Interdisziplinäres Vertiefungsfach
Grundkurs I: Stochastische Grundlagen der Finanzmathematik
Wahlfach Mathematical Methods: Wahrscheinlichkeitsrechnung

Klaus Pötzelberger
Department of Statistics and Mathematics
Wirtschaftsuniversität Wien

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Motivation

1.1 Risikoanalyse

Abbildung 1.1 zeigt die Kursentwicklung der Microsoft-Aktie zwischen 1995 und 1999. Wir wollen für diese Aktie eine einfache Risikoanalyse durchführen um zu demonstrieren, wie die Kenntnis der Stochastik relevanter Komponenten zur Bestimmung der Verteilung des Aktienkurses bzw. des Verlustes führt.

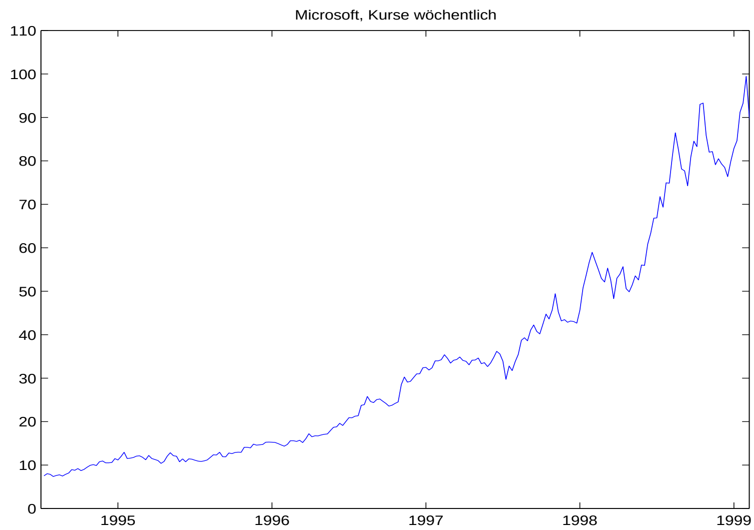

Abbildung 1.1: Aktienkurs

Zuerst müssen wir die Aufgabe konkretisieren. Es wird verlangt, den Verlust für den kommenden Monat abzuschätzen. Als Risikomaß soll der **Value at Risk** zum Niveau 5% berechnet werden. Der Value at Risk (VaR) ist dann der kleinste Verlust, der in höchstens 5% der Fälle überschritten wird. Der Value at Risk wird in vielen Systemen, die das Risiko von Anlagen oder Portfolios abschätzen, verwendet. Er ist auch Teil der meisten gesetzlichen Bestimmungen betreffend Risikoanalyse von Banken. Das Konzept beruht auf folgender Überlegung. Es gibt möglicherweise eine Menge von für den Kursverlauf extrem ungünstigen Szenarios. Diese Menge von Szenarios ist aber unwahrscheinlich, in unserem Fall ist ihre Wahrscheinlichkeit höchstens 5%. Der Value at Risk ist der maximale Verlust unter den restlichen 95% der Szenarios. Der VaR ist also eine obere Schranke für den Verlust im Fall, daß keine extreme Entwicklung eintritt. Allerdings gibt der VaR keine Information, wie groß der Verlust werden kann, oder welcher Verlust erwartet werden kann, falls doch eines der extremen Szenarios eintritt.

Wir bezeichnen den Aktienkurs zum Zeitpunkt t mit S_t. Die Zeit wird in Wochen, beginnend Ende 1999 gerechnet. Es ist $S_0 = 92.735$. Der VaR des Verlusts $V_t = S_0 - S_t$ für $t = 4$ soll berechnet werden. Es ist für $\alpha = 0.05$

$$\mathrm{VaR} = \min\{v \mid P(V_t > v) \leq \alpha\}. \tag{1.1}$$

Bezeichnen wir mit F die **Verteilungsfunktion** von V_t, d.h.

$$F(v) = P(V_t \leq v),$$

dann folgt aus $P(V_t > v) = 1 - P(V_t \leq v) = 1 - F(v)$,

$$\mathrm{VaR} = \min\{v \mid F(v) \geq 1 - \alpha\}. \tag{1.2}$$

Der VaR zum Niveau α ist demnach das $1-\alpha$-**Quantil** des Verlusts V_t. Insbesondere, falls F invertierbar ist, gilt

$$\mathrm{VaR} = F^{-1}(1 - \alpha).$$

Wie aus Abbildung 1.1 ersichtlich, ist das entsprechende Quantil der empirischen Verteilung der Aktienkurse 1994 - 1999 kein brauchbarer Schätzwert. Offensichtlich besitzt der Aktienkurs einen Trend, er steigt mit der Zeit. Damit hängt das empirische Quantil hauptsächlich vom verwendten Zeitfenster ab. Eine Komponente, deren Verteilung wenig oder zumindest weniger von der Zeit abhängen sollte, ist die Rendite. Abbildung 1.2 widerspricht dieser Vermutung zumindest nicht offensichtlich.

Wir wollen zuerst wiederholen, wie aus den Renditen die Kurse berechnet werden. Die **Renditen** R_t sind die relativen Zuwachsraten, d.h. sie sind definiert als

$$R_t = \frac{S_t - S_{t-1}}{S_{t-1}}. \tag{1.3}$$

Dann ist

$$\frac{S_t}{S_{t-1}} = 1 + R_t$$

und damit folgt

$$S_t = S_0(1 + R_1) \times \cdots \times (1 + R_t).$$

So wie bei unterjähriger Verzinsung zwischen effektivem und nominellen Zinssatz unterschieden wird, gibt es eine zweite Definition der Rendite. Man beachte, daß

$$\begin{aligned} S_t &= S_0 \prod_{i=1}^{t} \frac{S_i}{S_{i-1}} \\ &= S_0 \prod_{i=1}^{t} \exp\{\log S_i - \log S_{i-1}\} \\ &= S_0 \exp\{\sum_{i=1}^{t} (\log S_i - \log S_{i-1})\}. \end{aligned}$$

Wir definieren die nominellen oder **logarithmischen Renditen** als Zuwächse der logarithmierten Kurse

$$R_t = \log S_t - \log S_{t-1}. \tag{1.4}$$

Die kumulierten Renditen kürzen wir mit C_t ab,

$$C_t = \sum_{i=1}^{t} R_i.$$

Dann ist

$$\begin{aligned} S_t &= S_0 \exp\{\sum_{i=1}^{t} R_i\} \\ &= S_0 \exp C_t. \end{aligned}$$

Renditen durch (1.4) zu definieren, hat zwei Vorteile. Es ist leichter mit Summen als mit Produkten zu rechnen. Darüber hinaus machen kumulierte Renditen auch im zeitstetigen Fall Sinn. Für kurze Perioden ist die Rendite klein. Da für $x \approx 0$

$$\log(1 + x) \approx x$$

gilt, ist

$$\begin{aligned} \log\left(\frac{S_i}{S_{i-1}}\right) &= \log\left(\frac{S_i - S_{i-1}}{S_{i-1}} + 1\right) \\ &\approx \frac{S_i - S_{i-1}}{S_{i-1}}. \end{aligned}$$

Die beiden Definitionen der Renditen werden demnach Werte liefern, die sich nur wenig unterscheiden.

Da $V_t = S_0 - S_0 \exp C_t$ gilt, sieht man leicht, daß der VaR zum Niveau gleich $S_0 - S_0 \exp Q_\alpha$ ist. Q_α bezeichnet hier das α-Quantil von C_t. Die folgenden Annahmen erlauben die Berechnung von Q_α.

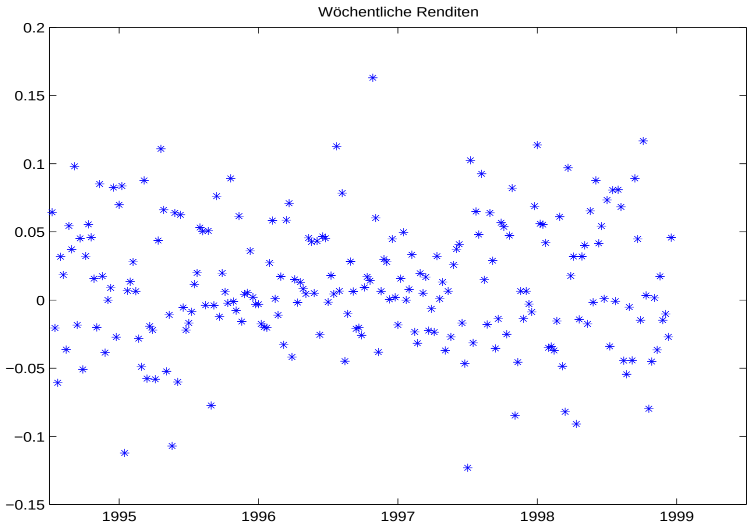

Abbildung 1.2: Renditen

1. Ist Q_α das α-Quantil einer Zufallsgröße Z, sind $a > 0$ und b reelle Zahlen, dann ist $aQ_\alpha + b$ das α-Quantil von $X = aZ + b$. Insbesondere ist ist $-1.6449\sigma + \mu$ das 0.05-Quantil von $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

2. Sind $R_1, \ldots, R_t$ unabhängig mit $\mathbb{E}[R_i] = \mu$ und $\mathbb{V}[R_i] = \sigma^2$, und ist $C_t = R_1 + \cdots + R_t$, dann sind $\mathbb{E}[C_t] = t\mu$ und $\mathbb{V}[C_t] = t\sigma^2$.

3. Sind $R_1, \ldots, R_t$ unabhängig und normalverteilt, $R_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, dann ist das 0.05-Quantil von $C_t = R_1 + \cdots + R_t$ gleich
$$-1.6449\sigma\sqrt{t} + t\mu.$$

In unserem Fall sind $\mu = 0.011$ und $\sigma = 0.045$. Mit $S_0 = 92.735$ und $t = 4$ folgt

$$\begin{aligned} q &= -1.6449 \times 0.045 \times \sqrt{4} + 4 \times 0.011 = -0.104, \\ VaR &= 92.735 - 92.735 \times \exp(-0.104) = 9.163. \end{aligned}$$

1.2 Aufgaben

AUFGABE 1.1. X_t und Y_t bezeichnet die Preise zweier Aktien (X und Y) zum Zeitpunkt t. Es sei

$$X_0 = 5, \quad X_1 = X_0 e^{-\sigma_1^2/2+\sigma_1 Z}, \quad \sigma_1 = 0.25,$$
$$Y_0 = 15, \quad Y_1 = Y_0 e^{-\sigma_2^2/2+\sigma_2 Z}, \quad \sigma_2 = 0.5,$$

$Z \sim N(0,1)$. Berechnen Sie den Value at Risk zum Niveau 5% eines Portfolios, das aus 10 Aktien X und 20 Aktien Y besteht.

AUFGABE 1.2. Sei X_t der Preis einer Aktie zum Zeitpunkt t. Es sei

$$X_0 = 10, \quad X_1 = X_0 e^{-\sigma^2/2+\sigma Z},$$

$\sigma = 0.5$ und $Z \sim N(0,1)$. Berechnen Sie den Value at Risk zum Niveau 5% eines Portfolios, das aus 200 Aktien besteht.

AUFGABE 1.3. Seien X_t und Y_t die Preise zweier Aktien (X und Y) zum Zeitpunkt t. Es sei

$$X_0 = 10, \quad X_1 = X_0 e^{-\sigma^2/2+\sigma Z}$$
$$Y_0 = 10, \quad Y_1 = Y_0 e^{-\sigma^2/2-\sigma Z},$$

$\sigma = 0.5$ und $Z \sim N(0,1)$. Berechnen Sie den Value at Risk zum Niveau 5% eines Portfolios, das aus 100 Aktien X und 100 Aktien Y besteht.

AUFGABE 1.4. Ein Unternehmer nimmt einen Kredit von 1000 Euro auf. Diese 1000 Euro werden investiert und bringen nach einem Jahr 1100 Euro (risikolos). Der Zinssatz ist stochastisch, nach einem Jahr sind

$$1000 e^{0.08 Z^2}$$

Euro zurückzuzahlen, mit $Z \sim N(0,1)$. Berechnen Sie den Value at Risk zum Niveau 5%. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß diese Investition einen Gewinn erbringt?

AUFGABE 1.5. Eine Bank vergibt Kredite der Höhe 1000 Euro an Kunden, die nach einem Jahr diesen Betrag verzinst zurückzahlen. D.h. es wird ein Zinssatz r festgelegt und die Bank erhält nach einem Jahr

$$1000(1+r)$$

Euro. Es ist aber nicht auszuschließen, daß die Kreditnehmer in Konkurs gehen, dann verliert die Bank das verliehene Geld. Für jeden Kreditnehmer beträgt die Wahrscheinlichkeit eines Konkurses 0.1.

Wir muß r gewählt werden, damit die Bank im Durchschnitt eine Rendite (Zinssatz) von 7% erhält? Wir muß r gewählt werden, damit die Bank mit 95% Sicherheit mindestens eine Rendite (Zinssatz) von 7% erhält, wenn sie $n = 10$ bzw. $n = 1000$ Kredite vergibt?

AUFGABE 1.6. Eine Bank vergibt Kredite an Kunden, die nach einem Jahr den Kredit verzinst zurückzahlen, falls sie nicht in Konkurs gehen. Im Konkursfall verliert die Bank das Geld. Es ist bekannt, daß es zwei Typen von Kreditnehmern gibt. Typ 1 geht sicher nicht in Konkurs, Typ 2 geht mit Wahrscheinlichkeit 20% in Konkurs. 40% der verliehenen Gelder gehen an Kunden vom Typ 1, 60% an Kunden vom Typ 2. Die Bank will im Durchschnitt eine Rendite von 8% erreichen. Wir muß der Zinssatz für die beiden Typen von Kreditnehmern gewählt werden, wenn die Bank in der Lage ist zu entscheiden, zu welchem Typ der Kreditnehmer gehört.
Wir muß der Zinssatz für die beiden Typen von Kreditnehmern gewählt werden, wenn die Bank nicht in der Lage ist zu entscheiden, zu welchem Typ der Kreditnehmer gehört.

1.3 Formelsammlung

Binomialverteilung $\mathbf{B(n,p)}$.

$$P(\{k\}) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k},$$

$k = 0, 1, \ldots, n$. Erwartungswert: $\mu = np$, Varianz: $\sigma^2 = np(1-p)$.

```
dbinom(x, size, prob, log = FALSE)
pbinom(q,size,prob,lower.tail= TRUE, log.p = FALSE)
qbinom(p,size,prob,lower.tail=TRUE,log.p = FALSE)
rbinom(n, size, prob)
```

Poissonverteilung $\mathbf{P}(\lambda)$.

$$P(\{k\}) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!},$$

$k \in \mathbb{N}$. Erwartungswert: $\mu = \lambda$, Varianz: $\sigma^2 = \lambda$.

```
dpois(x, lambda, log = FALSE)
ppois(q, lambda, lower.tail = TRUE, log.p = FALSE)
qpois(p, lambda, lower.tail = TRUE, log.p = FALSE)
rpois(n, lambda)
```

Normalverteilung $\mathbf{N}(\mu, \boldsymbol{\sigma^2})$. Dichte:

$$\phi_{\mu,\sigma^2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp -\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}.$$

```
dnorm(x, mean=0, sd=1, log = FALSE)
pnorm(q, mean=0, sd=1, lower.tail = TRUE,log.p = FALSE)
qnorm(p, mean=0, sd=1, lower.tail = TRUE, log.p = FALSE)
rnorm(n, mean=0, sd=1)
```

Gleichverteilung $\mathbb{U}[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$. Dichte:

$$f(x) = \frac{1}{b-a}$$

für $a \leq x \leq b$ und $f(x) = 0$ für $x \notin [a, b]$. Erwartungswert: $\mu = (a+b)/2$, Varianz $\sigma^2 = (b-a)^2/12$.

```
dunif(x, min=0, max=1, log = FALSE)
punif(q, min=0, max=1, lower.tail = TRUE, log.p = FALSE)
qunif(p, min=0, max=1, lower.tail = TRUE, log.p = FALSE)
runif(n, min=0, max=1)
```

Gammaverteilung $\boldsymbol{\Gamma}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$. Dichte:

$$f(x) = \frac{b^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-bx},$$

für $x > 0$ und $f(x) = 0$ sonst. Erwartungswert $\mu = a/b$, Varianz: $\sigma^2 = a/b^2$. $\Gamma(1, b)$ heißt Exponentialverteilung.
$\Gamma(1) = 1$,$\Gamma(a + 1) = a\Gamma(a)$.

```
dgamma(x, shape, scale=1, log = FALSE)
pgamma(q, shape, scale=1, lower.tail = TRUE, log.p = FALSE)
qgamma(p, shape, scale=1, lower.tail = TRUE, log.p = FALSE)
rgamma(n, shape, scale=1)
```

t**-Verteilung $\mathbf{t}(\mathbf{d})$**. Dichte:

$$f(x) = \frac{\Gamma((d+1)/2)}{\sqrt{\pi}\Gamma(d/2)} (1 + x^2/d)^{-(d+1)/2}.$$

Erwartungswert : $\mu = 0$ (für $d > 1$), Varianz: $\sigma^2 = d/(d - 2)$ (für $d > 2$).

```
dt(x, df, log = FALSE)
pt(q, df, ncp=0, lower.tail = TRUE, log.p = FALSE)
qt(p,df, lower.tail = TRUE, log.p = FALSE)
rt(n, df)
```

Pareto - Verteilung $\mathbf{Par}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$. Verteilungsfunktion (für $x \geq 0$):

$$F(x) = 1 - \left(\frac{b}{x+b}\right)^a,$$

Dichte (für $x \geq 0$):

$$f(x) = \frac{ab^a}{(x+b)^{a+1}}.$$

Erwartungswert $\mu = b/(a - 1)$ (für $a > 1$), Varianz (für $a > 2$): $\sigma^2 = ab^2/((a - 1)^2(a - 2))$.

Dichten von gemeinsamer und bedingter Verteilung und der Randverteilung.

