Kapitel 2

Kovarianz und Korrelation

Lernziele

- Mathematische und statistische Grundlagen der Portfoliotheorie
- Kovarianz und Korrelation
- Kovarianz- und Korrelationsmatrix
- Multivariate Normalverteilung
- Erzeugen von multinormalverteilten Zufallsvektoren

Erwartungswert einer Linearkombination

Der Erwartungswert einer **Linearkombination** von ZVen ist die Linearkombination der einzelnen Erwartungswerte:

$$\mathrm{E}(a\,X + b\,Y + c) = a\,\mathrm{E}(X) + b\,\mathrm{E}(Y) + c$$

Allgemein

$$\mathrm{E}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i\,\mathrm{E}(X_i)$$

Voraussetzung: alle Erwartungswerte existieren.

Varianz einer Linearkombination

Die Varianz einer Linearkombination von ZVen ist **nicht** die Linearkombination der einzelnen Varianzen. Es gilt:

$$\mathrm{V}(a\,X + b\,Y + c) = a^2\,\mathrm{V}(X) + 2\,a\,b\,\mathrm{Cov}(X,Y) + b^2\,\mathrm{V}(Y)$$

Die Konstante c beeinflusst die Varianz nicht.

Bei der Varianz einer Summe tritt ein gemischter Term auf: die **Kovarianz** der beiden ZVen.

Nur wenn die Kovarianz der beiden ZVen Null ist, also beide unkorreliert sind, gilt:

„Die Varianz der Summe ist gleich die Summe der Varianzen".

Voraussetzung: alle Varianzen existieren.

Kovarianz

Die Kovarianz zwischen zwei ZV X und Y ist definiert als

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(X,Y) &= \mathrm{E}[(X-\mathrm{E}(X))(Y-\mathrm{E}(Y))] \\ &= \textstyle\sum_{x,y}(x-\mu_x)\,(y-\mu_y)\,\mathrm{P}(X=x, Y=y)\end{aligned}$$

Hier gilt auch ein Verschiebungssatz:

$$\mathrm{E}[(X-E(X))(Y-E(Y))] = \mathrm{E}[X\,Y] - \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y)$$

Bemerkung: Ist $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$, folgt

$$\mathrm{E}[X\,Y] = \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y)$$

Normalverteilte Zufallsvariable

Reproduktionseigenschaft der Normalverteilung:

Seien die ZVen X und Y normalverteilt mit

$$X \sim N(\mu_x, \sigma_x^2), \quad Y \sim N(\mu_y, \sigma_y^2) \quad \text{und} \quad \mathrm{Cov}(X,Y) = \sigma_{xy}$$

Dann ist

$$Z = a\,X + b\,Y + c \sim N(\mu_z, \sigma_z^2)$$

$$\begin{aligned}\mu_z &= a\,\mu_x + b\,\mu_y + c \\ \sigma_z^2 &= a^2\,\sigma_x^2 + 2\,a\,b\,\sigma_{xy} + b^2\,\sigma_y^2\end{aligned}$$

Korrelation

Die **Korrelation** zwischen zwei ZV X und Y ist definiert als

$$\mathrm{Corr}(X,Y) = \rho(X,Y) = \rho = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{V}(X)\,\mathrm{V}(Y)}}$$

Es gilt immer

$$-1 \leq \mathrm{Corr}(X,Y) \leq 1$$

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{Corr}(X,Y)\,\sqrt{\mathrm{V}(X)\,\mathrm{V}(Y)}$$

$$\mathrm{Corr}(X,Y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Cov}(X,Y) = 0$$

Unkorrelierte Zufallsvariable

Sind X und Y unkorreliert, so gilt

$$\mathrm{V}(X+Y) = \mathrm{V}(X) + \mathrm{V}(Y)$$

aber auch

$$\mathrm{V}(X-Y) = \mathrm{V}(X) + \mathrm{V}(Y)$$

Allgemein gilt für unkorrelierte ZV X_i

$$\mathrm{V}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2\,\mathrm{V}(X_i)$$

Unabhängige Zufallsvariable

Zwei Zufallsvariable X und Y heißen (stochastisch) **unabhängig** wenn

$$\mathrm{P}(X=x, Y=y) = \mathrm{P}(X=x)\cdot \mathrm{P}(Y=y)$$

für all möglichen Merkmalsausprägungen x und y.

