine Abbildung;
(b) bijektive Abbildung;
(c) Abbildung, weder injektiv noch surjektiv;
(d) injektive Abbildung, nicht surjektiv.

## Aufgabe 1.9

Beschreiben die folgenden Strukturen Abbildungen?
Wenn ja, ist die jeweilige Abbildung injektiv, surjektiv oder bijektiv?

**(a)** $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$

**(b)** $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^{-2}$

**(c)** $f\colon [0,\infty) \to [0,\infty),\ x \mapsto x^2$

**(d)** $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R},\ x \mapsto \{y \in \mathbb{R}\colon y = x^2\}$

**(e)** $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R},\ x \mapsto \{y \in \mathbb{R}\colon x = y^2\}$

**(f)** $f\colon [0,\infty) \to [0,\infty),\ x \mapsto \{y \in \mathbb{R}\colon x = y^2\}$



## Lösung 1.9

(a) injektiv;
(b) keine Abbildung, da $0^{-2}$ nicht definiert;
(c) bijektiv;
(d) injektiv, äquivalent zu (a);
(e) keine Abbildung, da $4 = 2^2 = (-2)^2$;
(f) bijektiv, da äquivalent zu $y = \sqrt{x}$.



## Aufgabe 1.10

Sei $\mathcal{P}_k = \{\sum_{i=0}^{k} a_i x^i\colon a_i \in \mathbb{R}\}$ die Menge aller Polynome in $x$ vom Grad kleiner gleich $k$.

Beschreiben die Strukturen Abbildungen (für $n \geq 2$)?
Wenn ja, ist die jeweilige Abbildung injektiv, surjektiv oder bijektiv?

**(a)** $D\colon \mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_n,\ p(x) \mapsto \frac{dp(x)}{dx}$

**(b)** $D\colon \mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_{n-1},\ p(x) \mapsto \frac{dp(x)}{dx}$

**(c)** $D\colon \mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_{n-2},\ p(x) \mapsto \frac{dp(x)}{dx}$

# Lösung 1.10

(a) Abbildung, weder injektiv (5' = 3' = 0) noch surjektiv;
(b) surjektiv.keine Abbildung, da $0^{-2}$ nicht definiert;
(e) keine Abbildung, da $(x^n)' = nx^{n-1} \notin \mathcal{P}_{n-2}$.

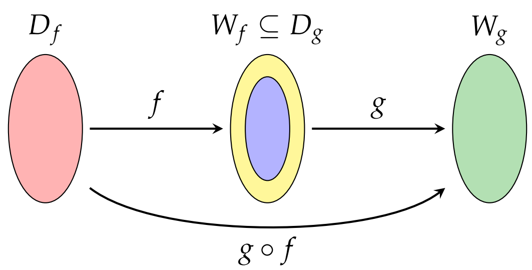


# Zusammengesetzte Funktion

Seien $f\colon D_f \to W_f$ und $g\colon D_g \to W_g$ Funktionen mit $W_f \subseteq D_g$.
Dann heißt die Funktion

$$\boxed{g \circ f\colon D_f \to W_g,\ x \mapsto (g \circ f)(x) = g(f(x))}$$

**zusammengesetzte Funktion** („$g$ *zusammengesetzt* $f$“).






# Inverse Abbildung

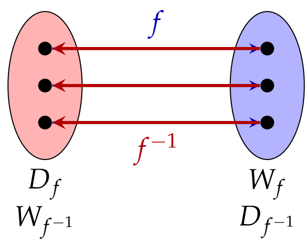
Bei einer **bijektiven** Abbildung $f\colon D_f \to W_f$ können wir jedem $y \in W_f$ sein Urbild $x \in D_f$ zuordnen.
Wir erhalten dadurch wieder eine Abbildung $f^{-1}$ mit der Definitionsmenge $W_f$ und der Wertemenge $D_f$:

$$\boxed{f^{-1}\colon W_f \to D_f,\ y \mapsto x = f^{-1}(y)}$$

Diese Abbildung heißt **Umkehrfunktion** oder **inverse Abbildung**. Sie hat die Eigenschaft, dass für alle Elemente $x \in D_f$ und $y \in W_f$ gilt:

$$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y) = x \quad \text{und} \quad f(f^{-1}(y)) = f(x) = y$$

## Inverse Abbildung






## Identische Abbildung

Die einfachste Funktion ist die **Einheitsfunktion** (oder **identische Abbildung** $\mathrm{id}$, die das Argument auf sich selbst abbildet, d.h.

$$\boxed{\mathrm{id}\colon D \to W = D,\ x \mapsto x}$$

Die Einheitsfunktion bei zusammengesetzten Abbildungen die Rolle der Zahl $1$ bei der Multiplikation von Zahlen.

$$f \circ \mathrm{id} = f \qquad \text{und} \qquad \mathrm{id} \circ f = f$$

Insbesondere gilt:

$$\boxed{f^{-1} \circ f = \mathrm{id}\colon D_f \to D_f \qquad \text{und} \qquad f \circ f^{-1} = \mathrm{id}\colon W_f \to W_f}$$