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(x \mid y) f_Y(y) \\ f_X(x) &= \int f(x, y) dy \\ f(x \mid y) &= \frac{f(x, y)}{f_Y(y)} \end{aligned}$$

Kovarianz und Korrelation.

$$\begin{aligned} \mathbb{C}ov[X,Y] &= \mathbb{E}[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)] \\ \mathbb{C}or[X,Y] &= \frac{\mathbb{C}ov[X,Y]}{\sigma_X \sigma_Y} \end{aligned}$$

Kovarianzmatrix. Erwartungswert und Kovarianzmatrix von $Y = AX$ sind $\mu_Y = A\mu_X$ und $\Sigma_Y = A\Sigma_X A'$.
Spektraldarstellung:

$$\Sigma = UDU'$$

U orthogonal, D diagonal.
Choleskyzerlegung:

$$\Sigma = C'C$$

C obere Dreiecksmatrix.
Multivariate Normalverteilung. $X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$, $Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$, Korrelation ρ.

$$\begin{aligned} X \mid Y = y &\sim N(a + by, (1-\rho^2)\sigma_X^2) \\ b &= \rho \frac{\sigma_X}{\sigma_Y} \\ a &= \mu_X - b\mu_Y \end{aligned}$$

Maxima und Minima.

$$\begin{aligned} F_{max,n}(x) &= F(x)^n \\ 1 - F_{min,n}(x) &= (1-F(x))^n \end{aligned}$$

Simulation. $X_1, \ldots, X_n$ u.a., $X_i \sim f$
Erwartungswerte:

$$\mu = \int g(x)f(x)dx$$

$$\hat{\mu}_n = \frac{g(X_1) + \cdots + g(X_n)}{n}$$

Genauigkeit

$$\pm 1.96\sqrt{\hat{\sigma}^2/n}$$

Quantile: Empirisches Quantil $\hat{Q}_p$.
Genauigkeit:

$$[X_{(c_1)}, X_{(c_2)}]$$

c_1: $(1-\alpha)/2$-Quantil der $B(n,p)$-Verteilung, c_2: $(1+\alpha)/2$-Quantil der $B(n,p)$-Verteilung.

Kapitel 2

Univariate Zufallsgrößen

2.1 Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Ein Zufallsexperiment besteht aus einer Menge Ω und einem Zufallsmechanismus. Dieser Zufallsmechanismus wählt Elemente $\omega \in \Omega$, die sogenannten **Elementarereignisse** oder **Szenarien**, aus. Diese Auswahl wird entsprechend einer Wahrscheinlichkeitsverteilung P gesteuert, sodaß für gewisse Teilmengen $A \subseteq \Omega$, die **Ereignisse**, die Wahrscheinlichkeit, daß das gewählte Szenario ω in A liegt, gleich $P(A)$ ist.
Um mit Wahrscheinlichkeiten rechnen zu können, muß die Menge der Ereignisse einfache Bedingungen erfüllen. Identifiziert man die Aussage "ω liegt in A" mit dem Ereignis A, dann entspricht der Aussage "ω liegt nicht in A" das Ereignis A^c, das Komplement von A. Sind A und B Ereignisse, dann entspricht $A \cap B$ der Aussage "ω liegt in A und ω liegt in B", $A \cup B$ der Aussage "ω liegt in A oder ω liegt in B". Man beachte, daß den logischen Operationen "und", "oder", "nicht" die mengentheoretischen "Durchschnitt" $\cap$, "Vereinigung" $\cup$, "Komplement" ^{c} entsprechen.

Eine Klasse $\mathcal{F}$ von Mengen $A \subseteq \Omega$ heißt **σ-Algebra**, falls

1. $\emptyset, \Omega \in \mathcal{F}$.
2. Aus $A, B \in \mathcal{F}$ folgt $A^c, A \cap B, A \cup B \in \mathcal{F}$.
3. Falls $A_i \in \mathcal{F}$ für $1 \leq i < \infty$, dann gelte $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.

$\mathcal{F}$ wird als **Algebra** bezeichnet falls nur 1. und 2. gelten.
Ereignisse A (d.h. Elemente der σ-Algebra $\mathcal{F}$) werden auch als **meßbare** Mengen bezeichnet.

Sei $\mathcal{F}$ eine σ-Algebra auf Ω. Eine **Wahrscheinlichkeit** P ist eine Abbildung $P : \mathcal{F} \to [0, 1]$ mit

1. $P(\emptyset) = 0$, $P(\Omega) = 1$.

2. $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$
   für alle Folgen $(A_i)_{i=1}^{\infty}$ von paarweise disjunkten Ereignissen A_i.

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ heißt **Wahrscheinlichkeitsraum**, Ω **Grundraum**. Eine Menge A heißt P-**Nullmenge**, falls $P(A) = 0$.

Sei $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Abbildung und $A \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge von $\mathbb{R}$. Um der Aussage "X liegt in A" eine Wahrscheinlichkeit zuordnen zu können, muß $X^{-1}(A) = \{\omega \mid X(\omega) \in A\}$ ein Ereignis (d.h. ein Element von $\mathcal{F}$) sein. Eine Abbildung $X : \Omega \to \mathbb{R}$ heißt **meßbar**, wenn für alle Intervalle A die Menge $X^{-1}(A)$ ein Ereignis ist. Eine meßbare Abbildung heißt auch **Zufallsvariable** oder **Zufallsgröße**.
Die **Verteilung** einer Zufallsgröße $X : \Omega \to \mathbb{R}$ ist eine Wahrscheinlichkeit mit Grundraum $\mathbb{R}$. Sie wird definiert durch $P^X(A) = P(X \in A) = P(X^{-1}(A)) = P(\{\omega \mid X(\omega) \in A\})$.

2.1 BEISPIEL. Sei R die zukünftige Rendite eines Wertpapiers X. Diese Rendite sei zufällig. Es wird also unterstellt, daß ein Zufallsmechanismus, in der Regel das komplizierte Zusammenspiel verschiedener am Markt wirksamer Faktoren, eine Rendite $R = \omega$ aus einer Menge von möglichen Renditen Ω entsprechend einer Wahrscheinlichkeitsverteilung auswählt.
Es wird angenommen, daß jeder Rendite $\omega \in [-0.1, 0.2]$ möglich ist. Die Wahrscheinlichkeit, daß die Rendite in einem Intervall $[a, b] \subseteq [-0.1, 0.2]$ liegt, sei $(b-a)/0.3$. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung ist daher für alle Intervalle und für alle Ereignisse, die sich durch Vereinigung, Durchschnittbildung und Komplementbildung aus Intervallen erzeugen lassen, festgelegt.
Es soll die Wahrscheinlichkeit berechnet werden, daß die Rendite größer als 0.1 oder kleiner als -0.05 ist. Das Ereignis $A = [-0.1, -0.05) \cup (0.1, 0.2]$ besitzt die Wahrscheinlichkeit

$$P(A) = P([-0.1, -0.05)) + P((0.1, 0.2]) = \frac{-0.05 - (-0.1)}{0.3} + \frac{0.2 - 0.1}{0.3} = \frac{0.05 + 0.1}{0.3} = \frac{1}{2}.$$

Man kann diese Wahrscheinlichkeit auch berechnen, indem man aus $A = [-0.05, 0.1]^c$ und

$$P([-0.05, 0.1]) = \frac{0.1 - (-0.05)}{0.3} = \frac{0.15}{0.3} = \frac{1}{2}$$

auf

$$P(A) = 1 - P([-0.05, 0.1]) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

schließt.
Das Wertpapier X koste zur Zeit $x_0 = 100$ Euro, nach einer Periode $X = x_0 e^R$. Der Preis des Wertpapiers ist eine Funktion der Rendite. Seine Verteilung kann mit Hilfe der Verteilung der

Rendite berechnet werden. Für Intervalle $[a, b]$ ist

$$P(X \in [a,b]) = P(x_0 e^R \in [a,b]) = P(R \in [\log(a/x_0), \log(b/x_0)]).$$

$X = x_0 e^R$ ist eine meßbare Funktion der Rendite R. Die Verteilung von X kann angegenen werden, weil X eine Funktion von R ist und die Wahrscheinlichkeit $P(R \in A)$ für genügend viele Ereignisse A festgelegt ist.
Wir betrachten ein weiteres Wertpapier Y. Y zahlt einen Euro, wenn $R > 0$ und 0 Euro, wenn $R \leq 0$. D.h. Y zahlt einen Euro, wenn der Aktienkurs steigt. Y ist wieder eine Funktion von R,

$$Y = I_{(0,0.2]}(R).$$

Y kann nur zwei Werte, 1 und 0, annehmen,

$$\begin{aligned} P(Y=1) &= P(R>0) = \frac{0.2-0}{0.3} = \frac{2}{3}, \\ P(Y=0) &= P(R \leq 0) = \frac{0-(-0.1)}{0.3} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Um die Verteilung von X angeben zu können, benötigt man für alle Intervalle $[a, b]$ die Wahrscheinlichkeiten $P(R \in [a,b])$. Im Gegensatz dazu reicht die Kenntnis der Wahrscheinlichkeiten der beiden Ereignisse $(-0.1, 0]$ und $(0, 0.2]$, um die Verteilung von Y angeben zu können. Typischerweise wird jemand, der nur Y beobachtet, die Wahrscheinlichkeit dieser beiden Intervalle spezifiziert haben, d.h. seine Ereignisse sind $A_1 = (-0.1, 0]$, $A_2 = (0, 0.2]$, $\Omega = [-0.1, 0.2] = A_1 \cup A_2$ und $\emptyset = A_1 \cap A_2$. Es wird dann nur die Wahrscheinlichkeit, daß die Aktie steigt modelliert. In diesem Fall ist X nicht meßbar.

$\square$

2.2 Diskrete und stetige Verteilungen

Bei vielen Wahrscheinlichkeitsverteilung ist es schwierig, eine Vorschrift anzugeben, um $P(A)$ zu berechnen. Für diskrete Verteilungen und Verteilungen, die eine Dichte besitzen, kann zumindest für relevante Ereignisse $P(A)$ berechnet werden.
Eine Verteilung P heißt **diskret**, falls es $(\omega_i)_{i=1}^{\infty}$ und nichtnegative Zahlen $(p_i)_{i=1}^{\infty}$ gibt mit

$$\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1 \tag{2.1}$$

und

$$P(\{\omega_i\}) = p_i. \tag{2.2}$$

In diesem Fall ist

$$P(A) = \sum_{\omega_i \in A} p_i. \tag{2.3}$$

Die Abbildung $i \mapsto p_i$ heißt **Wahrscheinlichkeitsfunktion**. Die Menge $\mathcal{S} = \{\omega \mid P(\{\omega\}) > 0\}$ ist der Träger der diskreten Verteilung. Eine meßbare Menge ist eine Nullmenge,genau dann, wenn $A \subseteq \mathcal{S}^c$.

In Beispiel 2.1 ist die Verteilung von Y diskret, der Träger ist $\{0,1\}$, $p_0 = 1/3$, $p_1 = 1 - p_0 = 2/3$.

Sei P eine Verteilung auf $\mathbb{R}$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion, sodaß für alle Intrvalle $[a,b]$

$$P([a,b]) = \int_a^b f(x)dx. \tag{2.4}$$

f heißt dann **Dichte** von P, P heißt **absolut stetig**. Für eine Dichte f gilt

$$f(x) \geq 0 \tag{2.5}$$

und

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1. \tag{2.6}$$

Jede Funktion f, die (2.5) und (2.6) erfüllt, definiert durch (2.4) eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf $\mathbb{R}$.

Der Träger einer absolut stetigen Verteilung mit Dichte f ist $\mathcal{S} = \{\omega \mid f(\omega) > 0\}$. Jede meßbare Menge $A \subseteq \mathcal{S}^c$ ist eine Nullmenge.

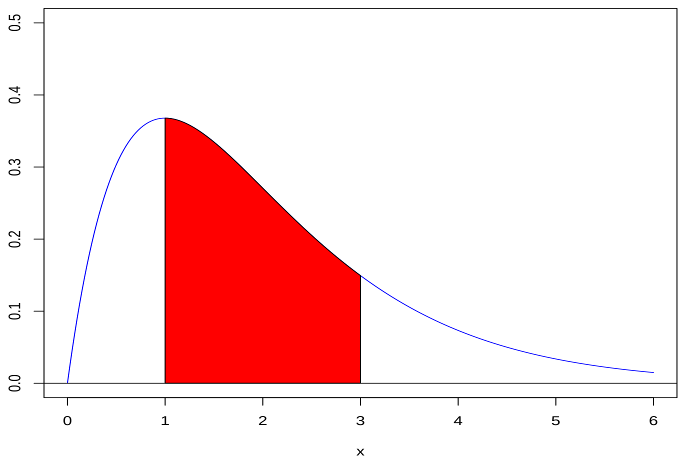

Abbildung 2.1: $P([1,3])$

In Beispiel 2.1 ist die Verteilung von R (und von X) stetig. R besitzt die Dichte

$$f(r) = \begin{cases} 10/3 & \text{falls } -1/10 \leq r \leq 2/3 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

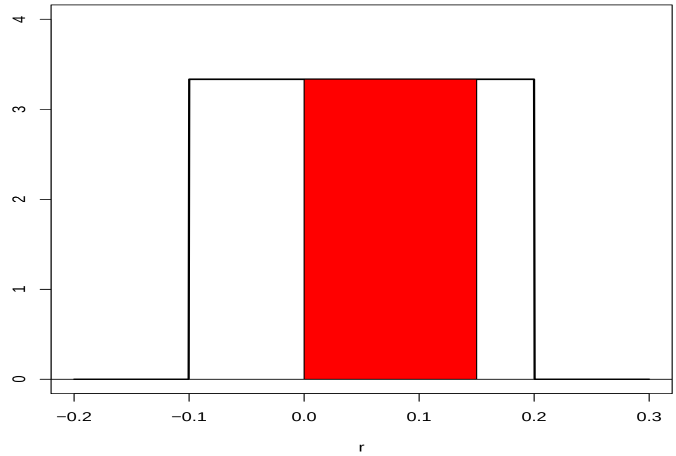

Abbildung 2.2: Dichte von R, $P(R \in [0, 0.15])$

Sind P_1 und P_2 Verteilungen, dann ist auch für alle $\alpha \in [0,1]$, $P = \alpha P_1 + (1-\alpha)P_2$, definiert durch

$$P(A) = \alpha P_1(A) + (1-\alpha)P_2(A),$$

eine Verteilung. P ist die **Mischung** von P_1 und P_2.
Nicht alle Verteilungen sind diskret, absolut stetig oder Mischungen von diskreten und absolut stetigen Verteilungen.
Verteilungen auf $\mathbb{R}$ können auch durch die **Verteilungsfunktion**

$$F(x) = P((-\infty, x]) \tag{2.7}$$

beschrieben werden. Besitzt P eine stetige Dichte f, dann ist F eine Stammfunktion von f und es gilt $F'(x) = f(x)$.
Die Verteilungsfunktion diskreter Verteilungen ist stückweise konstant. Sie besitzt an alle Szenarien ω, die im Träger liegen, Sprünge der Höhe $P(\{\omega\})$.
In der elementaren Statistik werden Wahrscheinlichkeiten als Grenzwerte von relativen Häufigkeiten und Erwartungswerte als Grenzwerte von aritmetischen Mitteln eingeführt. Sei X eine Zufallsgröße, die die Werte $a_1, a_2, \ldots, a_m$ mit den Wahrscheinlichkeiten $P(\{a_1\}), P(\{a_2\}), \ldots, P(\{a_m\})$ annimmt.

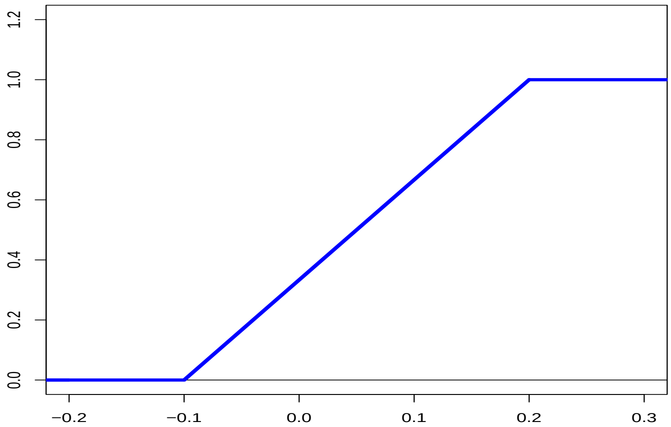

Abbildung 2.3: Verteilungsfunktion von R

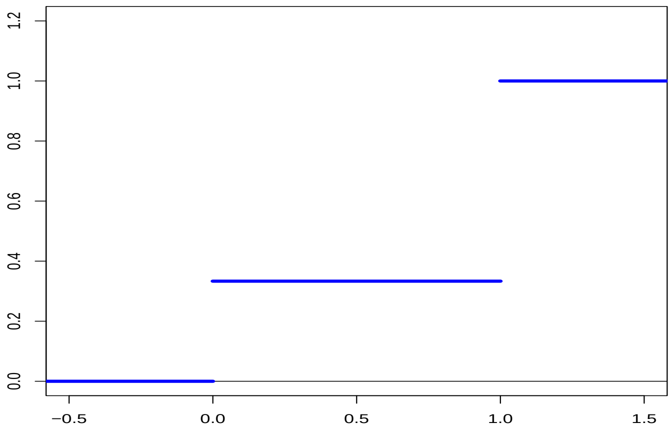

Abbildung 2.4: Verteilungsfunktion von Y

Sei $X_1, \ldots, X_n$ eine Stichprobe und $f_n(\{a_1\}), f_n(\{a_2\}), \ldots, f_n(\{a_m\})$ die relativen Häufigkeiten. Dann ist

$$\bar{X}_n = a_1 f_n(\{a_1\}) + a_2 f_n(\{a_2\}) + \cdots + a_m f_n(\{a_m\}).$$

Konvergieren die relativen Häufigkeiten gegen die Wahrscheinlichkeiten,

$$\lim_{n\to\infty} f_n(\{a_i\}) = P(\{a_i\}),$$

dann ist der Grenzwert von $\bar{X}_n$

$$\lim_{n\to\infty} \bar{X}_n = a_1 P(\{a_1\}) + a_2 P(\{a_2\}) + \cdots + a_m P(\{a_m\}).$$

Bei gegebener Verteilung P, wird man den Erwartungswert $\mu = \mathbb{E}[X]$ von $X \sim P$ durch

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i P(\{a_i\})$$

definieren. Der Erwartungswert ist das mit den Wahrscheinlichkeiten gewichtete Mittel der Werte, die die Zufallsgröße annimmt. Im stetigen Fall (mit Dichte f) ist

$$\mu = \int x f(x) dx.$$

Schwierigkeiten können auftreten, wenn diese Summe (oder dieses Integral) nicht endlich ist.
Sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ eine Wahrscheinlichkeit auf $\mathbb{R}$ und $g : \Omega \to \mathbb{R}$ meßbar. Wir definieren das **Integral** bzw. den **Erwartungswert** $\int g(\omega) dP(\omega)$ von g für diskrete und stetige Verteilungen P.
Sei P diskret mit $P(\{\omega_i\}) = p_i$. g besitzt einen endlichen Erwartungswert, falls

$$\sum_{i=1}^{\infty} |g(\omega_i)| p_i < \infty.$$

In diesem Fall nennen wir

$$\mathbb{E}[g] = \sum_{i=1}^{\infty} g(\omega_i) p_i \tag{2.8}$$

den Erwartungswert von g bez. P.
Ist P stetig mit Dichte f, dann ist g integrierbar (besitzt einen endlichen Erwartungswert), falls

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)| f(x) dx < \infty.$$

Das Integral bzw. der Erwartungswert von g bez. P ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x) dx. \tag{2.9}$$

Den Erwartungswert von g bezeichnen wir auch mit $\mathbb{E}[g]$ oder mit $\mathbb{E}^P[g]$.
Ist P die Verteilung der Zufallsgröße X und $g(x) = x$, dann ist $\mu = \mathbb{E}[g] = \mathbb{E}[X]$ der Erwartungswert von X.
$g(x) = x^p$ liefert das p-te **Moment** $\mathbb{E}[X^p]$, $g(x) = (x-\mu)^p$ das **zentrierte** p-te Moment $\mathbb{E}[(X-\mu)^p]$.
Das zentrierte zweite Moment $\sigma^2 = \mathbb{E}[(X-\mu)^2]$ ist die **Varianz** von X.
Für **Indikatorfunktionen** I_A von Ereignissen A ist $\mathbb{E}[I_A] = P(A)$.