Unabhängige Zufallsvariable sind immer unkorreliert, i.e.

$$X,\, Y \text{ unabhängig} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Corr}(X,Y) = \mathrm{Cov}(X,Y) = 0$$

Die Umkehrung gilt jedoch **nicht!**

Beispiel 1 – 2-dimensionale Verteilung

Wir suchen für $Y = X_1 + X_2$ Erwartung und Varianz.

Die ZVen X_1 und X_2 besitzen die gemeinsame Verteilung

$P(X_1 = x_1, X_2 = x_2)$	$X_2 = -1$	$X_2 = 1$	$P(X_1 = x_1)$
$X_1 = 1$	0.12	0.48	0.60
$X_1 = 2$	0.08	0.32	0.40
$P(X_2 = x_2)$	0.20	0.80	1.00

Beispiel 1 / Summe

Die Werte von $Y = X_1 + X_2$ erhält man über die Tabelle

$Y = X_1 + X_2$	$X_2 = -1$	$X_2 = 1$
$X_1 = 1$	0	2
$X_1 = 2$	1	3

mit der Verteilung

	$Y = 0$	$Y = 1$	$Y = 2$	$Y = 3$	$\sum$
$P(Y = y)$	0.12	0.08	0.48	0.32	1.00

Beispiel 1 / Erwartungswert $E(Y)$

Für den Erwartungswert von Y erhalten wir

$$E(Y) = \sum y \, P(Y = y) = 0 \cdot 0.12 + \cdots + 3 \cdot 0.32 = 2.0$$

Nach unseren Regeln ergibt sich

$$E(Y) = E(X_1 + X_2) = E(X_1) + E(X_2) = 1.4 + 0.6 = 2.0$$

$$E(X_1) = \sum x_1 \, P(X_1 = x_1) = 1 \cdot 0.60 + 2 \cdot 0.40 = 1.4$$
$$E(X_2) = \sum x_2 \, P(X_2 = x_2) = (-1) \cdot 0.20 + 1 \cdot 0.80 = 0.6$$

Beispiel 1 / Varianz $V(Y)$

Für die Varianz von Y erhalten wir

$$V(Y) = E[(Y - E(Y))^2] = E[Y^2] - [E(Y)]^2 = \\ = 0^2 \cdot 0.12 + \cdots + 3^2 \cdot 0.32 - 2.0^2 = 0.88$$

Nach unseren Regeln ergibt sich

$$V(Y) = V(X_1 + X_2) = V(X_1) + 2\,\mathrm{Cov}(X_1, X_2) + V(X_2) = \\ = 0.24 + 2 \cdot 0.00 + 0.64 = 0.88$$

Beispiel 1 / Varianz $V(Y)$

$$V(X_1) = \sum x_1^2\, P(X_1 = x_1) - [E(X_1)]^2 = \\ = 1^2 \cdot 0.60 + (2^2) \cdot 0.40 - 1.4^2 = 0.24$$

$$V(X_2) = \sum x_2^2\, P(X_2 = x_2) - [E(X_2)]^2 = \\ = (-1)^2 \cdot 0.20 + 1^2 \cdot 0.80 - 0.6^2 = 0.64$$

$$\mathrm{Cov}(X_1, X_2) = E[X_1 - E(X_1)][X_2 - E(X_2)] = \\ = E[X_1\, X_2] - E(X_1)\, E(X_2) = \\ = \textstyle\sum_{x_1,x_2} x_1 x_2\, P(X_1 = x_1, X_2 = x_2) - E(X_1)\, E(X_2) = \\ = 1 \cdot (-1) \cdot 0.12 + 1 \cdot 1 \cdot 0.48 + \cdots + 2 \cdot 1 \cdot 0.32 - 1.4 \cdot 0.6 = \\ = 0 \qquad \text{(einfacher: } X_1 \text{ und } X_2 \text{ sind unabhängig)}$$