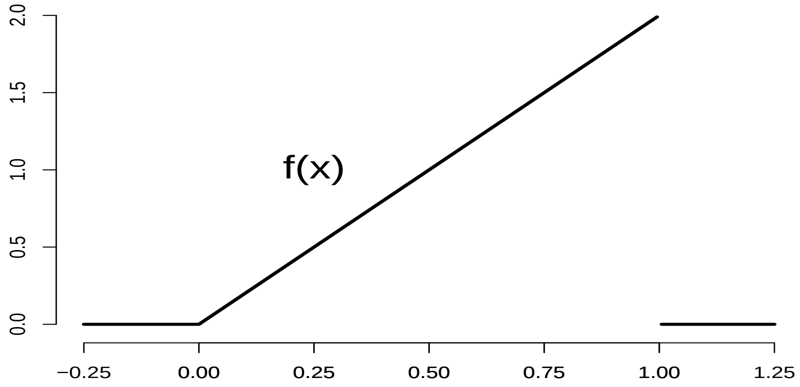

Abbildung 2.5: Dichte $f(x) = 2x$

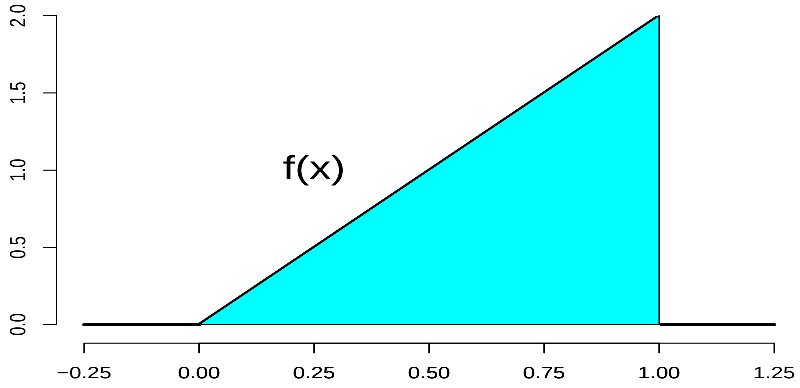

Abbildung 2.6: $\int_0^1 f(x)dx$

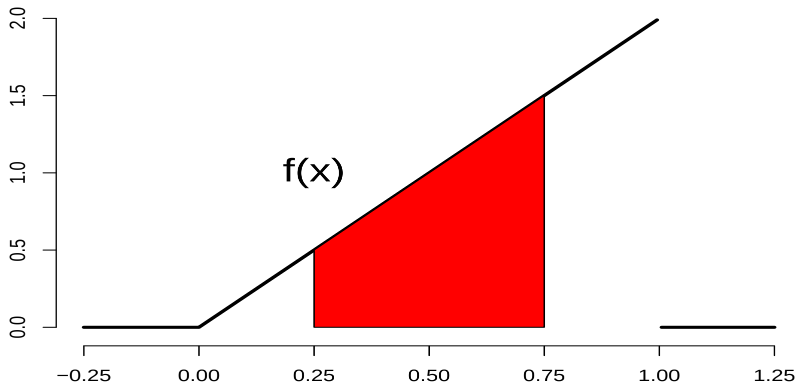

Abbildung 2.7: $\int_{1/4}^{3/4} f(x)dx$

2.2 BEISPIEL. Sei $f(x) = 2x$ für $x \in [0,1]$ und $f(x) = 0$ für $x \notin [0,1]$. f ist nichtnegativ. Aus

$$\int f(x)fx = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 2xdx = x^2 \mid_0^1 = 1 - 0 = 1.$$

f ist die Dichte einer Zufallsgröße X. Die Stammfunktion von $f(x)$ ist $F(x) = x^2$ (für $x \in [0,1]$). Natürlich ist $F(x) = 0$ für $x < 0$ und $F(x) = 1$ für $x > 1$. Wir wollen $P(X \in [1/4, 3/4])$, $\mu = \mathbb{E}[X]$ und die Varianz σ^2 berechnen.

$$P(X \in [1/4, 3/4]) = \int_{1/4}^{3/4} f(x)dx = F(3/4) - F(1/4) = (3/4)^2 - (1/4)^2 = 1/2.$$

$$\mu = \mathbb{E}[X] = \int_0^1 xf(x)dx = \int_0^1 x2xdx = 2/3.$$

$$\mu_2 = \mathbb{E}[X^2] = \int_0^1 x^2 f(x)dx = \int_0^1 x^2 2xdx = 2/4 = 1/2.$$

$$\sigma^2 = \mathbb{E}[(X-\mu)^2] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = 1/2 - (2/3)^2 = 1/18.$$

□

Wir wollen einige Eigenschaften von Erwartungswerten zusammenfassen:

1. Ist $f = 0$ fast sicher, dann ist $\mathbb{E}[f] = 0$.

2. Ist $\mathbb{E}[\mid f \mid] < \infty$ und $\mid g \mid \leq \mid f \mid$, dann ist $\mathbb{E}[\mid g \mid] < \infty$.

3. Ist $f \geq 0$ fast sicher, dann ist $\mathbb{E}[f] \geq 0$. Sind f und g integrierbar und $g \leq f$, dann ist $\mathbb{E}[g] \leq \mathbb{E}[f]$.

4. Ist $f \geq 0$ fast sicher und $P(f > 0) > 0$, dann ist $\mathbb{E}[f] > 0$.

5. Sind f und g integrierbar und $a, b \in \mathbb{R}$, dann ist $af + bg$ integrierbar und es gilt

$$\mathbb{E}[af + bg] \leq \mathbb{E}[\mid af + bg \mid] \leq \mid a \mid \mathbb{E}[\mid f \mid] + \mid b \mid \mathbb{E}[\mid g \mid].$$

6. Ist $f \geq 0$ mit $\mathbb{E}[f] = 1$, dann ist durch

$$G(A) = \mathbb{E}[I_A f]$$

für Ereignisse A, eine Wahrscheinlichkeitsverteilung definiert. G heißt **absolut stetig** bezüglich P, $G << P$. f ist die Dichte von G bezüglich P,

$$f = \frac{dG}{dP}.$$

Aus $G << P$ folgt für alle P-Nullmengen A, daß auch $G(A) = 0$. Man kann zeigen, daß für zwei Verteilungen P und G sogar gilt: G ist absolut stetig bez. P genau dann, wenn für alle Ereignisse A aus $P(A) = 0$ auch $G(A) = 0$ folgt.

2.3 Beispiele von Verteilungen

2.3.1 Binomialverteilung $\mathbf{B(n, p)}$

Für $n \in \mathbb{N}$ und $p \in [0, 1]$ ist die **Binomialverteilung** $B(n, p)$ definiert durch

$$P(\{k\}) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k},$$

$k = 0, 1, \ldots, n$. Erwartungswert und Varianz sind $\mu = np$ bzw. $\sigma^2 = np(1-p)$.

```
dbinom(x, size, prob, log = FALSE)                    # Dichte, d.h. Wahrsch.funktion
pbinom(q,size,prob,lower.tail= TRUE, log.p = FALSE)   # Verteilungsfunktion
qbinom(p,size,prob,lower.tail=TRUE,log.p = FALSE)     # Quantile
rbinom(n, size, prob)                                 # Zufallszahlen
```

2.3.2 Poissonverteilung $\mathbf{P}(\lambda)$

Für $\lambda \geq 0$ ist die **Poissonverteilung** $P(\lambda)$ definiert durch

$$P(\{k\}) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!},$$

$k \in \mathbb{N}$. Erwartungswert und Varianz sind $\mu = \sigma^2 = \lambda$.

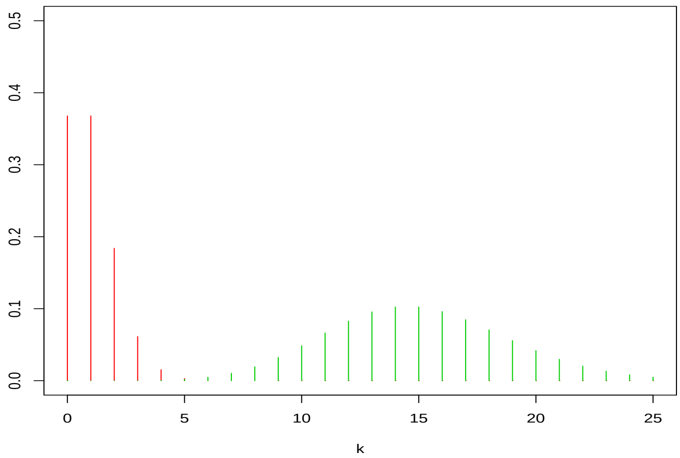

Abbildung 2.8: $P(1)$ und $P(15)$

```
dpois(x, lambda, log = FALSE)                          # Dichte, d.h. Wahrsch.funktion
ppois(q, lambda, lower.tail = TRUE, log.p = FALSE) # Verteilungsfunktion
qpois(p, lambda, lower.tail = TRUE, log.p = FALSE) # Quantile
rpois(n, lambda)                                       # Zufallszahlen
```

2.3.3 Gleichverteilung $\mathbb{U}[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$

Die **stetige Gleichverteilung** (im Intervall $[a, b]$) besitzt eine Dichte

$$f(x) = \frac{1}{b-a}$$

für $a \leq x \leq b$ und $f(x) = 0$ für $x \notin [a, b]$. Erwartungswert und Varianz sind $\mu = (a + b)/2$ bzw. $\sigma^2 = (b - a)^2/12$.

```
dunif(x, min=0, max=1, log = FALSE)                  # Dichte
```

```
punif(q, min=0, max=1, lower.tail = TRUE, log.p = FALSE) # Verteilungsfunktion
qunif(p, min=0, max=1, lower.tail = TRUE, log.p = FALSE) # Quantile
runif(n, min=0, max=1)                                   # Zufallszahlen

> x<-runif(1000)
> mean(-log(x))
[1] 1.079021
```

2.3.4 Normalverteilung $\mathbf{N}(\mu, \sigma^2)$

Die **Normalverteilung** $N(\mu, \sigma^2)$ ist stetig mit Dichte

$$\phi_{\mu,\sigma^2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp -\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}.$$

μ und σ^2 sind Erwartungswert und Varianz. $N(0,1)$ heißt Standardnormalverteilung. Statt $\phi_{0,1}(x)$ schreiben wir auch $\phi(x)$.

```
dnorm(x, mean=0, sd=1, log = FALSE)                         # Dichte
pnorm(q, mean=0, sd=1, lower.tail = TRUE,log.p = FALSE)    # Verteilungsfunktion
qnorm(p, mean=0, sd=1, lower.tail = TRUE, log.p = FALSE)   # Quantile
rnorm(n, mean=0, sd=1)                                      # Zufallszahlen

x<-seq(-3,3,length=200)
y<-pnorm(x)
plot(x,y,type="l")
title("N(0,1), Verteilungsfunktion")

> qnorm(0.975)
[1] 1.959964

> x<-rnorm(1000)
> mean(exp(x))
[1] 1.598707
```

2.3 BEISPIEL. Man berechne den Erwartungswert μ von $g(X) = e^{sX}$ mit $X \sim N(\mu^*, \sigma^2)$. s ist eine Konstante. Es ist

$$\begin{aligned}\mu &= \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\phi_{\mu^*,\sigma^2}(x)dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{sx}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-(x-\mu^*)^2/2\sigma^2}dx.\end{aligned}$$

Zuerst berechnen wir μ für $X \sim N(0,1)$. Dann ist

$$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} e^{sx}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}dx.$$

Substituiert man $y = x - s$, erhält man

$$\begin{aligned}\mu &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{s(y+s)}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-(y+s)^2/2}dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{s(y+s)-(y^2+2sy+s^2)/2}dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{sy+s^2-y^2/2-sy-s^2/2}dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{s^2/2-y^2/2}dy \\ &= e^{s^2/2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-y^2/2}dy \\ &= e^{s^2/2},\end{aligned}$$

da

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-y^2/2}dy = 1.$$

Ist $X \sim N(\mu^*, \sigma^2)$, dann ist $X = \mu^* + \sigma Z$ mit $Z \sim N(0,1)$. Es folgt

$$\begin{aligned}\mu &= \mathbb{E}[e^{sX}] \\ &= \mathbb{E}[e^{s(\mu^*+\sigma Z)}] \\ &= \mathbb{E}[e^{s\mu^*}e^{s\sigma Z}] \\ &= e^{s\mu^*}e^{(s\sigma)^2/2} \\ &= e^{s\mu^*+s^2\sigma^2/2}.\end{aligned}$$

□

2.4 BEISPIEL. Man berechne den Erwartungswert μ von $g(X) = 1/(1+X^2)$ mit $X \sim N(0,1)$. Da wir nicht erkennen, wie das Integral

$$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}dx$$

exakt zu berechnen ist, wollen wir es numerisch berechnen.
Wir können den Integrand $f(x) = g(x)\phi(x)$ an äquidistanten Stützstellen $x_1, \ldots, x_n$ mit Schrittweite $h = x_2 - x_1$ ausgewertet und das Integral durch

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)h,$$

die Summe der Flächen der Rechtecke mit Breite h und Höhe $f(x_i)$ ersetzt.

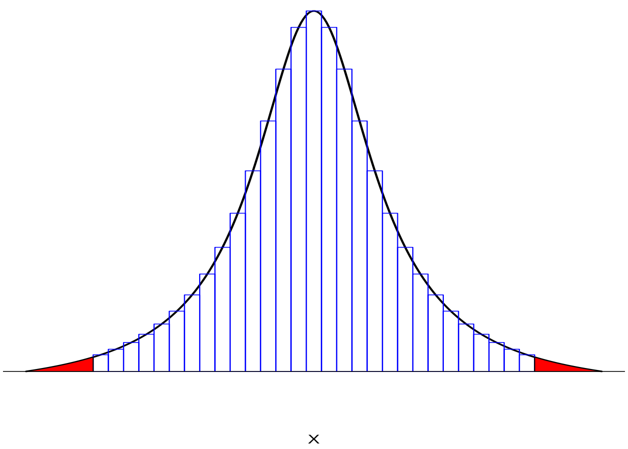

Abbildung 2.9: Numerische Integration

Der entstehende Fehler hat zwei Ursachen. Zuerst bleiben die Enden $[b, \infty[$ und $] - \infty, a]$ des Integranden unberücksichtigt. Der zweite Beitrag zum Fehler stammt von der Approximation der Fläche durch Summen von Rechtecken, d.h. man approximiert $g(x)$ durch eine stückweise konstante Funktion. Der Fehler hängt also von den Enden (von a und b) und n, der Anzahl der Stützstellen in $[a, b]$, ab.
Werden die Stützstellen nicht äquidistant gewählt, kann der erste Teil des Fehlers vermieden werden. Seien $x_i = \Phi^{-1}(i/(n+1))$, $i = 1, \ldots, n$, Quantile der Standardnormalverteilung. Sei $h_0 = -\infty$, $h_n = \infty$ und für $i = 1, \ldots, n$, $h_i = (x_i + x_{i+1})/2$. Dann ist

$$\int_{h_{i-1}}^{h_i} \phi(x)dx \approx \frac{1}{n}$$

und

$$\begin{aligned} \mu &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx \\ &= \sum_{i=1}^{n} \int_{h_{i-1}}^{h_i} \frac{1}{1+x^2} \phi(x)dx \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\approx \sum_{i=1}^{n} \int_{h_{i-1}}^{h_i} \frac{1}{1+x_i^2}\phi(x)dx \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1+x_i^2} \int_{h_{i-1}}^{h_i} \phi(x)dx \\
&\approx \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1+x_i^2}\frac{1}{n}.
\end{aligned}
$$

```
> n<-6000
> i<-(1:n)/(n+1)
> x<-qnorm(i)
> g<-1/(1+x^2)
> sum(g)/n
[1] 0.6557792
> n<-60000
> i<-(1:n)/(n+1)
> x<-qnorm(i)
> g<-1/(1+x^2)
> sum(g)/n
[1] 0.6556897
```

Verfügt man über elementare Mathematikkenntnisse, wird man das Integral vielleicht doch ausrechnen. Das Ergebnis ist $\sqrt{2\pi e}(1-\Phi(1)) = 0.6556795$.