Beispiel 2 – 2-dimensionale Verteilung

Die ZVen X_1 und X_2 besitzen die gleichen Randverteilungen wie in Beispiel 1. Die gemeinsame Verteilung sei hingegen

$P(X_1 = x_1, X_2 = x_2)$	$X_2 = -1$	$X_2 = 1$	$P(X_1 = x_1)$
$X_1 = 1$	0.00	0.60	0.60
$X_1 = 2$	0.20	0.20	0.40
$P(X_2 = x_2)$	0.20	0.80	1.00

Wir suchen für $Y = X_1 + X_2$ Erwartung und Varianz.

	$Y = 0$	$Y = 1$	$Y = 2$	$Y = 3$	
$P(Y = y)$	0.00	0.20	0.60	0.20	1.00

Beispiel 2 / Erwartungswert $\mathrm{E}(Y)$

Für den Erwartungswert von Y erhalten wir

$$\mathrm{E}(Y) = \sum y\,\mathrm{P}(Y = y) = 1 \cdot 0.20 + \cdots + 3 \cdot 0.20 = 2.0$$

Erwartungswert von X_1 und X_2 sind dieselben wie in Beispiel 1.

Nach unseren Regeln ergibt sich daher wie in Beispiel 1

$$\mathrm{E}(Y) = \mathrm{E}(X_1 + X_2) = \mathrm{E}(X_1) + \mathrm{E}(X_2) = 1.4 + 0.6 = 2.0$$

$$\mathrm{E}(X_1) = \sum x_1\,\mathrm{P}(X_1 = x_1) = 1 \cdot 0.60 + 2 \cdot 0.40 = 1.4$$
$$\mathrm{E}(X_2) = \sum x_2\,\mathrm{P}(X_2 = x_2) = (-1) \cdot 0.20 + 1 \cdot 0.80 = 0.6$$

Beispiel 2 / Varianz $\mathrm{V}(Y)$

Für die Varianz von Y erhalten wir

$$\begin{aligned}\mathrm{V}(Y) &= \mathrm{E}[(Y - \mathrm{E}(Y))^2] = \mathrm{E}[Y^2] - [\mathrm{E}(Y)]^2 = \\ &= 1^2 \cdot 0.20 + 2^2 \cdot 0.60 + 3^2 \cdot 0.20 - 2.0^2 = 0.48\end{aligned}$$

Varianzen von X_1 und X_2 sind dieselben wie im Beispiel 1.
Die Kovarianz ist aber neu zu berechnen.
Nach unseren Regeln ergibt sich daher

$$\begin{aligned}\mathrm{V}(Y) &= \mathrm{V}(X_1 + X_2) = \mathrm{V}(X_1) + 2\,\mathrm{Cov}(X_1, X_2) + \mathrm{V}(X_2) = \\ &= 0.24 + 2 \cdot (-0.24) + 0.64 = 0.48\end{aligned}$$

Beispiel 2 / Varianz $\mathrm{V}(Y)$

$\mathrm{V}(X_1) = 0.24$ (Bsp. 1)

$\mathrm{V}(X_2) = 0.64$ (Bsp. 1)

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(X_1, X_2) &= \mathrm{E}[X_1 - \mathrm{E}(X_1)][X_2 - \mathrm{E}(X_2)] = \\ &= \mathrm{E}[X_1\,X_2] - \mathrm{E}(X_1)\,\mathrm{E}(X_2) = \\ &= \textstyle\sum_{x_1,x_2} x_1 x_2\,\mathrm{P}(X_1 = x_1, X_2 = x_2) - \mathrm{E}(X_1)\,\mathrm{E}(X_2) = \\ &= 1 \cdot (-1) \cdot 0.00 + 1 \cdot 1 \cdot 0.60 + \cdots + 2 \cdot 1 \cdot 0.20 - 1.4 \cdot 0.6 = \\ &= -0.24\end{aligned}$$

Beispiel 2 / Korrelation

Durch die Addition der Variablen X_1 zu X_2 wird die Varianz von $X_1 + X_2$ gegenüber der von X_2 alleine deutlich reduziert.

Die Kovarianz ist negativ, $\mathrm{Cov}(X_1, X_2) = -0.24$, und daher auch die Korrelation:

$$\mathrm{Corr}(X_1, X_2) = \frac{\mathrm{Cov}(X_1, X_2)}{\sqrt{\mathrm{V}(X_1)\,\mathrm{V}(X_2)}} = \frac{-0.24}{\sqrt{0.24 \cdot 0.64}} = -0.612$$

Beispiel 3 – Unkorrelierte Zufallsvariable

Gegeben seien n unkorreliert Zufallsvariable, $X_1, \dots, X_n$, die die gleichen Erwartungswerte, $\mathrm{E}(X_1) = \dots = \mathrm{E}(X_n) = \mu$ und die gleichen Varianzen, $\mathrm{V}(X_1) = \dots = \mathrm{V}(X_n) = \sigma^2$ besitzen.

$$\mathrm{V}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{V}(X_i) = \sum_{i=1}^{n} \sigma^2 = n\,\sigma^2$$

Die Varianz steigt proportional mit der Anzahl der Summanden.

Die Standardabweichung steigt nur mit der Wurzel der Anzahl der Summanden:

$$\sqrt{\mathrm{V}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)} = \sqrt{n\,\sigma^2} = \sqrt{n}\,\sigma$$

Beispiel 4 – Diversifikation

Die beiden ZVen R_1 und R_2 sind die Renditen von zwei verschiedenen Wertpapieren. Der aktuell Tageskurs sei bei beiden gleich.
Angenommen die ZVen R_1 und R_2 sind unkorreliert und haben gleichen Erwartungswert und gleiche Varianzen:

$$\mathrm{E}(R_1) = \mathrm{E}(R_2) = \mu, \qquad \mathrm{V}(R_1) = \mathrm{V}(R_2) = \sigma^2$$

Wir stellen 3 Portfolios zusammen:

A. Nur Papier 1,

B. Nur Papier 2,

C. Papier 1 und Papier 2 je mit einem Anteil von $1/2$.

Beispiel 4 – Diversifikation

Wir berechnen von den 3 Portfolios Erwartungswert und Varianz.

$$\mathrm{E}(A) = \mathrm{E}(R_1) = \mu, \qquad \mathrm{V}(A) = \mathrm{V}(R_1) = \sigma^2$$

$$\mathrm{E}(B) = \mathrm{E}(R_2) = \mu, \qquad \mathrm{V}(B) = \mathrm{V}(R_2) = \sigma^2$$

$$\mathrm{E}(C) = \mathrm{E}(\tfrac{1}{2}R_1 + \tfrac{1}{2}R_2) = \tfrac{1}{2}\mathrm{E}(R_1) + \tfrac{1}{2}\mathrm{E}(R_2) = \mu,$$
$$\mathrm{V}(C) = \mathrm{V}(\tfrac{1}{2}R_1 + \tfrac{1}{2}R_2) = (\tfrac{1}{2})^2\mathrm{V}(R_1) + (\tfrac{1}{2})^2\mathrm{V}(R_2) = \tfrac{1}{2}\sigma^2$$

Wir sind indifferent zwischen den Papieren 1 und 2.
Portfolio C liefert hingegen mit derselben erwarteten Rendite nur die halbe Varianz.

Risikostreuung und Korrelation

Die Reduktion der Varianz durch Diversifikation (Risikostreuung) ist auch bei nicht zu stark positiven Korrelationen sinnvoll.

Besonders interessant wird sie bei negativen Korrelationen.

Risikostreuung und $\rho = +1$

Bei starker positiver Korrelation zwischen den Renditen ist die Varianz auch im Portfolio C hoch.