□

2.3.5 Gammaverteilung, $\mathbf{\Gamma(a, b)}$

Seien $a, b > 0$. Die **Gammaverteilung**, $\Gamma(a, b)$ ist stetig mit Dichte

$$
f(x) = \frac{b^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-bx},
$$

für $x > 0$ und $f(x) = 0$ sonst. Erwartungswert und Varianz sind $\mu = a/b$ bzw. $\sigma^2 = a/b^2$. $\Gamma(1, b)$ heißt auch Exponentialverteilung.

Die Funktion $\Gamma(a)$ heißt Gammafunktion. $\Gamma(a)$ muß für die meisten Argumente numerisch berechnet werden. Es gilt $\Gamma(1) = 1$ und $\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$. Insbesondere ist $\Gamma(n+1) = n!$.

```
dgamma(x, shape, scale=1, log = FALSE)                        # Dichte, shape=a, scale=1/b
pgamma(q, shape, scale=1, lower.tail = TRUE, log.p = FALSE) # Verteilungsfunktion
qgamma(p, shape, scale=1, lower.tail = TRUE, log.p = FALSE) # Quantile
```

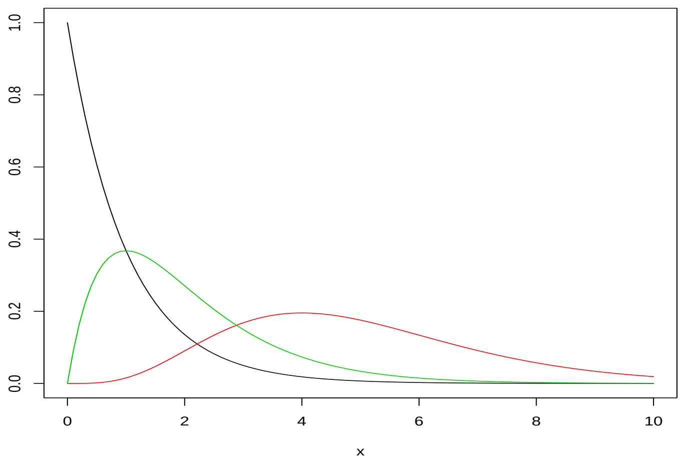

Abbildung 2.10: Dichten von $\Gamma(a, 1)$, $a = 1, 2, 5$

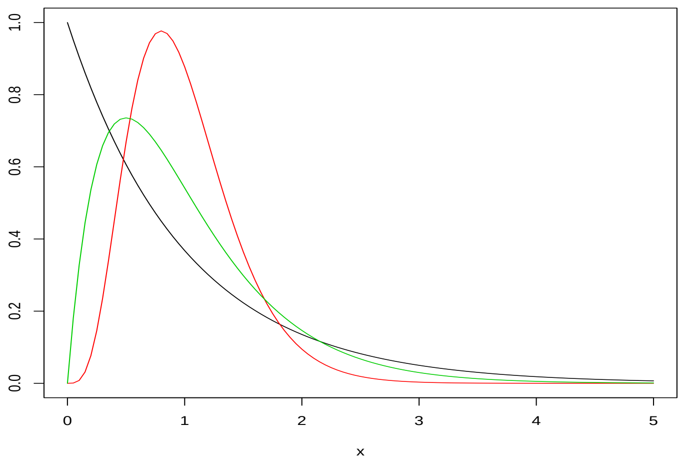

Abbildung 2.11: Dichten von $\Gamma(a, a)$, $a = 1, 2, 5$

```
rgamma(n, shape, scale=1)                                   # Zufallszahlen
```

```
x<-seq(0,4,length=200)
y<-dgamma(x,2,1/2)
plot(x,y,type="l")
title("Dichte der Gamma(2,2)-Verteilung")
```

2.3.6 t-Verteilung $\mathbf{t(d)}$

Sei $d \in \mathbb{N}$. Die Dichte der **t-Verteilung** ist

$$f(x) = \frac{\Gamma((d+1)/2)}{\sqrt{\pi}\Gamma(d/2)}(1 + x^2/d)^{-(d+1)/2}.$$

Der Parameter d heißt **Freiheitsgrad**. Der Erwartungswert existiert für $d > 1$ und ist $\mu = 0$. Die Varianz existiert für $d > 2$ und ist $\sigma^2 = d/(d-2)$.

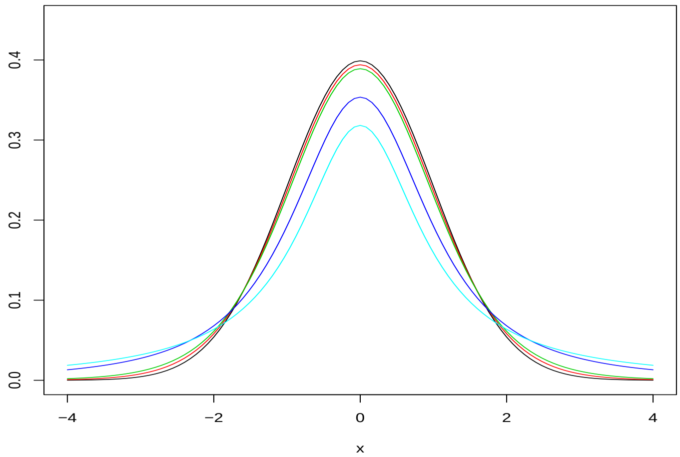

Abbildung 2.12: Dichten von $t(d)$, $d = 1, 2, 10, 20$ und $N(0, 1)$

```
dt(x, df, log = FALSE)                                # Dichte
pt(q, df, ncp=0, lower.tail = TRUE, log.p = FALSE)    # Verteilungsfunktion
qt(p,df, lower.tail = TRUE, log.p = FALSE)            # Quantile
rt(n, df)                                             # Zufallszahlen
```

```
x<-seq(-4,4,length=200)
y<-dt(x,2)
plot(x,y,type="l",ylab="")
title("Dichte der t-Vert. mit 2 Freiheitsgraden")
```

2.3.7 Pareto - Verteilung $\mathbf{Par(a, b)}$

Seien $a, b > 0$. Die **Paretoverteilung** besitzt die Verteilungsfunktion

$$F(x) = 1 - \left(\frac{b}{x+b}\right)^a$$

für $x \geq 0$ (und $F(x) = 0$ für $x < 0$). Ihre Dichte ist für $x \geq 0$

$$f(x) = \frac{ab^a}{(x+b)^{a+1}}.$$

Der Erwartungswert existiert für $a > 1$ und ist $\mu = b/(a-1)$, die Varianz existiert für $a > 2$ und ist $\sigma^2 = ab^2/((a-1)^2(a-2))$.

2.4 Aufgaben

AUFGABE 2.1. Sei X eine Zufallsgröße mit Verteilungsfunktion $F(x) = 1 - 1/x$ für $x \geq 1$ und $F(x) = 0$ für $x < 1$. Berechnen Sie

$$P(3 < X < 4).$$

Wie lautet die Dichte von X?

AUFGABE 2.2. Sei X eine Zufallsgröße mit Dichte $f(x) = 2(1-x)$ für $0 \leq x \leq 1$ und $f(x) = 0$ sonst. Berechnen Sie den Erwartungswert und den Median von X. Wie lautet die Verteilungsfunktion?

AUFGABE 2.3. Sei $X \sim N(0, 1)$. Wie lautet der Erwartungswert und der Median von e^{3X+2}?

AUFGABE 2.4. Wahrscheinlichkeiten und Erwartungswerte auf endlichen Stichprobenräumen lassen sich oft durch Operationen der linearen Algebra berechnen. Sei $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m\}$ der Stichprobenraum. Jede Wahrscheinlichkeit P auf Ω läßt sich mit einem Wahrscheinlichkeitsvektor $p = (p_1, \ldots, p_m)'$ durch $p_i = P(\{\omega_i\})$, $i = 1, \ldots, m$ identifizieren. Sei $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Zufallsvariable, $x_i = X(\omega_i)$. Dann entspricht X dem Vektor $X = (x_1, \ldots, x_m)'$.
Es ist

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= P(\{\omega_1\})X(\omega_1) + \cdots + P(\{\omega_m\})X(\omega_m) \\
&= p_1x_1 + \cdots + p_mx_m \\
&= p'X.
\end{aligned}$$

Ist $X^2 = (x_1^2, \ldots, x_m^2)$, dann ist

$$\mathbb{V}[X] = p'X^2 - (p'X)^2.$$

Sei S_n ein Aktienkurs zum Zeitpunkt n, S_0 sei 100. Zu jeden Zeitpunkt steigt die Aktie um 10% (mit Wahrscheinlichkeit 0.6) oder fällt um 5% (mit Wahrscheinlichkeit 0.4). Sei $Call_n$ eine europäische Calloption mit Ausübungszeitpunkt 10 und Ausübungspreis $K = 120$. Man berechne $P(Call_{10} > 10)$ und $\mathbb{E}[Call_{10}]$.

```
> n<-10
> ii<-0:n
> s0<-100
> a<-1.1
> b<-0.95
> S<-s0*(a^ii)*(b^(n-ii))
> p<-dbinom(ii,n,0.6)
> S
 [1]  59.87369  69.32744  80.27387  92.94869 107.62480 124.61819 144.29475
 [8] 167.07813 193.45889 224.00503 259.37425
> p
 [1] 0.0001048576 0.0015728640 0.0106168320 0.0424673280 0.1114767360
 [6] 0.2006581248 0.2508226560 0.2149908480 0.1209323520 0.0403107840
[11] 0.0060466176
> K<-120
> Call<-apply(rbind(0,S-K),2,max)
> Call
 [1]   0.000000   0.000000   0.000000   0.000000   0.000000   4.618194
 [7]  24.294751  47.078132  73.458890 104.005031 139.374246
> sum(p[Call>10])
[1] 0.6331033
> sum(p*Call)
[1] 31.06054
```

Sei Put_n eine europäische Putoption mit Ausübungszeitpunkt 10 und Ausübungspreis $K = 100$. Man berechne $P(Put_{10} > 9)$, $\mathbb{E}[Put_{10}]$, $\mathbb{V}[Put_{10}]$, $\mathbb{E}[Put_{10} + Call_{10}]$ und $\mathbb{V}[Put_{10} + Call_{10}]$.

AUFGABE 2.5. Sei S der Aktienkurs aus Aufgabe 2.4. B sei die Binäroption, die zum Zeitpunkt 10 einen Euro zahlt, falls $S > 100$. Man berechne den Erwartungswert von B_{10}.

AUFGABE 2.6. Sei S der Aktienkurs aus Aufgabe 2.4. Sei C die Option, die Aktie zum Zeitpunkt 10 zu einem Kurs von 100 zu kaufen, wenn $S_{10} \leq 200$. Man berechne $P(C_{10} > 0)$, $\mathbb{E}[C_{10}]$ und $\mathbb{V}[C_{10}]$.

AUFGABE 2.7. Sei $X \sim \Gamma(1,1)$ und $g(x) = 1/(1+x)$. Berechnen Sie (numerisch) den Erwartungswert und die Varianz von $g(X)$.

AUFGABE 2.8. Sei $X \sim N(-0.5, 1)$ und $g(x) = \max\{e^x - 1, 0\}$. Berechnen Sie (numerisch) den Erwartungswert und die Varianz von $g(X)$.

AUFGABE 2.9. Sei $X \sim t(3)$ und $g(x) = \max\{1 - e^{-0.5+x}, 0\}$. Berechnen Sie (numerisch) den Erwartungswert und die Varianz von $g(X)$.

AUFGABE 2.10. Sei $X \sim \Gamma(a,b)$. Seien μ und σ^2 Erwartungswert und Varianz von X. Berechnen Sie den (Momenten-) Schiefekoeffizienten

$$\frac{\mathbb{E}[(X-\mu)^3]}{\sigma^3}$$

und den (Momenten-)Wölbungskoeffizienten

$$\frac{\mathbb{E}[(X-\mu)^4]}{\sigma^4}.$$

AUFGABE 2.11. Sei $X \sim \Gamma(1,1)$. Sei σ^2 die Varianz von X. Berechnen Sie den Schiefekoeffizienten

$$\frac{R-L}{R+L}$$

mit $R = Q_{0.75} - Q_{0.5}$ und $L = Q_{0.5} - Q_{0.25}$ und den Wölbungskoeffizienten

$$\frac{Q_{0.75} - Q_{0.25}}{\sigma}.$$

AUFGABE 2.12. Sei $X \sim \mathrm{Par}(4,1)$. Sei σ^2 die Varianz von X. Berechnen Sie den Schiefekoeffizienten

$$\frac{R-L}{R+L}$$

mit $R = Q_{0.75} - Q_{0.5}$ und $L = Q_{0.5} - Q_{0.25}$ und den Wölbungskoeffizienten

$$\frac{Q_{0.75} - Q_{0.25}}{\sigma}.$$

AUFGABE 2.13. Sei $S_0 \in \mathbb{R}$ der (feste) Wert einer Aktie. An jedem Handelstag steige der Wert der Aktie um 5% (mit Wahrscheinlichkeit 0.6) oder er fällt um 5% (mit Wahrscheinlichkeit 0.4). S_n bezeichne den Wert der Aktie nach dem n-ten Handelstag.
Sei $N = 5$. Man bestimme die Verteilung von S_N.

AUFGABE 2.14. Sei $X \sim \Gamma(1,2)$. Wie lautet die Verteilungsfunktion von X?

AUFGABE 2.15. 1. Seien $X \sim \mathbb{U}[20,50]$ und $Y \sim N(0,4)$. Berechnen Sie den Erwartungswert von $X + Y^2$.

2. Seien $X \sim \Gamma(2,4)$ und $Y \sim N(3,4)$. Berechnen Sie den Erwartungswert von $X - Y^2$.

AUFGABE 2.16. Ein Händler kauft n Stück einer Ware zum Preis von 90 Euro je Stück ein. Der Verkaufspreis ist 120 Euro. Es ist bekannt, daß die Anzahl der Käufer poissonverteilt mit $\lambda = 100$ ist.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß der Händler einen Verlust erleidet, wenn er $n = 100$ bzw. $n = 150$ Stück einkauft.

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß der Händler seinen gesamten Bestand verkaufen kann, wenn er $n = 100$ Stück einkauft.

c) Wie groß ist der erwartete Gewinn, wenn $n = 100$ ist.

d) Welches n ergibt den größten erwarteten Gewinn?

Kapitel 3

Transformation einer Zufallsgröße

3.1 Transformation

3.1 BEISPIEL. Sei F eine invertierbare Verteilungsfunktion und $X \sim F$. Dann ist $F(X) \sim \mathbb{U}[0,1]$. Für $u \in [0,1]$ gilt

$$\begin{aligned} P(F(X) \le u) &= P(X \le F^{-1}(u)) \\ &= F(F^{-1}(u)) \\ &= u. \end{aligned}$$

□

3.2 BEISPIEL. Sei $U \sim \mathbb{U}[0,1]$ und F eine invertierbare Verteilungsfunktion. Dann ist $F^{-1}(U) \sim F$. Für $x \in \mathbb{R}$ ist

$$\begin{aligned} P(F^{-1}(U) \le x) &= P(U \le F(x)) \\ &= F(x). \end{aligned}$$

□

Jede univariate Zufallsvariable $X \sim F$ ist die Transformierte einer gleichverteilten Zufallsvariable $U \sim \mathbb{U}[0,1]$, auch wenn F nicht invertierbar ist (wenn F entweder nicht stetig ist, d.h. Sprünge besitzt, oder nicht strikt monoton ist, d.h. konstant auf gewissen Intervallen ist). In diesem Fall muß man die Inverse F^{-1} durch die **Quantilsfunktion**

$$F^{-1}(u) = \min\{x \mid F(x) \ge u\}, \qquad 0 < u < 1, \tag{3.1}$$

ersetzen. Man beachte, daß in diesem Fall die Notation nicht korrekt ist, es wird aber dadurch zu keinen Problemen kommen.

Wir fassen einige Eigenschaften der Quantilsfunktion F^{-1} zusammen:

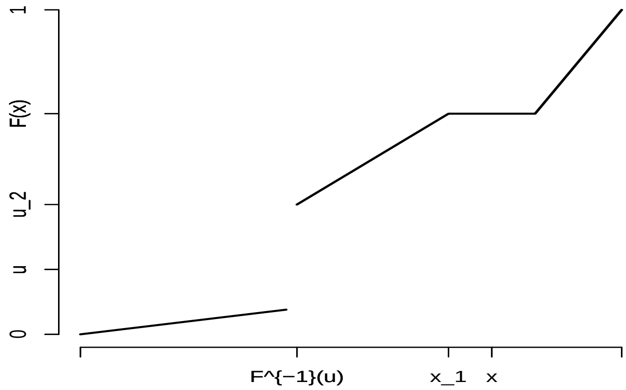

Abbildung 3.1: Quantilsfunktion F^{-1}, $u_2 = F(F^{-1}(u))$, $x_1 = F^{-1}(F(x))$

1. F^{-1} ist die Inverse von F, falls F invertierbar ist.
2. Die Quantilsfunktion F^{-1} ist eine monoton wachsende Funktion, d.h. aus $u \leq v$ folgt $F^{-1}(u) \leq F^{-1}(v)$.
3. $F(F^{-1}(u)) \geq u$.
4. $F^{-1}(F(x)) \leq x$.
5. Falls es ein $x \in \mathbb{R}$ gibt mit $u = F(x)$, dann ist $F(F^{-1}(u)) = u$.
6. Falls $u \in [F(x-), F(x)]$, dann ist $F(F^{-1}(u)) = F(x)$.
7. Falls F auf einem Intervall $[a, b]$ strikt monoton ist und $x \in [a, b]$, dann ist $F^{-1}(F(x)) = x$.
8. Falls $[a, b]$ das größte Intervall ist mit $x \in [a, b]$ und $F(a) = F(b)$, dann ist $F^{-1}(F(x)) = a$.