Aus $\mathrm{Corr}(R_1, R_2) = 1$ erhalten wir

$$\mathrm{Cov}(R_1, R_2) = \mathrm{Corr}(R_1, R_2)\,\sqrt{\mathrm{V}(R_1)\,\mathrm{V}(R_2)} = \sigma^2$$

$$\mathrm{E}(C) = \mathrm{E}(\tfrac{1}{2}R_1 + \tfrac{1}{2}R_2) = \tfrac{1}{2}\mathrm{E}(R_1) + \tfrac{1}{2}\mathrm{E}(R_2) = \mu$$

$$\begin{aligned}\mathrm{V}(C) &= \mathrm{V}(\tfrac{1}{2}R_1 + \tfrac{1}{2}R_2) = \\ &= (\tfrac{1}{2})^2\mathrm{V}(R_1) + 2\cdot\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2}\,\mathrm{Cov}(R_1, R_2) + (\tfrac{1}{2})^2\mathrm{V}(R_2) \\ &= \sigma^2\end{aligned}$$

Portfolio C ist nun gleich schlecht wie A oder B.

Risikostreuung und $\rho = -1$

Bei starker negativer Korrelation zwischen den Renditen verschwindet die Varianz im Portfolio C (fast).

Aus $\mathrm{Corr}(R_1, R_2) = -1$ erhalten wir

$$\mathrm{Cov}(R_1, R_2) = \mathrm{Corr}(R_1, R_2)\sqrt{\mathrm{V}(R_1)\,\mathrm{V}(R_2)} = -\sigma^2$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(C) &= \mathrm{E}(\tfrac{1}{2}R_1 + \tfrac{1}{2}R_2) = \tfrac{1}{2}\mathrm{E}(R_1) + \tfrac{1}{2}\mathrm{E}(R_2) = \mu \\
\mathrm{V}(C) &= \mathrm{V}(\tfrac{1}{2}R_1 + \tfrac{1}{2}R_2) = \\
&= (\tfrac{1}{2})^2\mathrm{V}(R_1) + 2\cdot\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2}\,\mathrm{Cov}(R_1, R_2) + (\tfrac{1}{2})^2\mathrm{V}(R_2) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Optimale Risikostreuung

Angenommen zwei Renditen R_1 und R_2 mit $\mathrm{E}(R_1) = \mu_1$, $\mathrm{E}(R_2) = \mu_2$ und $\mathrm{V}(R_1) = \sigma_1^2$, $\mathrm{V}(R_2) = \sigma_2^2$ und Kovarianz σ_{12} liegen vor.
Wir suchen die Kombination $\alpha_1 R_1 + \alpha_2 R_2$ mit minimaler Varianz unter der Einschränkung, dass die Summe der Gewichte 1 sei.

$$\min_{\alpha_1,\alpha_2} \mathrm{V}[\alpha_1 R_1 + \alpha_2 R_2]$$

$$\text{NB: } \alpha_1 + \alpha_2 = 1$$

Lagrange-Ansatz:

$$L(\alpha_1, \alpha_2; \lambda) = \mathrm{V}[\alpha_1 R_1 + \alpha_2 R_2] + \lambda\,(1 - \alpha_1 - \alpha_2)$$

Optimale Risikostreuung

$$L(\alpha_1, \alpha_2; \lambda) = \alpha_1^2\,\sigma_1^2 + 2\,\alpha_1\,\alpha_2\,\sigma_{12} + \alpha_2^2\,\sigma_2^2 + \lambda\,(1 - \alpha_1 - \alpha_2)$$

Notwendige Bedingungen (stationäre Punkte):

$$\begin{aligned}
L_{\alpha_1}: &\quad 2\,\alpha_1\,\sigma_1^2 + 2\,\alpha_2\,\sigma_{12} - \lambda = 0 \\
L_{\alpha_2}: &\quad 2\,\alpha_1\,\sigma_{12} + 2\,\alpha_2\,\sigma_2^2 - \lambda = 0 \\
L_{\lambda}: &\quad 1 - \alpha_1 - \alpha_2 = 0
\end{aligned}$$