3.3 SATZ. *Sei $U \sim \mathbb{U}[0, 1]$, F eine Verteilungsfunktion, F^{-1} die Quantilsfunktion. Dann gilt $F^{-1}(U) \sim F$.*

3.4 BEISPIEL. Es sei

$$X = e^{\mu + \sigma Z}$$

mit $Z \sim N(0,1)$. Wie lautet die Dichte von X ? Da $\log X = \mu + \sigma Z \sim N(\mu, \sigma^2)$, nennt man die Verteilung von X **Lognormalverteilung**. Sei $H(z) = e^{\mu+\sigma z}$. Dann ist $X = H(Z)$. H ist invertierbar, die inverse Funktion ist $H^{-1}(x) = (\log x - \mu)/\sigma$. Die Verteilungsfunktion $F(x)$ ist

$$\begin{aligned} F(x) &= P(X \le x) \\ &= P(e^{\mu+\sigma Z} \le x) \\ &= P(H(Z) \le x) \\ &= P(Z \le H^{-1}(x)) \\ &= \Phi(H^{-1}(x)). \end{aligned}$$

Die Dichte $f(x)$ ist die Ableitung der Verteilungsfunktion,

$$\begin{aligned} f(x) &= F'(x) \\ &= (\Phi(H^{-1}(x)))' \\ &= \phi(H^{-1}(x))(H^{-1}(x))' \\ &= \phi((\log x - \mu)/\sigma)((\log x - \mu)/\sigma)' \\ &= \phi((\log x - \mu)/\sigma)\frac{1}{x\sigma} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}x} \exp\{-\frac{1}{2\sigma^2}(\log x - \mu)^2\}, \end{aligned}$$

für $x > 0$. $\square$

3.5 SATZ. Transformationssatz: *Sei Y eine univariate Zufallsgröße mit Verteilungsfunktion F_Y und Dichte f_Y. Sei H monoton wachsend und invertierbar mit differenzierbarer Inverser $G = H^{-1}$. $X = H(Y)$ besitzt die Verteilungsfunktion*

(3.2) $$F_X(x) = F_Y(G(x))$$

und die Dichte

(3.3) $$f_X(x) = f_Y(G(x))G'(x).$$

BEGRÜNDUNG:

$$F_X(x) = P(X \le x) = P(H(Y) \le x) = P(Y \le G(x)) = F_Y(G(x)).$$

Die Dichte ist

$$f_X(x) = F_X'(x) = (F_Y(G(x)))' = F_Y'(G(x))G'(x) = f_Y(G(x))G'(x).$$

□

Die wichtigste Familie von Transformationen sind die **linearen Transformationen**. Sei Z eine Zufallsgröße mit Verteilungsfunktion F und Dichte f, $a \in \mathbb{R}$, $b > 0$, $H(z) = a + bz$ und

$$X = H(Z) = a + bZ.$$

Dann ist

$$\begin{aligned} F_X(x) &= F((x-a)/b), \\ f_X(x) &= \frac{1}{|b|} f((x-a)/b). \end{aligned}$$

Zwei Zufallsvariable sind vom **selben Typ**, wenn ihre Verteilung bis auf eine lineare Transformation gleich sind.
Ist $X = a + bZ$ mit $a, b \in \mathbb{R}$, dann gilt

$$\mathbb{E}[X] = a + b\mathbb{E}[Z] \qquad \text{und} \qquad \mathbb{V}[X] = b^2\mathbb{V}[Z].$$

Ist Z **standardisiert**, d.h. $\mathbb{E}[Z] = 0$ und $\mathbb{V}[Z] = 1$, dann ist $\mathbb{E}[X] = a$ und $\mathbb{V}[X] = b^2$. Dann nennt man a den **Lageparameter**, b den **Skalenparameter** der Verteilung von X. Die Verteilungen aller Transformierten $X = a+bZ$ heißt **Lagen-Skalenfamililie**. Ist $a = 0$ und b variiert, so spricht man von einer **Skalenfamilie**, wenn nur a variiert, von einer **Lagenfamilie**.

3.6 BEISPIEL. Ist $Z \sim N(0,1)$, dann ist $X = a + bZ \sim N(a, b^2)$. Die Familie der Normalverteilung ist eine Lagen-Skalenfamililie. □

3.7 BEISPIEL. Ist $Z \sim \mathbb{U}[a,b]$, dann ist $X = s + tZ \sim \mathbb{U}[s + ta, s + tb]$. Die Familie der Gleichverteilungen ist eine Lagen-Skalenfamililie. □

3.8 BEISPIEL. Ist $Z \sim \Gamma(a,b)$, dann ist $X = cZ \sim \Gamma(a, b/c)$. Die Familie der Gammaverteilungen mit festem Gestaltparameter a ist eine Skalenfamililie. □

3.9 BEISPIEL. Ist $Z \sim \mathrm{Par}(a,b)$, dann ist $X = cZ \sim \mathrm{Par}(a, bc)$. Die Familie der Paretoverteilungen mit festem Parameter a ist eine Skalenfamililie. □

Wenn H nicht invertierbar ist, kann man den Transformationssatz 3.3 nicht anwenden. Oft genügt eine einfache Modifikation der Vorgangsweise aus Beispiel 3.4.

3.10 BEISPIEL. Sei $Z \sim N(0,1)$ und $X = Z^2$. Dann ist $X \geq 0$ und $X \leq x$ genau dann, wenn

$$-\sqrt{x} \leq Z \leq \sqrt{x}.$$

Daher ist

$$\begin{aligned}F_X(x) &= P(X \leq x) \\ &= P(Z^2 \leq x) \\ &= P(-\sqrt{x} \leq Z \leq \sqrt{x}) \\ &= \Phi(\sqrt{x}) - \Phi(-\sqrt{x}).\end{aligned}$$

Aus

$$\sqrt{x}' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

folgt

$$\begin{aligned}f_X(x) &= F'_X(x) \\ &= \left(\Phi(\sqrt{x}) - \Phi(-\sqrt{x})\right)' \\ &= \phi(\sqrt{x})\frac{1}{2\sqrt{x}} - \phi(-\sqrt{x})\left(-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) \\ &= \phi(\sqrt{x})\frac{1}{2\sqrt{x}} + \phi(\sqrt{x})\frac{1}{2\sqrt{x}} \\ &= \phi(\sqrt{x})\frac{1}{\sqrt{x}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x/2}x^{1/2-1},\end{aligned}$$

d.h. $X = Z^2 \sim \Gamma(1/2, 1/2)$. Die $\Gamma(n/2, 1/2)$-Verteilung heißt χ^2-Verteilung mit n Freiheitsgraden. $X = Z^2$ ist also χ^2-verteilt mit einem Freiheitsgrad. □

3.2 Aufgaben

AUFGABE 3.1. Sei $U \sim \mathbb{U}[0,1]$.

1. Wie lauten Verteilungsfunktion und Dichte von $X = -\ln U$?

2. Berechnen Sie den Erwartungswert und den Median von $X = -\ln U$.

AUFGABE 3.2. Sei F die Verteilungsfunktion von X und $Y = G(X)$ mit invertierbarer, monoton fallender Funktion G. Wie lautet die Verteilungsfunktion von Y. Wie lautet die Dichte von Y, falls X die Dichte f besitzt.

AUFGABE 3.3. Seien F und f die Verteilungsfunktion und die Dichte von X. Wie lautet die Verteilung von X_+, dem Positivteil von X ($X_+ = \max\{X, 0\}$) ?

AUFGABE 3.4. Sei $X \sim \Gamma(1, b)$. Wie lautet die Verteilung von $Y = e^X - 1$?

AUFGABE 3.5. Sei $X \sim \mathbb{U}[0, 1]$.

1. Wie lautet die Verteilung von $Y = \sqrt{X}$?

2. Berechnen Sie die Dichte von X^2.

AUFGABE 3.6. Sei $X \sim N(0, 1)$.

1. Wie lautet die Dichte von e^X?

2. Wie lautet der Erwartungswert von e^{3X+2}? Wie lautet der Median von e^{3X+2}?

AUFGABE 3.7.

1. Sei $X \sim \Gamma(2, 2)$. Man berechne das Quantil Q_α von $Y = 1/X$ für $\alpha = 0.1, 0.5, 0.9$.

2. Sei $X \sim N(0, 1)$. Man berechne das Quantil Q_α von $Y = X^4$ für $\alpha = 0.05, 0.1, 0.5, 0.9, 0.95$.

3. Sei $X \sim N(0, 1)$. Man berechne das Quantil Q_α von $Y = -X^4$ für $\alpha = 0.05, 0.1, 0.5, 0.9, 0.95$.

AUFGABE 3.8.

1. Sei $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Welche Verteilung besitzt $3X - 10$?

2. Sei $X \sim N(-3, 1)$. Welche Verteilung besitzt $5X + 10$?

3. Sei $X \sim \mathbb{U}[10, 20]$. Welche Verteilung besitzt $2X - 10$? Welche Verteilung besitzt $(X - 10)/2$?

4. Sei $X \sim \Gamma(4, 5)$. Welche Verteilung besitzt $Y = 4X$?

Kapitel 4

Anwendungen

4.1 Investitionsentscheidung

Am Markt wird eine Aktie gehandelt. Daneben existiert ein Bankkonto mit einem festen Zinssatz r, zu dem Geld angelegt und ausgeborgt werden kann. Ein Investor besitzt ein Kapital in Höhe von w_0 Geldeinheiten und muß entscheiden, wie viele Aktien er kaufen soll. Das restliche Geld wird auf das Bankkonto gelegt bzw. als Kredit aufgenommen. Er wählt das Portfolio, das den erwarteten Nutzen nach einer Periode maximiert. Wir wollen zeigen, daß die Entscheidung wesentlich vom Typ der Verteilung des Aktienkurses und nicht nur vom mittleren Gewinn abhängt.
Die **Nutzenfunktion** des Investors sei

$$u(x) = 1 - e^{-\nu x}, \tag{4.1}$$

wobei ν ein Parameter ist, der die Risikoaversion des Investors angibt.
Der aktuelle Preis der Aktie beträgt x_0 GE. Ist X der Preis nach einer Periode, dann sei $X = x_0(1+Y)$, wobei die Rendite Y Mittelwert μ und Varianz σ^2 besitze.
Der Investor legt w GE in Aktien an, d.h. er kauft w/x_0 Aktien, die nach einer Periode

$$\frac{w}{x_0} x_0(1+Y) = w(1+Y)$$

wert sind. $(w_0 - w)$ GE legt er auf das Bankkonto, das ergibt nach einer Periode $(w_0 - w)(1+r)$.
Insgesamt ist Preis des Portfolio nach einer Periode

$$W_1 = w_0(1+r) + w(Y-r). \tag{4.2}$$

Der erwartete Nutzen ist

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[u(W_1)] &= \int \left(1 - e^{-\nu(w_0(1+r)+w(y-r))}\right) f(y)dy \\
&= 1 - e^{-\nu(w_0(1+r)-wr)} \int e^{-\nu wy} f(y)dy.
\end{aligned}$$

Der erwartete Nutzen hängt von der Verteilung der Rendite Y ab. Ist $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$, dann ist

$$\int e^{-\nu w y} f(y) dy = e^{-\nu w \mu + \nu^2 w^2 \sigma^2/2}$$

und damit ist

$$\mathbb{E}[u(W_1)] \quad = 1 - e^{-\nu(w_0(1+r)+w(\mu-r))+\nu^2 w^2 \sigma^2/2}.$$

$\mathbb{E}[u(W_1)]$ ist maximal, wenn

$$w(\mu - r) - w^2 \frac{\nu\sigma^2}{2} \tag{4.3}$$

maximiert wird. Die Lösung findet man, indem man die Ableitung von (4.3) nach w gleich 0 setzt und nach w auflöst. Man erhält

$$w = \frac{\mu - r}{\nu \sigma^2}. \tag{4.4}$$

Sei $Y = \mu + \sigma(Z - 1)$ mit $Z \sim \Gamma(1, 1)$. Aus

$$\begin{aligned} \int e^{-\nu w y} f(y) dy &= \int_0^\infty e^{-\nu w(\mu - \sigma + \sigma z)} e^{-z} dz \\ &= e^{-\nu w(\mu-\sigma)} \frac{1}{1 + \sigma \nu w} \end{aligned}$$

folgt

$$\mathbb{E}[u(W_1)] \quad = 1 - e^{-\nu(w_0(1+r)+w(\mu-r-\sigma))} \tfrac{1}{1+\sigma\nu w}.$$

$\mathbb{E}[u(W_1)]$ ist maximal, wenn

$$w\nu(\mu - r - \sigma) + \log(1 + \sigma \nu w) \tag{4.5}$$

maximiert wird. Wir erhalten für die Ableitung

$$\nu(\mu - r - \sigma) + \frac{\sigma\nu}{1 + \sigma\nu w} = 0$$

mit Lösung

$$w = \frac{1}{\nu\sigma} \frac{\mu - r}{\sigma + r - \mu}. \tag{4.6}$$

Sei $Y = \mu - \sigma(Z - 1)$ mit $Z \sim \Gamma(1, 1)$. Aus

$$\begin{aligned} \int e^{-\nu w y} f(y) dy &= \int_0^\infty e^{-\nu w(\mu + \sigma - \sigma z)} e^{-z} dz \\ &= e^{-\nu w(\mu+\sigma)} \frac{1}{1 - \sigma \nu w} \end{aligned}$$

folgt

$$\mathbb{E}[u(W_1)] \quad = 1 - e^{-\nu(w_0(1+r)+w(\mu-r+\sigma))} \tfrac{1}{1-\sigma\nu w}.$$

$\mathbb{E}[u(W_1)]$ ist maximal, wenn

$$w\nu(\mu - r + \sigma) + \log(1 - \sigma\nu w) \tag{4.7}$$

maximiert wird. Wir erhalten für die Ableitung

$$\nu(\mu - r + \sigma) - \frac{\sigma\nu}{1 - \sigma\nu w} = 0$$

mit Lösung

$$w = \frac{1}{\nu\sigma}\frac{\mu - r}{\sigma + \mu - r}. \tag{4.8}$$

```
> s2<-0.1
> s<-sqrt(s2)
> m<-0.07
> x<-seq(-1.2,1.2,length=500)
> f1<-dnorm(x,m,s)
> f2<-(1/s)*dgamma((x-m+s)/s,1,1)
> f3<-(1/s)*dgamma((m+s-x)/s,1,1)
> plot(x,f1,xlab="",ylab="",ylim=c(0,3.5),type="l")
> lines(x,f2,col=2)
> lines(x,f3,col=3)
```

4.1 BEISPIEL. Sei $w_0 = 0$, $\nu = 1$, $r = 0.03$, $\mu = 0.07$ und $\sigma^2 = 0.1$. Ist die Rendite normalverteilt, wird der Betrag

$$\frac{0.07 - 0.03}{0.1} = 0.4$$

in die Aktie investiert. Der erwartete Nutzen ist 0.00797.

Ist $Y = \mu + \sigma(Z - 1)$ mit $Z \sim \Gamma(1,1)$, dann wird

$$\frac{1}{\sqrt{0.1}}\frac{0.07 - 0.03}{\sqrt{0.1} + 0.03 - 0.07} = 0.4579$$

in die Aktie investiert, der erwartete Nutzen ist 0.00871.

Ist $Y = \mu - \sigma(Z - 1)$ mit $Z \sim \Gamma(1,1)$, dann wird

$$\frac{1}{\sqrt{0.1}}\frac{0.07 - 0.03}{\sqrt{0.1} + 0.07 - 0.03} = 0.3551$$

in die Aktie investiert, der erwartete Nutzen ist 0.00736.

Falls $\mu - r$ klein im Vergleich zu σ^2 ist, unterscheiden sich die investierten Beträge wenig. Ist zum Beispiel $\sigma^2 = 0.05$, dann ergeben sich Investitionen von 0.8, 0.974 0.679 mit erwarteten Nutzen 0.01587, 0.01804, 0.01421. □

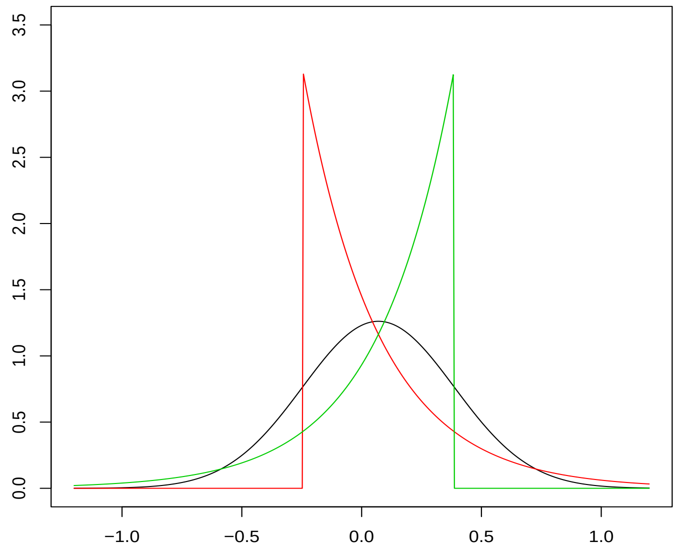

Abbildung 4.1: Dichten der Renditen, $\mu = 0.07, \sigma^2 = 0.1$

4.2 BEISPIEL. Für die drei Portfolios aus Beispiel 4.1 soll der Value at Risk (Var) berechnet werden. Bei gegebenem Niveau α ist der Value at Risk derjenige Verlust des Portfolios, der mit einer Wahrscheinlichkeit von α überschritten wird. D.h. wenn w der investierte Betrag, Q_α das α-Quantil der Rendite Y und r der Zinssatz ist, dann ist

$$\mathrm{Var}(\alpha) = -w(Q_\alpha - r).$$

```
> s2<-0.1
> s<-sqrt(s2)
> r<-0.03
> m<-0.07
> w1<-(m-r)/s2          # Vert1: normalverteilte Renditen
> w1
[1] 0.4
> w2<-(m-r)/(s*(s+r-m)) # Vert 2: y=m+s*(Z-1)
> w2
[1] 0.4579232
> w3<-(m-r)/(s*(s-r+m)) # Vert3: y=m+s*(Z-1)
```

```
> w3
[1] 0.3550849

> alpha<-0.1
> -w1*(qnorm(alpha,m,s)-r)              # Vert1
[1] 0.1461049
> -w2*(m+s*(qgamma(alpha,1,1)-1)-r)   # Vert2
[1] 0.1112341
> -w3*(m-s*(qgamma(1-alpha,1,1)-1)-r) # Vert3
[1] 0.1320609

> alpha<-0.05
> -w1*(qnorm(alpha,m,s)-r)              # Vert1
[1] 0.1920594
> -w2*(m+s*(qgamma(alpha,1,1)-1)-r)   # Vert2
[1] 0.1190634
> -w3*(m-s*(qgamma(1-alpha,1,1)-1)-r) # Vert1
[1] 0.2098928

> alpha<-0.01
> -w1*(qnorm(alpha,m,s)-r)              # Vert1
[1] 0.2782623
> -w2*(m+s*(qgamma(alpha,1,1)-1)-r)   # Vert2
[1] 0.1250357
> -w3*(m-s*(qgamma(1-alpha,1,1)-1)-r) # Vert3
[1] 0.3906129
```

□

4.2 Risikoprämie

Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt **konvex**, wenn für alle $x, y \in \mathbb{R}$ und $\alpha \in [0, 1]$,

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y).$$

4.3 SATZ. Jensen'sche Ungleichung. *Sei X eine Zufallsgröße mit endlichem Erwartungswert. Für konvexe Funktionen f gilt*

(4.9) $$\mathbb{E}[f(X)] \geq f(\mathbb{E}[X]).$$

BEGRÜNDUNG: Es genügt, (4.9) für differenzierbare konvexe Funktionen zu zeigen. Sei $\mu = \mathbb{E}[X]$.