Mit $\alpha_2 = 1 - \alpha_1$ ergibt die Lösung des Gleichungssystems

$$\alpha_1 = \frac{\sigma_2^2 - \sigma_{12}}{\sigma_1^2 - 2\,\sigma_{12} + \sigma_2^2}$$

Varianz einer Linearkombination – Allgemein

Gegeben seien n Zufallsvariable, $X_1, \dots, X_n$, wobei die X_i die Erwartungswerte μ_i, die Standardabweichungen σ_i und die Kovarianzen σ_{ij} besitzen,

$$\mathrm{E}(X_i) = \mu_i, \qquad \mathrm{V}(X_i) = \sigma_i^2 = \sigma_{ii}$$

$$\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = \mathrm{E}[(X_i - \mu_i)(X_j - \mu_j)] = \sigma_{ij}$$

Die Varianz einer Linearkombination dieser ZVen, $\sum_{i=1}^n a_i\, X_i$, ist

$$\mathrm{V}\left(\sum_{i=1}^n a_i\, X_i\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i\, a_j\, \sigma_{ij}$$

Varianz einer Linearkombination: $n = 2$

Setzen wir $n = 2$, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
\mathrm{V}\Big(\textstyle\sum_{i=1}^2 a_i\, X_i\Big) &= \textstyle\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 a_i\, a_j\, \sigma_{ij} = \\
&= \textstyle\sum_{j=1}^2 a_1\, a_j\, \sigma_{1j} + \sum_{j=1}^2 a_2\, a_j\, \sigma_{2j} = \\
&= (a_1\, a_1\, \sigma_{11} + a_1\, a_2\, \sigma_{12}) + (a_2\, a_1\, \sigma_{21} + a_2\, a_2\, \sigma_{22}) = \\
&= a_1^2\, \sigma_1^2 + 2\, a_1\, a_2\, \sigma_{12} + a_2^2\, \sigma_2^2 = \\
&= a_1^2\, \mathrm{V}(X_1) + 2\, a_1\, a_2\, \mathrm{Cov}(X_1, X_2) + a_2^2\, \mathrm{V}(X_2)
\end{aligned}$$

Varianz einer Linearkombination: $n = 3$

Setzen wir $n = 3$, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
&\mathrm{V}\Big(\textstyle\sum_{i=1}^3 a_i\, X_i\Big) = \textstyle\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 a_i\, a_j\, \sigma_{ij} = \\
&\quad = \textstyle\sum_{j=1}^3 a_1\, a_j\, \sigma_{1j} + \sum_{j=1}^3 a_2\, a_j\, \sigma_{2j} + \sum_{j=1}^3 a_3\, a_j\, \sigma_{3j} = \\
&\quad = a_1^2\, \sigma_1^2 + 2\, a_1\, a_2\, \sigma_{12} + 2\, a_1\, a_3\, \sigma_{13} + a_2^2\, \sigma_2^2 + 2\, a_2\, a_3\, \sigma_{23} + a_3^2\, \sigma_3^2
\end{aligned}$$

Kovarianzmatrix

Sei $\boldsymbol{X}$ ein Spaltenvektor der ZVen X_i und $\boldsymbol{\mu}$ der zugehörige Vektor der Erwartungswerte.

$$\boldsymbol{X} = (X_1, \dots, X_n)', \qquad \boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_n)'$$

Wir multiplizieren $(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{\mu}) \cdot (\boldsymbol{X} - \boldsymbol{\mu})'$ und erhalten eine $(n \times n)$-Matrix, in Elementschreibweise $[(X_i - \mu_i)(X_j - \mu_j)]_{n \times n}$.
Deren Erwartungswert heißt **Kovarianzmatrix** $\boldsymbol{\Sigma}$ von $\boldsymbol{X}$,

$$\boldsymbol{\Sigma} = \mathrm{E}[(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{\mu})(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{\mu})'] = [\mathrm{E}((X_i - \mu_i)(X_j - \mu_j))]_{n \times n}$$

bzw. mittels Kovarianzen $\sigma_{ij} = \mathrm{E}[(X_i - \mu_i)(X_j - \mu_j)]$

$$\boldsymbol{\Sigma} = [\sigma_{ij}]_{n \times n}$$

Varianz in Matrixschreibweise

Die Varianz einer Linearkombination von ZVen in Matrixschreibweise ist

$$\mathrm{V}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i a_j \sigma_{ij} = \boldsymbol{a}' \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{a}$$

wobei $\boldsymbol{a} = (a_1, \dots, a_n)'$ der Spaltenvektor der Koeffizienten a_i ist.