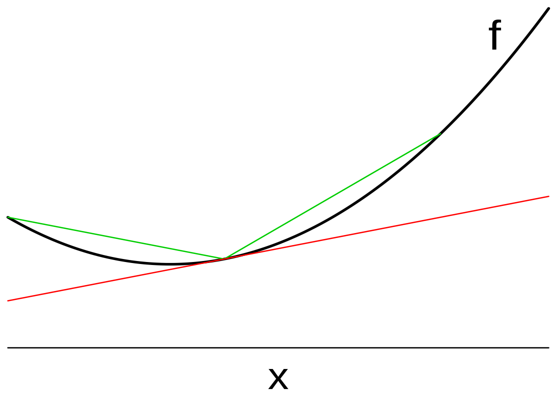

Abbildung 4.2: Jensen'sche Ungleichung

Für beliebige Punkte x und $y \in \mathbb{R}$ ist die Steigung der Sekante in x und y (die lineare Funktion, die die Punkte $(x, f(x))$ und $(y, f(y))$ verbindet) größer als $f'(y)$ falls $x > y$ und kleiner als $f'(y)$ falls $x < y$ (siehe Abbildung 4.2).
Daher ist
$$f(y) + (x - y)f'(y) \leq f(x)$$
und insbesondere
$$f(\mu) + (X - \mu)f'(\mu) \leq f(X),$$
woraus
$$\mathbb{E}[f(X)] \geq \mathbb{E}[f(\mu) + (X - \mu)f'(\mu)] = f(\mu) + f'(\mu)(\mathbb{E}[X] - \mu) = f(\mu)$$
folgt. $\square$

Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt **konkav**, wenn für alle $x, y \in \mathbb{R}$ und $\alpha \in [0,1]$,

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \geq \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y).$$

Eine Funktion f ist konkav, genau dann, wenn $-f$ konvex ist. Daher gilt für konkave Funktionen und Zufallsgrößen X mit endlichem Erwartungswert die Jensen'sche Ungleichung

$$\mathbb{E}[f(X)] \leq f(\mathbb{E}[X]).$$

Nutzenfunktionen $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind monoton wachsende konkave Funktionen. Sei X eine stochastische Zahlung mit $\mathbb{E}[X] = \mu$. Aus $u(\mu) \geq \mathbb{E}[u(X)]$ folgt

$$\mu \geq u^{-1}(\mathbb{E}[u(X)]).$$

Die Differenz

$$\pi = \mu - u^{-1}(\mathbb{E}[u(X)])$$

wird als **Risikoprämie** bezeichnet. Sie ist der Abschlag für eine fixe Auszahlung der Höhe μ, um den selben erwarteten Nutzen wie die stochastische Zahlung zu erhalten, $u(\mu - \pi) = \mathbb{E}[u(X)]$.

4.4 BEISPIEL. Sei $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ und $u(x) = 1 - e^{-\nu x}$. Man berechne die Risikoprämie. Sei $X = \mu + \sigma Z$, $Z \sim N(0,1)$. Es ist

$$\begin{aligned}
\mu &= \mathbb{E}[X], \\
\mathbb{E}[u(X)] &= 1 - \mathbb{E}[e^{-\nu(\mu+\sigma Z)}] = 1 - e^{-\nu\mu+\nu^2\sigma^2/2}, \\
u^{-1}(x) &= -\frac{\log(1-x)}{\nu}, \\
u^{-1}(\mathbb{E}[u(X)]) &= (\nu\mu - \nu^2\sigma^2/2)/\nu = \mu - \nu\sigma^2/2, \\
\pi &= \mu - u^{-1}(\mathbb{E}[u(X)]) = \mu - (\mu - \nu\sigma^2/2) = \nu\sigma^2/2.
\end{aligned}$$

□

4.3 Aufgaben

AUFGABE 4.1. Sei S ein Wertpapier, $S = s_0(1+Y)$ mit Rendite $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$, $s_0 = 100, \mu = 0.1, \sigma^2 = 0.2$. Man berechne den Value at Risk für dieses Wertpapier zum Niveau 5%.

AUFGABE 4.2. Sei S ein Wertpapier, $S = s_0(1+Y)$ mit Rendite $Y = \mu + \sigma(Z-1)$, $Z \sim \Gamma(1,1)$, $s_0 = 100, \mu = 0.1, \sigma^2 = 0.2$. Man berechne den Value at Risk für dieses Wertpapier zum Niveau 5%.

AUFGABE 4.3. Sei S ein Wertpapier, $S = s_0(1+Y)$ mit Rendite $Y = \mu - \sigma(Z-1)$, $Z \sim \Gamma(1,1)$, $s_0 = 100, \mu = 0.1, \sigma^2 = 0.2$. Man berechne den Value at Risk für dieses Wertpapier zum Niveau 5%.

AUFGABE 4.4. Sei S ein Wertpapier, $S = s_0 e^{\mu + cZ}$, mit $Z \sim t(2)$, $s_0 = 100, \mu = 0.1, c = 0.2$. Man berechne $P(S < s_0)$. Sei $R = \log(S/s_0)$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß $R > 5\%$ ist? Wie lautet das 95% Quantil von R?

AUFGABE 4.5.

1. Sei $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ und $u(x) = 1 - e^{-\nu x}$. Man berechne die Risikoprämie.
2. Sei $X = \mu + \sigma(Z-1)$ mit $Z \sim \Gamma(1,1)$ und $u(x) = 1 - e^{-\nu x}$. Man berechne die Risikoprämie.
3. Sei $X = \mu - \sigma(Z-1)$ mit $Z \sim \Gamma(1,1)$ und $u(x) = 1 - e^{-\nu x}$. Man berechne die Risikoprämie.

AUFGABE 4.6.

1. Sei $X = x_0 e^{\mu + \sigma Z}$ mit $Z \sim N(0,1)$ und $u(x) = \log x$. Man berechne die Risikoprämie.
2. Sei $X = x_0 e^{\mu + \sigma(Z-1)}$ mit $Z \sim \Gamma(1,1)$ und $u(x) = \log x$. Man berechne die Risikoprämie.
3. Sei $X = x_0 e^{\mu - \sigma(Z-1)}$ mit $Z \sim \Gamma(1,1)$ und $u(x) = \log x$. Man berechne die Risikoprämie.

Kapitel 5

Simulation

5.1 Erzeugung von Zufallszahlen

5.1.1 Pseudozufallszahlen

Populäre Methoden, Zufallszahlen zu erzeugen, sind die Inversionsmethode (Transformationsmethode) und die Verwerfungsmethode. Bei diesen Methoden wird eine gleichverteilte Zufallszahl verwendet, um eine Zufallszahl mit Verteilungsfunktion F zu erzeugen.
Bei der Monte Carlo Simulation werden an Stelle von gleichverteilten Zufallszahlen sogenannte **Pseudozufallszahlen** verwendet. Auch wenn diese Pseudozufallszahlen nicht zufällig sind, sie werden durch verschiedene Algorithmen (Rechenvorschriften) deterministisch erzeugt, sind sie als Approximation geeignet. Insbesondere zur Simulation von niedrigdimensionalen Verteilungen sind Abweichungen der so gewonnenen relativen Häufigkeiten klein. Bei hochdimensionalen Verteilungen oder der Simulation von Pfaden von stochastischen Prozessen können sich die verwendeten Methoden unterscheiden. Von den meisten Softwarepaketen werden Pseudozufallszahlen in zufriedenstellender Qualität zur Verfügung gestellt werden.

5.1.2 Inversionsmethode

Sei X univariat mit Verteilungsfunktion F und F^{-1} die Quantilsfunktion,

$$F^{-1}(u) = \min\{x \mid F(x) \geq u\},$$

vgl. (3.1). Ist $U \sim \mathbb{U}[0,1]$, dann ist $F^{-1}(U) \sim F$.

5.1 BEISPIEL. Sei X exponential verteilt mit Erwartungswert 1, d.h. $X \sim \Gamma(1,1)$. Es gilt für $x \geq 0$

$$F(x) = \int_0^x e^{-t} dt$$

$$= \quad 1 - e^{-x}$$

und damit ist

$$F^{-1}(x) = -\log(1-x).$$

Ist $U \sim \mathbb{U}$, dann ist $-\log(1-U) \sim \Gamma(1,1)$. Da U und $1-U$ dieselbe Verteilung besitzen, ist $X = -\log U \sim \Gamma(1,1)$. $\square$

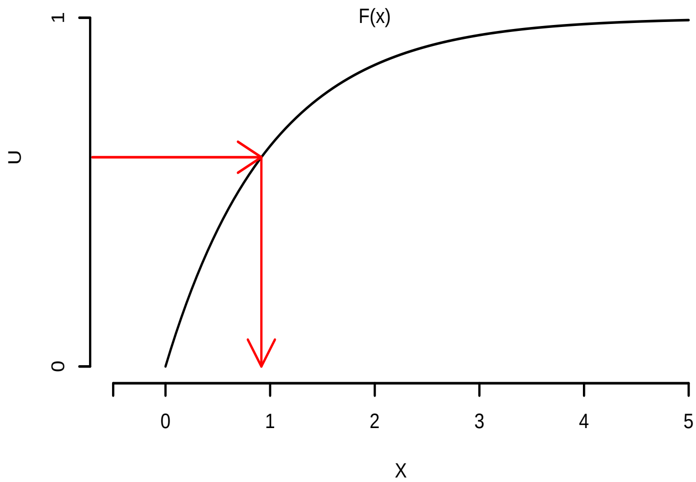

Abbildung 5.1: Inversionsmethode, stetige Verteilung

5.2 BEISPIEL. Sei X poissonverteilt mit Erwartungswert λ. Die Verteilungsfunktion $F(x)$ ist stückweise konstant, daher nicht invertierbar. $(F(n-1), F(n)]$ ist ein Intervall der Länge

$$F(n) - F(n-1) = P(X = n)$$

und es gilt

$$(0,1) = \bigcup_{n=0}^{\infty} (F(n-1), F(n)].$$

Für $U \sim \mathbb{U}$ sei $n \in \mathbb{N}$ mit $U \in (F(n-1), F(n)]$, d.h. $F(n-1) < U \leq F(n)$. Wählt man $X = n$, dann ist $X \sim P(\lambda)$. $\square$

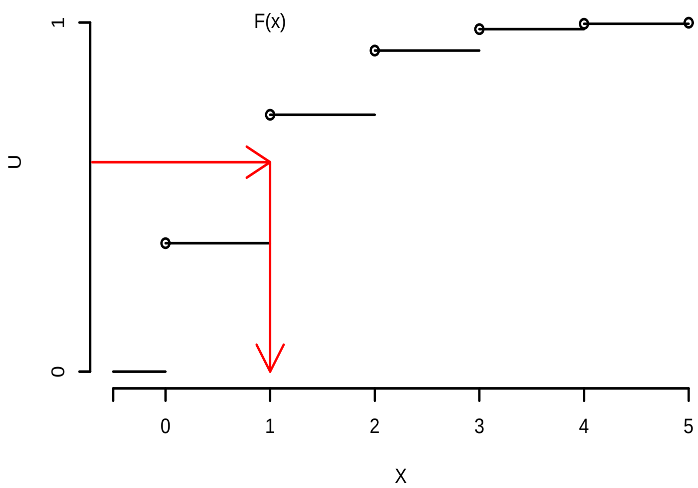

Abbildung 5.2: Inversionsmethode, diskrete Verteilung

5.1.3 Verwerfungsmethode

Sei f_0 die Dichte von X. f sei proportional zu f_0, d.h. $c_0 f_0(x) = f(x)$ mit einer (möglicherweise unbekannten) Normierungskonstante c_0. Man wählt eine Dichte g, sodaß

1. es ein $c > 0$ gibt, sodaß für alle $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \leq cg(x)$ gilt und

2. es möglich ist, g-verteilte Zufallszahlen zu erzeugen.

Die Verwerfungsmethode besteht aus folgenden Schritten.
1. Schritt: Erzeuge $Y \sim g$.
2. Schritt: Erzeuge $U \sim \mathbb{U}[0, cg(Y)]$.
3. Schritt: Akzeptiere $X = Y$ falls $U \leq f(Y)$. Andernfalls wird Y verworfen und die Schritte 1, 2 und 3 werden wiederholt.
Die Verteilung der so erzeugten Zufallsgröße X ist die Verteilung von Y bedingt unter dem Ereignis, daß Y akzeptiert wird. Es gilt

$$
\begin{aligned}
P(X \leq x) &= \frac{P(Y \leq x \text{ und } Y \text{ wird akzepiert})}{P(Y \text{ wird akzepiert})} \\
&= \frac{P(Y \leq x, U \leq f(Y))}{P(U \leq f(Y))}
\end{aligned}
$$

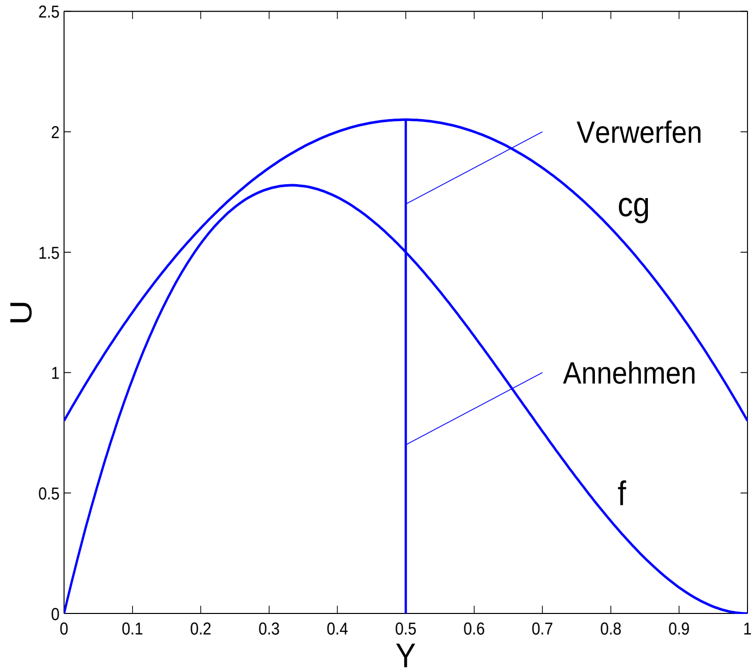

Abbildung 5.3: Verwerfungsmethode

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\int_{-\infty}^{x} P(U \le f(y))g(y)dy}{\int_{-\infty}^{\infty} P(U \le f(y))g(y)dy} \\
&= \frac{\int_{-\infty}^{x} \frac{f(y)}{cg(y)} g(y)dy}{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(y)}{cg(y)} g(y)dy} \\
&= \frac{\int_{-\infty}^{x} f(y)dy}{\int_{-\infty}^{\infty} f(y)dy} \\
&= \frac{\int_{-\infty}^{x} f(y)dy}{c_0} \\
&= \int_{-\infty}^{x} f_0(y)dy.
\end{aligned}
$$

Der Anteil der g-verteilten Variablen Y, die verworfen werden, ist proportional zum Anteil der Fläche zwischen f und cg an der Fläche unter cg. Je kleiner dieser Flächenanteil ist, desto effizienter ist die Verwerfungsmethode. Im Extremfall ist $f = g$ und damit $c = 1$. Dann wird natürlich nie verworfen.

Wir wollen die Verwerfungsmethode noch kurz diskutieren. Sei

$$A = \{(Y, U) \mid 0 \le Y \le cg(Y)\}.$$

g ist eine Dichte und $c > 0$ eine Konstante. Sei (Y, U) gleichverteilt auf A, d.h. $B_1, B_2 \subseteq A$, besitzen die selbe Wahrscheinlichkeit, wenn sie die selbe Fläche besitzen. Dann gilt

$$P((Y,U) \in B) = \frac{\text{Fläche}(B)}{\text{Fläche}(A)} = \frac{\text{Fläche}(B)}{c}.$$

Insbesondere gilt für Rechtecke $B \subseteq A$

$$P((Y,U) \in B) = \frac{\text{Breite} \times \text{Höhe}}{c}.$$

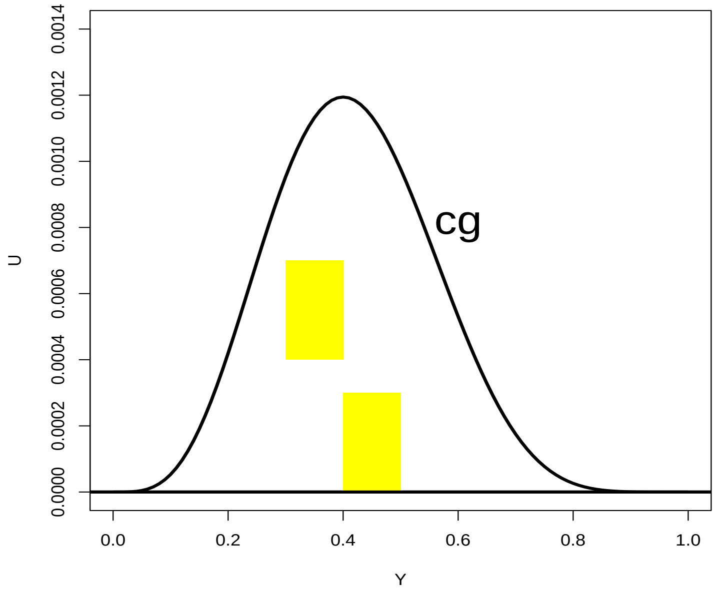

Abbildung 5.4: Gleichverteilung auf $A = \{(Y, U) \mid 0 \leq U \leq cg(Y)\}$

Wie lautet die Randverteilung von Y?

$$\begin{aligned} P(a \leq Y \leq b) &= P(a \leq Y \leq b, 0 \leq U \leq cg(Y)) \\ &= \frac{\int_a^b cg(y)dy}{c} \\ &= \int_a^b g(y)dy. \end{aligned}$$

Y besitzt die Dichte g.

Die bedingte Verteilung von $U \mid Y = y$ ist die Gleichverteilung im Intervall $[0, cg(y)]$.

Sei $B \subseteq A$ eine Teilmenge von A, etwa

$$B = \{(Y, U) \mid 0 \leq U \leq f(Y)\},$$

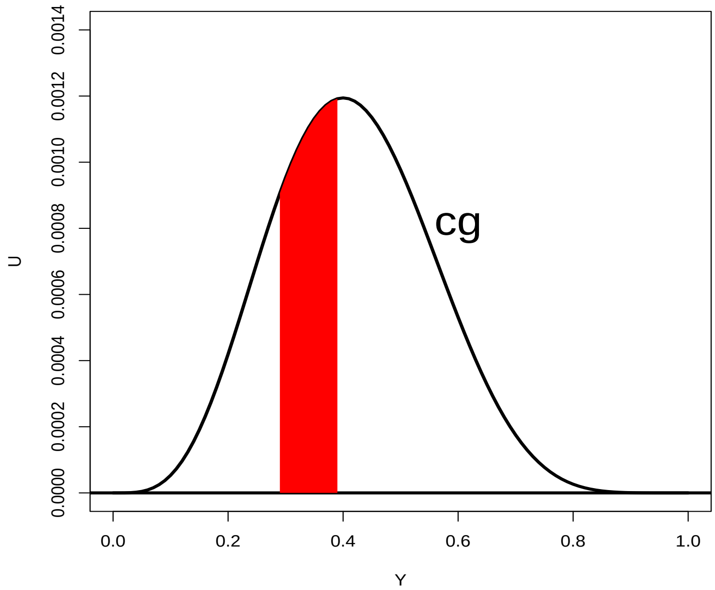

Abbildung 5.5: Randverteilung von Y

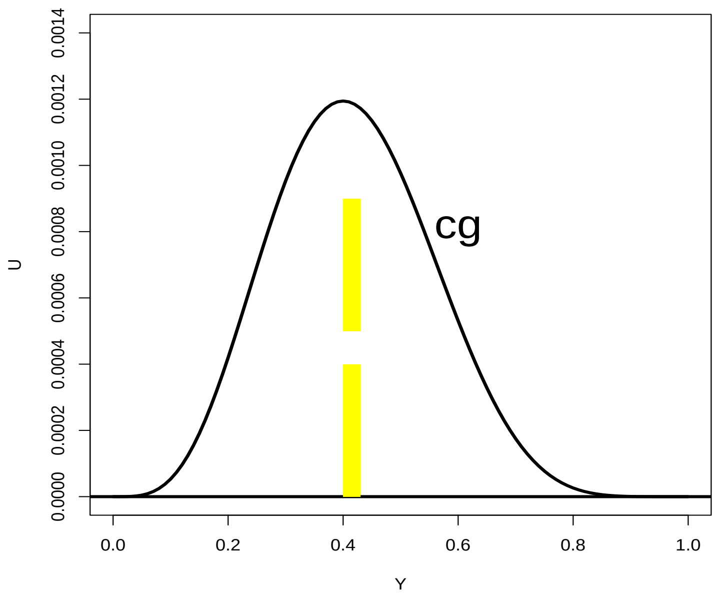

Abbildung 5.6: Bedingte Verteilung von $U \mid Y$

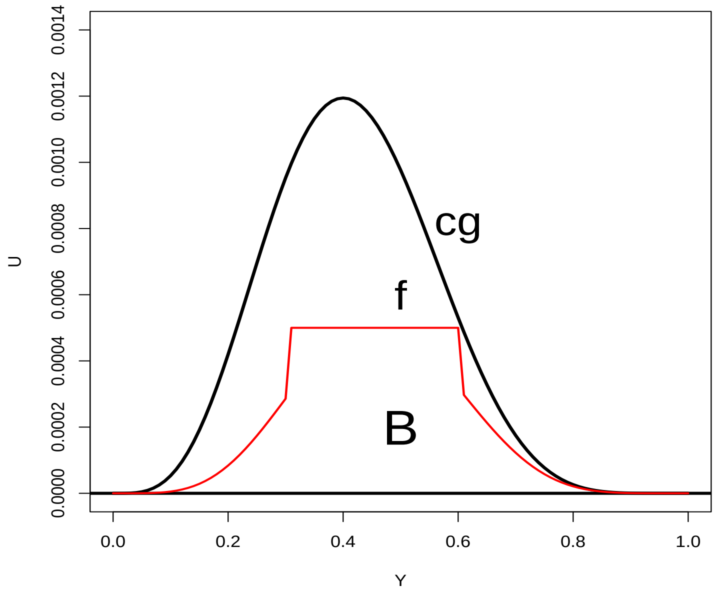

Abbildung 5.7: Bedingte Verteilung von (Y, U) unter $(Y, U) \in B$

wobei f proportional zur Dichte f_0 ist. Wenn (Y, U) gleichverteilt auf A ist, dann ist

$$(Y, U) \mid (Y, U) \in B$$

gleichverteilt auf B. Die Randverteilung von Y unter dieser bedingten Verteilung besitzt eine Dichte, die proportional zu f ist, d.h.

$$Y \mid (Y, U) \in B \sim f_0.$$

5.3 BEISPIEL. Touristenbusse besuchen am Ende einer Tour ein Souveniergeschäft. Der Besitzer des Geschäfts analysiert das Kaufverhalten der Kunden. Touristen, die mit dem selben Bus kommen, kaufen mit Wahrscheinlichkeit X mindestens ein Souvenir. Diese Wahrscheinlichkeit X variiert zwischen den Bussen. Man kann annehmen, daß $X \sim \mathbb{U}[0, 1]$. D.h. der Anteil der Bussse, die Touristen mit Kaufwahrscheinlichkeit $X \in [a, b]$ bringen, ist $b - a$.
Von 9 Touristen die gemeinsam zum Geschäft gebracht wurden, haben 3 etwas gekauft, 5 werden nichts kaufen (sie haben das Geschäft schon wieder verlassen), einer hat sich noch nicht entschieden. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß er etwas kaufen wird?
Sei V die Anzahl der Käufer unter den restlichen 8 Touristen. $V \mid X$ ist binomialverteilt,

$$V \mid X = x \quad \sim \quad B(8, x),$$

$$f(v \mid x) = \binom{8}{v} x^v (1-x)^{8-v},$$
$$X \sim \mathbb{U}[0,1],$$
$$f_X(x) = I_{[0,1]}(x).$$

Die bedingte Verteilung von $X \mid V = v$ besitzt eine Dichte, die für $x \in [0,1]$ proportional zu $f(v \mid x)$ ist,

$$f(x \mid v) \propto x^v (1-x)^{8-v}.$$

Wir schätzen die Wahrscheinlichkeit, daß der restliche Tourist ein Souvenir kauft, durch

$$\mathbb{E}[X \mid V = 3].$$

Dazu erzeugen wir $f(x \mid 3)$-verteilte Zufallszahlen und schätzen der Erwartungswert durch das arithmetische Mittel. Wir setzen

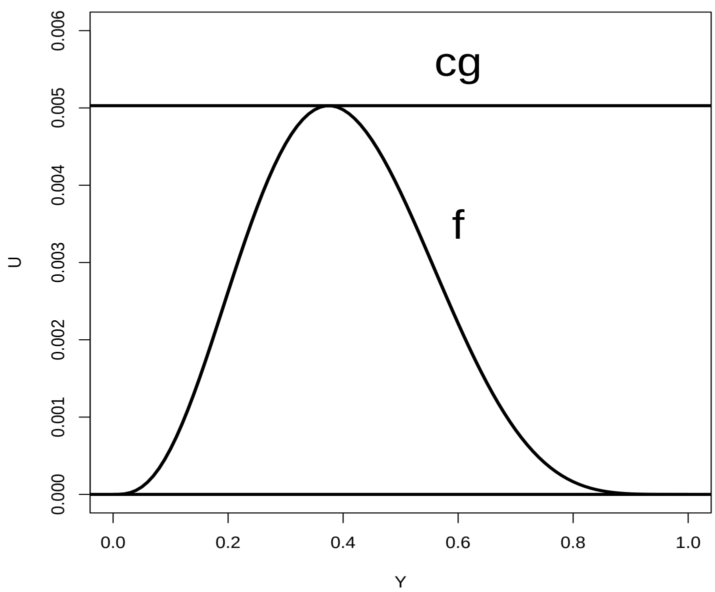

Abbildung 5.8: Bedingte Verteilung von (Y, U) unter $(Y, U) \in B$

$$f_0(x) = f(x \mid 3)$$
$$f(x) = x^3 (1-x)^5$$
$$Y \sim U[0,1]$$
$$g(y) = 1$$
$$c = \max\{f(x) \mid 0 \le x \le 1\} = (3/8)^3 (5/8)^5.$$

Die Verwerfungsmethode besteht aus folgenden Schritten:

1. Schritt: Erzeuge $Y \sim \mathbb{U}[0,1]$.

2. Schritt: Erzeuge $U \sim \mathbb{U}[0,c]$.

3. Schritt: Akzeptiere $X = Y$ falls $U \leq Y^3(1-Y)^5$. Andernfalls wird Y verworfen und die Schritte 1, 2 und 3 werden wiederholt.

```
> n<-1000
> x<-1:n
> c<-(3/8)^3*(5/8)^5
> for(i in 1:n){u<-1
+ y<-0 + while(u>y^3*(1-y)^5){u<-runif(1)*c + y<-runif(1)} + x[i]<-y}
> mean(x)
[1] 0.4033851
> mean(x)-1.96*sqrt(var(x)/n)
[1] 0.4004849
> mean(x)+1.96*sqrt(var(x)/n)
[1] 0.4062852
```

□

5.4 BEISPIEL. Ein Aktienkurs X sei lognormalverteilt mit

$$X = X_0 e^{\sigma Z - \sigma^2/2},$$

mit $X_0 = 100$ und $Z \sim N(0,1)$. Die Volatilität ist stochastisch, $V = 1/\sigma^2 \sim \Gamma(a,b)$ mit $a = 1$ und $b = 1/2$. Die Volatilität σ ist nicht beobachtbar, der Aktienkurs liefert Information über diese beiden Größen. Man berechne die bedingte Verteilung von $V \mid X = 150$ und schätze Mittelwert, Varianz und Median von σ.

Unter $V = v$ ist $\log X$ normalverteilt mit Erwartungswert $\log X_0 - 1/2v$ und Varianz $1/v$. Die Dichte der gemeinsamen Verteilung von $(\log X, V)$ ist daher

$$f(\log x, v) = \sqrt{v/2\pi}e^{-v(\log(x/X_0)-1/2v)^2/2}(1/2)e^{-v/2}.$$

Sei $f_0(v \mid x)$ die Dichte von $V \mid X = x$. $f_0(v \mid x)$ ist proportional zu

$$v^{1/2}e^{-\hat{b}v}e^{-1/(8v)}$$

mit $\hat{b} = (1+\log(x/X_0)^2)/2 = (1+\log(1.5)^2)/2 \approx 0.582$. D.h.

$$f_0(v) \propto f(v) = g(v)e^{-1/(8v)},$$

wobei g die Dichte der $\Gamma(3/2, \hat{b})$-Verteilung ist. Die Normierungskonstante ist uns unbekannt. Um f_0-verteilte Zufallsgrößen zu erzeugen, bietet sich die Verwerfungsmethode an. Da $f(v) \leq g(v)$ gilt, kann $c = 1$ gewählt werden. Man erzeugt $Y \sim g$, $U \sim \mathbb{U}[0, g(Y)]$ und akzeptiert, wenn $U \leq f(Y)$. Man beachte, daß $U/g(Y) \sim \mathbb{U}[0, 1]$ und $U \leq f(Y)$ genau dann gilt, wenn $U/g(Y) \leq e^{-1/(8Y)}$.

```
> bh<-(1+log(1.5)^2)/2
> n<-1000
> v<-(1:n)*0
> for(i in 1:n){
+ y<-1 + u<-1 + while(u>exp(-1/(8*y))){y<-rgamma(3/2,1/bh) + u<-runif(1)} + v[i]<-y}
> sigma<-1/sqrt(v)
> mean(sigma)
[1] 0.9063537
> var(sigma)
[1] 0.1729541
> median(sigma)
[1] 0.7958212
```

□

5.2 Monte Carlo Simulation

5.2.1 Gesetz der großen Zahlen und zentraler Grenzverteilungssatz

Die Untersuchung von Grenzwerten arithmetischer Mittel bzw. der Grenzverteilung von geeignet skalierten arithmetischen Mittel hat eine lange Tradition in der mathematischen Statistik und Wahrscheinlichkeitstheorie. Die erste Gruppe von Aussagen wird unter dem Begriff Gesetz der großen Zahlen zusammengefaßt, sie rechtfertigt die Interpretation des Erwartungswerts als langfristigen Durchschnitt.

5.5 SATZ. Gesetz der großen Zahlen: *Sind $X_1, X_2, \ldots$ unabhängig und identisch verteilt, $X_i \sim P$, mit endlichem Erwartungswert μ, dann ist*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} = \mu \qquad (5.1)$$

mit Wahrscheinlichkeit 1.

```
> n<-400
> i<-1:n
> plot(i,i*0,,type="n",xlab="n",ylab="",ylim=c(0,1))
> for(j in 1:10){x<-cumsum(runif(n))/i
+ lines(i,x,col=j)}
> plot(i,i*0,,type="n",xlab="n",ylab="",ylim=c(0,1))
> for(j in 1:10){x<-cumsum(runif(n))/i
+ lines(i,x,col=j)}
```

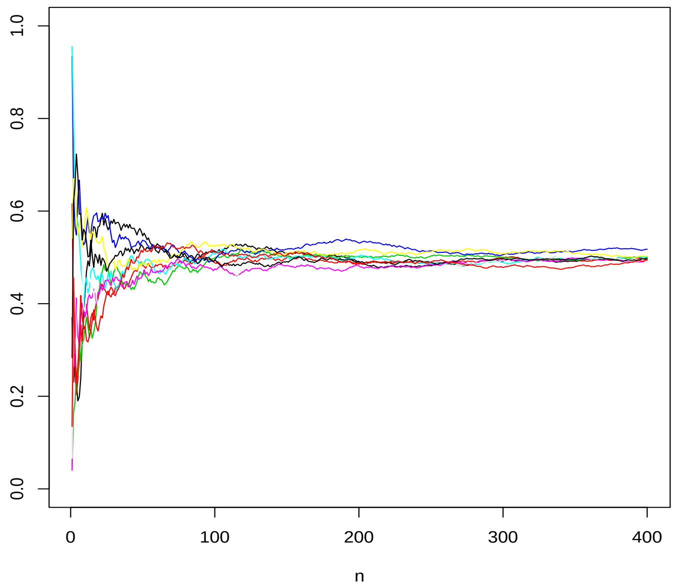

Abbildung 5.9: 10 Pfade arithmetischer Mittel

Die Verteilung der Abweichung von Erwartungswert und arithmetischem Mittel kann mit Hilfe des zentralen Grenzwertsatzes approximativ angegeben werden.