Eigenschaften der Kovarianzmatrix

Die wichtigsten Eigenschaften der Kovarianzmatrix sind:

- $\boldsymbol{\Sigma}$ ist **symmetrisch**.
  Da $\sigma_{ij} = \mathrm{E}[(X_i - \mu_i)(X_j - \mu_j)] = \mathrm{E}[(X_j - \mu_j)(X_i - \mu_i)] = \sigma_{ji}$ gilt, ist
  $$\boldsymbol{\Sigma} = [\sigma_{ij}] = [\sigma_{ji}] = \boldsymbol{\Sigma}'$$
- $\boldsymbol{\Sigma}$ ist positiv **semidefinit**.
  $$\boldsymbol{a}' \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{a} \geq 0 \qquad \text{für alle Vektoren } \boldsymbol{a}.$$
  Das heißt, die Varianz einer Summe von ZVen ist immer größer oder gleich Null.

Korrelationsmatrix

Die Korrelation, ρ_{ij}, zwischen X_i und X_j erhält man aus

$$\rho_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\sqrt{\sigma_{ii}\,\sigma_{jj}}}$$

wobei $\sigma_{ij} = \mathrm{Cov}(X_i, X_j)$ und $\sigma_{ii} = \mathrm{Cov}(X_i, X_i) = \mathrm{V}(X_i)$.

Die Korrelationsmatrix $\boldsymbol{R}$ des Vektors $\boldsymbol{X}$ ist

$$\boldsymbol{R} = [\rho_{ij}]_{n\times n} = \mathrm{diag}\{\sigma_{11}, \dots, \sigma_{nn}\}^{-1/2} \cdot \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathrm{diag}\{\sigma_{11}, \dots, \sigma_{nn}\}^{-1/2}$$

Die Hauptdiagonale der Korrelationsmatrix besteht nur aus Einsen.

$$\mathrm{diag}\{\sigma_{11}, \dots, \sigma_{nn}\}^{-1/2} = \mathrm{diag}\{\sqrt{\sigma_{11}}, \dots, \sqrt{\sigma_{nn}}\}^{-1}$$

ist Diagonalmatrix mit Standardabweichungen als Diagonalelemente.

Multivariate Normalverteilung

Sei $\boldsymbol{X}$ eine Spaltenvektor von Zufallsvariablen, $\boldsymbol{X} = (X_1, \dots, X_n)'$, die gemeinsam normal verteilt sind.

$$\boldsymbol{X} \sim N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$$

$\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_n)'$ ist der Vektor der Erwartungswerte der X_i.

$$\mu_i = \mathrm{E}(X_i)$$

$\boldsymbol{\Sigma} = [\sigma_{ij}]$ ist die Kovarianzmatrix des Vektors $\boldsymbol{X}$.

$$\sigma_{ij} = \mathrm{E}[(X_i - \mu_i)(X_j - \mu_j)]$$

Man schreibt auch $X \sim MN(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$. (multivariat normal)

Beispiel – Bivariate Normalverteilung

Sei $\boldsymbol{X}$ ein Spaltenvektor von Zufallsvariablen, $X = (X_1, X_2)'$, die gemeinsam normal verteilt sind ($n = 2$).

$$X \sim N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$$

Die Erwartungswerte seien $\boldsymbol{\mu} = (3, 5)'$, die Kovarianzmatrix $\boldsymbol{\Sigma} = [\sigma_{ij}]$ ist gegeben durch $\sigma_{11} = \mathrm{V}(X_1) = 4$, $\sigma_{22} = \mathrm{V}(X_2) = 9$ und $\sigma_{12} = \mathrm{Cov}(X_1, X_2) = 3$.

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \sim N\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix} \right)$$

Cholesky-Zerlegung der Kovarianzmatrix

Jede symmetrische, positiv definite $(n \times n)$-Matrix $\mathbf{\Sigma}$ kann als Produkt einer unteren Dreiecksmatrix $\mathbf{L}$ mit sich selbst zerlegt werden.

$$\mathbf{\Sigma} = \mathbf{L}\,\mathbf{L}'$$

Es gibt auch die Zerlegung

$$\mathbf{\Sigma} = \tilde{\mathbf{L}}\,\mathbf{D}\,\tilde{\mathbf{L}}'$$

Hier ist $\tilde{\mathbf{L}}$ eine untere Dreiecksmatrix mit Einser in der Hauptdiagonale. $\mathbf{D}$ ist eine Diagonalmatrix. Es gilt: $\tilde{\mathbf{L}}\,\sqrt{\mathbf{D}} = \mathbf{L}$.

(Untere Diagonalmatrix heißt, dass die Elemente oberhalb der Hauptdiagonale sind Null.)

Erzeugung von Normalverteilten Zufallsvektoren

Gesucht ist ein Vektor $\mathbf{X}$ mit $\mathbf{X} \sim N(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{\Sigma})$ mit gegebenem $\boldsymbol{\mu}$ und $\mathbf{\Sigma}$. Der Ansatz ist

$$\mathbf{X} = \mathbf{L}\,\boldsymbol{\epsilon} + \boldsymbol{\mu}$$

mit $\mathbf{\Sigma} = \mathbf{L}\,\mathbf{L}'$ und $\boldsymbol{\epsilon} \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{I})$.

1. Berechne Cholesky-Faktor $\mathbf{L}$ der Kovarianzmatrix $\mathbf{\Sigma}$.
2. Generiere beliebig viele Vektoren $\boldsymbol{\epsilon}$ der Länge n mit den üblichen Zufallszahlengeneratoren für standard-normalverteilte univariate Zufallszahlen.
3. Einsetzen in $\mathbf{X} = \mathbf{L}\,\boldsymbol{\epsilon} + \boldsymbol{\mu}$ liefert multivariat normalverteilte Vektoren mit der gewünschten Kovarianz- bzw. Korrelationsstruktur.

Erzeugung von Normalverteilten Zufallsvektoren

Warum funktioniert die Methode?

- Der Erwartungswert von $\mathbf{X}$ ist der gewünschte:

$$\mathrm{E}(\mathbf{X}) = \mathrm{E}(\mathbf{L}\,\boldsymbol{\epsilon} + \boldsymbol{\mu}) = \mathbf{L}\,\mathrm{E}(\boldsymbol{\epsilon}) + \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}$$

  da $\mathrm{E}(\boldsymbol{\epsilon}) = 0$ gilt.

- Die Kovarianzmatrix von $\mathbf{X}$ ist $\mathbf{\Sigma}$:

$$\begin{aligned}\mathrm{V}(\mathbf{X}) &= \mathrm{E}[(\mathbf{X}-\boldsymbol{\mu})\,(\mathbf{X}-\boldsymbol{\mu})'] = \mathrm{E}[(\mathbf{L}\,\boldsymbol{\epsilon})\,(\mathbf{L}\,\boldsymbol{\epsilon})'] = \\ &= \mathrm{E}[(\mathbf{L}\,\boldsymbol{\epsilon})\,(\boldsymbol{\epsilon}'\,\mathbf{L}')] = \mathbf{L}\,\mathrm{E}[\boldsymbol{\epsilon}\,\boldsymbol{\epsilon}']\,\mathbf{L}' = \mathbf{L}\,\mathbf{I}\,\mathbf{L}' = \mathbf{L}\,\mathbf{L}' = \mathbf{\Sigma}\end{aligned}$$

- $\mathbf{X}$ ist normalverteilt, da jedes X_i aus einer Linearkombination der normalverteilten ϵ_j gebildet wird.
  (Vgl. die Reproduktionseigenschaft)