5.6 SATZ. Zentraler Grenzwertsatz: *Sind $X_1, X_2, \ldots$ unabhängig und identisch verteilt, $X_i \sim P$, mit endlichem Erwartungswert μ und endlicher Varianz σ^2, dann gilt für $x \in \mathbb{R}$*

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} \leq x\right) = \Phi(x). \tag{5.2}$$

Für alle stetigen und beschränkten Funktionen g gilt

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[g\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}\right)\right] = \int g(x)\phi(x)dx. \tag{5.3}$$

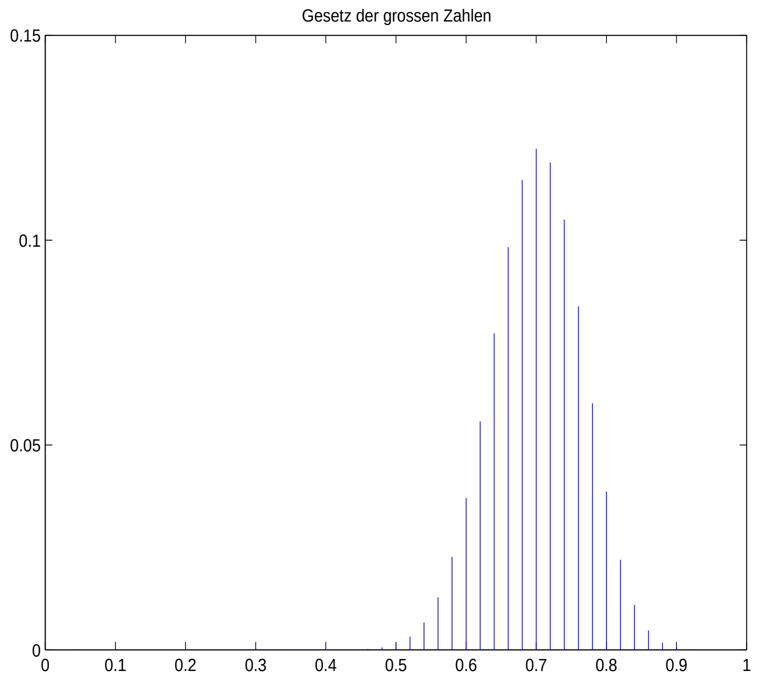

Abbildung 5.10: Verteilung des arithmetischen Mittels, $n = 50$, $\mu = 0.7$

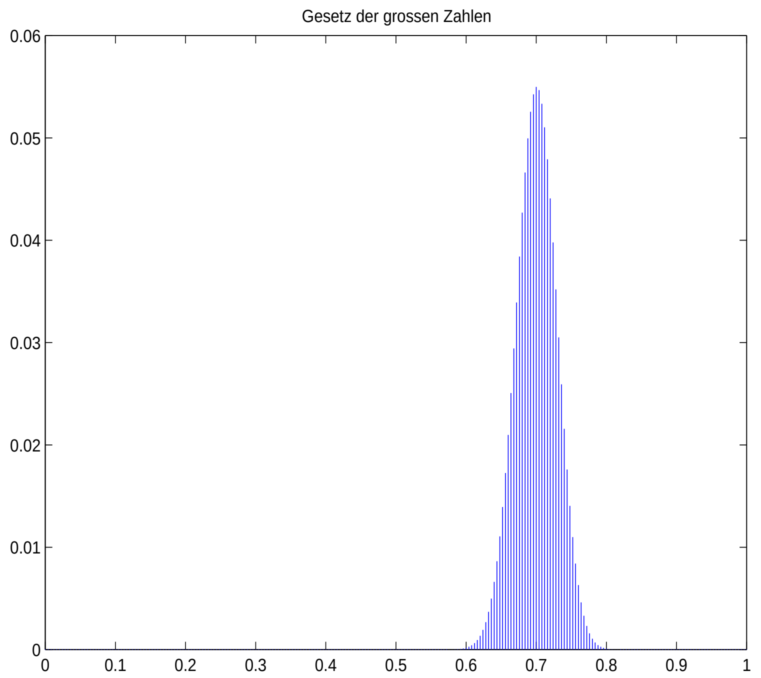

Abbildung 5.11: Verteilung des arithmetischen Mittels, $n = 250$, $\mu = 0.7$

5.7 BEISPIEL. Die Abbildungen 5.10 und 5.11 zeigen die Wahrscheinlichkeitsfunktion von relativen Häufigkeiten eines Ereignisses A mit $P(A) = 0.7$ für die Stichprobengrößen $n = 50$ und $n = 250$. Nach dem zentralen Grenzverteilungssatz 5.2 liegen diese relativen Häufigkeiten in den Intervallen

$$P(A) \pm 1.96\sqrt{P(A)(1 - P(A))/n}$$

mit ungefähr 95% Wahrscheinlichkeit. Diese Intervalle sind $[0.57, 0.83]$ für $n = 50$ und $[0.64, 0.76]$ für $n = 250$. □

Man beachte, daß das Gesetz der großen Zahlen und der zentrale Grenzverteilungssatz nicht mehr gelten, wenn die Voraussetzungen geändert werden. Der Zentrale Grenzverteilungssatz benötigt die Existenz der Varianz. Für Verteilungen, die keine Varianz besitzen, kommen auch andere Verteilungen (als die Normalverteilung) als Grenzwerte der Verteilungen der skalierten arithmetischen Mittel in Frage. Hängt die Verteilung P von n, ist die Poissonverteilung eine mögliche Grenzverteilung:

5.8 BEISPIEL. Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig mit $P(X_i = 1) = p$ und $P(X_i = 0) = 1 - p$. Dann ist $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n \sim B(n, p)$, $S_n/n \to p$ und $(S_n - np)/\sqrt{np(1-p)}$ ist asymptotisch normalverteilt. Die letzten beiden Aussagen gelten, wenn p nicht von n abhängt. Sei $p = p_n$ von der Form $p_n = \lambda/n$, dann ist

$$\begin{aligned} P(S_n = k) &= \binom{n}{k} p_n^k (1 - p_n)^{n-k} \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{\lambda^k}{n^k} (1 - \frac{\lambda}{n})^{n-k} \\ &= \frac{\lambda^k}{k!} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k} (1 - \frac{\lambda}{n})^{n-k}. \end{aligned}$$

Aus

$$\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k} = 1 \times (1 - \frac{1}{n}) \times \cdots \times (1 - \frac{k-1}{n}) \to 1$$

und

$$(1 - \frac{\lambda}{n})^{n-k} \to e^{-\lambda}$$

folgt

$$P(S_n = k) \to \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda},$$

d.h. S_n ist asymptotisch $P(\lambda)$-verteilt. □

5.2.2 Monte Carlo Integration

Grundlage der Monte Carlo Simulation ist das Gesetz der großen Zahlen: Sind $X_1, X_2, \ldots$ unabhängig und identisch verteilt mit endlichem Erwartungswert μ, dann konvergiert die Folge der arithmetischen Mittel $(\bar{X}_n)$ gegen μ.

Man kann also Erwartungswerte näherungsweise durch arithmetische Mittel von unabhängigen Zufallsvariablen bestimmen. Es soll zum Beispiel den Erwartungswert von $g(X)$ berechnet werden. Wir nehmen an, daß X eine Dichte $f(x)$ besitzt. Es ist

$$\mathbb{E}[g(X)] = \int g(x)f(x)dx.$$

Kann man unabhängige Zufallsvariable X_i, die dieselbe Verteilung wie X besitzen, erzeugen, dann ist

$$\frac{g(X_1) + \cdots + g(X_n)}{n}$$

ein Schätzwert von $\mathbb{E}[g(X)]$. Analog kann man Integrale

$$\mu = \int g(x)dx$$

näherungsweise berechnen. Sei f eine Dichte f mit $\{x \mid g(x) \neq 0\} \subseteq \{x \mid f(x) > 0\}$. Dann gilt

$$\int g(x)dx = \int \frac{g(x)}{f(x)} f(x)dx = \mathbb{E}[g(X)/f(X)].$$

Man wählt daher eine Dichte $f(x)$, generiert eine f-verteilte Strichprobe $X_1, \ldots, X_n$ und schätzt $\int g(x)dx$ durch

$$\hat{\mu}_n = \frac{g(X_1)/f(X_1) + \cdots + g(X_k)/f(X_n)}{n}. \tag{5.4}$$

Zur Beurteilung der Genauigkeit der Schätzung bzw. zur Bestimmung der Stichprobengröße kann der zentrale Grenzwertsatzes herangezogen werden. Sind $X_1, X_2, \ldots$ unabhängig und identisch verteilt mit Erwartungswert μ und σ^2, dann ist $(\bar{X}_n - \mu)/\sqrt{\sigma^2/n}$ annähernd standardnormalverteilt.

5.9 BEISPIEL. S_1, S_2 und S_3 bezeichnet drei Aktienkurse zum Zeitpunkt $t = 1$. M ist ein Derivat, das $M = \max\{S_2, S_2, S_3\}$ wert ist. Wie lautet μ, der Erwartungswert von M? Die Genauigkeit der Schätzung soll mindestens ± 1 Euro sein.

Es wird angenommen, daß die Aktienkurse unabhängig und lognormalverteilt sind. In $t = 0$ sind $S_1 = S_2 = S_3 = 100$ (Euro) und ihre Erwartungswerte sind ebenfalls gleich 100. Die Standardabweichungen der Logarithmen sind $\sigma_1 = 0.2$, $\sigma_2 = 0.4$, $\sigma_2 = 0.6$.

Es ist

$$M = \max\{100e^{\sigma_1 Z_1 - \sigma_1^2/2}, 100e^{\sigma_2 Z_2 - \sigma_2^2/2}, 100e^{\sigma_3 Z_3 - \sigma_3^2/2}\}, \tag{5.5}$$

mit unabhängigen $Z_1, Z_2, Z_3 \sim N(0, 1)$.

Zuerst generieren wir $n = 250$-mal Z_1, Z_2, Z_3, berechnen M durch (5.5) und speichern die 250 generierten Werten von M. Wir erhalten $\bar{M} = 136.84$ und eine Stichprobenvarianz $s_{n-1}^2 = 2784.61$.

Zur Abschätzung der Genauigkeit berechnen wir das Intervall

$$[\bar{M} - 1.96\sqrt{s_{n-1}^2/n}, \bar{M} + 1.96\sqrt{s_{n-1}^2/n}] = [130.30, 143.39].$$

Wir sehen, daß die Genauigkeit von ± 1 nicht erfüllt ist. Um die Stichprobebgröße n zu bestimmen, schätzen wir die Varianz von M durch s^2_{n-1}. Es soll

$$1.96\sqrt{s^2_{n-1}/n} \le 1$$

gelten. Damit ist

$$\begin{aligned} n &\ge 1.96^2 s^2_{n-1} \\ &= 1.96^2 * 2784.61 \\ &= 10697.37 \end{aligned}$$

Man muß $n \ge 10698$ wählen. Eine Wiederholung der Simulation mit $n = 15000$ ergibt $\bar{M} = 137.54$, $s^2_{n-1} = 2818.68$ und

$$[\bar{M} - 1.96\sqrt{s^2_{n-1}/n}, \bar{M} + 1.96\sqrt{s^2_{n-1}/n}] = [136.69, 138.39].$$

```
> n<-15000
> sigma1<-0.2
> x1<-100*exp(rnorm(n,-0.5*sigma1^2,sigma1))
> sigma2<-0.4
> x2<-100*exp(rnorm(n,-0.5*sigma2^2,sigma2))
> sigma3<-0.6
> x3<-100*exp(rnorm(n,-0.5*sigma3^2,sigma3))
> Y<-matrix(c(x1,x2,x3),ncol=3,nrow=n)
> M<-apply(Y,1,max)
> mean(M)
[1] 137.54
> var(M)
[1] 2818.68
```

$\square$

5.10 BEISPIEL. Der Aktienkurs X sei gegeben durch

$$X = x_0 e^{SZ - S^2/2},$$

mit $x_0 = 100$, $Z \sim N(0,1)$ und $1/S^2 \sim \Gamma(5,2)$. Man schätze $P(X > 130 \text{ oder } X < 80)$.

```
> x0<-100
> a<-5
> b<-2
> n<-10000
> Z<-rnorm(n)
> P<-rgamma(n,a,1/b)
> S<-1/sqrt(P)
> X<-x0*exp(S*Z-S^2/2)
> I<-(X>130)|(X<80)
> muest<-mean(I)
> muest
[1] 0.7303
> varest<-var(I)/n
> varest
[1] 1.969816e-05
> c(muest-1.96*sqrt(varest),muest+1.96*sqrt(varest))
[1] 0.721601 0.738999
```

□

5.2.3 Simulation von Quantilen

Die Möglichkeit, Zufallsvariable mit einer vorgegebenen Verteilung zu erzeugen, erlaubt nicht nur die Schätzung von Erwartungswerten durch arithmetische Mittel. Soll zum Beispiel das Quantil einer Verteilung F approximativ berechnet werden, kann das Quantil einer F-verteilten Stichprobe als Schätzer herangezogen werden. Die Kontrolle der Genauigkeit erfolgt durch das Konfidenzintervall für Quantile.

Sei $0 < p < 1$, $X_1, \ldots, X_n$ eine Stichprobe mit Verteilung F und $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \cdots \leq X_{(n)}$ die Ordnungsgrößen. Eine Zahl $\hat{Q}_p$ ist ein p-Quantil der Stichprobe, falls

$$\#\{i \mid X_{(i)} \leq \hat{Q}_p\} \geq pn$$

und

$$\#\{i \mid X_{(i)} \geq \hat{Q}_p\} \geq (1-p)n.$$

Sei α die Überdeckungswahrscheinlichkeit des Konfidenzintevalls, c_1 und c_2 das $(1-\alpha)/2$-Quantil und das $(1+\alpha)/2$-Quantil der Binomialverteilung $B(n,p)$. Wir wählen als Konfidenzintevall für das Quantil Q_p

(5.6) $$[X_{(c_1)}, X_{(c_2)}].$$

Wir wollen zeigen, daß

$$P(X_{(c_1)} \le Q_p \le X_{(c_2)}) \ge \alpha.$$

Wir setzen voraus, daß $P(X_i \le Q_p) = p$ gilt. Wir definieren Zufallsgrößen Y_i durch $Y_i = 1$, falls $X_i \le Q_p$ und $Y_i = 0$ sonst. Dann ist $S = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n \sim B(n,p)$ und es gilt

$$\begin{aligned} S \ge c_1 &\Leftrightarrow Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n \ge c_1 \\ &\Leftrightarrow \#\{i \mid Y_i = 1\} \ge c_1 \\ &\Leftrightarrow \#\{i \mid X_{(i)} \le Q_p\} \ge c_1 \\ &\Leftrightarrow X_{(c_1)} \le Q_p \end{aligned}$$

und damit

$$P(X_{(c_1)} \le Q_p) = P(S \ge c_1) \ge 1 - \frac{1-\alpha}{2} = \frac{1+\alpha}{2}.$$

Analog zeigt man

$$P(X_{(c_2)} < Q_p) \le \frac{1-\alpha}{2}.$$

Dann folgt

$$\begin{aligned} P(X_{(c_1)} \le Q_p \le X_{(c_2)}) &= P(X_{(c_1)} \le Q_p) - P(X_{(c_2)} < Q_p) \\ &\ge \frac{1+\alpha}{2} - \frac{1-\alpha}{2} = \alpha. \end{aligned}$$

5.11 BEISPIEL. Der Aktienkurs X sei gegeben durch

$$X = x_0 e^{SZ - S^2/2},$$

mit $x_0 = 100$, $Z \sim N(0,1)$ und $1/S^2 \sim \Gamma(5,2)$. Man schätze den Value at Risk (VaR) zum Niveau 5% und 1%.

Der VaR zum Niveau ν ist das $(1-\nu)$-Quantil der Verteilung des Verlusts

$$V = x_0 - X = x_0(1 - e^{SZ - S^2/2}).$$

```
> x0<-100
> a<-5
> b<-2
> alpha<-0.95
```

```
> n<-10000
> Z<-rnorm(n)
> P<-rgamma(n,a,1/b)
> S<-1/sqrt(P)
> X<-x0*exp(S*Z-S^2/2)
> V<-x0-X
> V<-sort(V)

> p<-0.95     # Niveau 5 Prozent
> VaR<-V[p*n] # Value at Risk
> VaR
[1] 83.71266

> c1<-qbinom((1-alpha)/2,n,p)
> c1
[1] 9457
> c2<-qbinom((1+alpha)/2,n,p)
> c2
[1] 9542
> c(V[c1],V[c2])  # Konfidenzintervall
[1] 83.04039 84.34100


> p<-0.99      # Niveau 1 Prozent
> VaR<-V[p*n]  # Value at Risk
> VaR
[1] 93.57316
> c1<-qbinom((1-alpha)/2,n,p)
> c1
[1] 9880
> c2<-qbinom((1+alpha)/2,n,p)
> c2
[1] 9919
> c(V[c1],V[c2])   # Konfidenzintervall
```

```
[1] 92.65100 94.20175
```

□

5.3 Aufgaben

AUFGABE 5.1. Sei P eine Verteilung auf $\mathbb{N}$ mit

$$P(\{n\}) = \frac{1}{n(n+1)}.$$

Schlagen Sie eine Methode zur Erzeugung von P-verteilten Zufallsgrößen vor.

AUFGABE 5.2. Schlagen Sie eine Methode zur Erzeugung von Pareto-verteilten Zufallsgrößen vor.

AUFGABE 5.3. Seien $X_1, \ldots, X_{20}$ unabhängig und $N(0,1)$ -verteilt. Erzeugen Sie Zufallsvariable, die die selbe Verteilung wie $Y = 20 \max\{X_1, \ldots, X_{20}\}$ besitzen. Schätzen Sie den Erwartungswert von Y.

AUFGABE 5.4. Die Dichte $f(x)$ sei proportional zu

$$\frac{e^{-x}}{1+x^2}, \quad x > 0$$

und $f(x) = 0$ für $x \leq 0$. Erzeugen Sie f-verteilte Zufallsvariable.

AUFGABE 5.5. Die Dichte $f(x)$ sei proportional zu

$$\frac{e^{-1/x^2}}{1+x^2}$$

Erzeugen Sie f-verteilte Zufallsvariable.

AUFGABE 5.6. Die Dichte $f(x)$ sei proportional zu

$$x(1-x), \quad x \in [0,1].$$

Erzeugen Sie f-verteilte Zufallsvariable.

Eine Calloption ist das Recht, eine Aktie zu einem vorgegebenen Preis K (dem Ausübungspreis) zu kaufen. Eine Putoption ist das Recht, eine Aktie zu einem vorgegebenen Preis K (dem Ausübungspreis) zu verkaufen. Ist X der Kurs der Aktie. Die Calloption wird zum Fälligkeitszeitpunkt ($T = 1$)

ausgeübt, wenn sie im Geld ist, d.h. wenn $X > K$. In diesem Fall wird K bezahlt und Käufer der Option erhält X. Der Wert der Calloption zum Ausübungszeitpunkt (die Auszahlungsfunktion) ist

$$C = (X - K)_+ (= \max\{X - K, 0\}).$$

Entsprechend ist die Auszahlungsfunktion des Puts

$$P = (K - X)_+ (= \max\{K - X, 0\}).$$

Sei r ein (nomineller) Zinssatz. Der erwartete Barwert der Calloption ist

$$\mathbb{E}[e^{-r} C] = \mathbb{E}[e^{-r}(X - K)_+].$$

AUFGABE 5.7. Sei X ein Aktienkurs, $X = 100e^Z$ mit $Z \sim N(-0.1, 0.2)$. Sei ein nomineller Zinssatz von 3% gegeben.

1. Schätzen Sie den Value at Risk der Aktie (Niveau 5%, Punktschätzung und Konfidenzintervall).
2. Schätzen Sie für eine Calloption auf die Aktie X mit Ausübungspreis 100 den erwarteten Barwert und die Wahrscheinlichkeit, daß die Option im Geld ist.
3. Schätzen Sie für eine Putoption auf die Aktie X mit Ausübungspreis 100 den erwarteten Barwert und die Wahrscheinlichkeit, daß die Option im Geld ist.

Versuchen Sie, die Genauigkeit und damit die Größe der Stichproben geeignet zu wählen (etwa $\pm 1\%$).

AUFGABE 5.8. Sei X ein Aktienkurs, $X = 100e^Z$ mit $Z \sim N(-0.1, \sigma^2)$ und stochastischer Volatilität $\sigma^2 \sim \Gamma(1, 5)$. Sei ein nomineller Zinssatz von 3% gegeben.

1. Schätzen Sie den Value at Risk der Aktie (Niveau 5%, Punktschätzung und Konfidenzintervall).
2. Schätzen Sie für eine Calloption auf die Aktie X mit Ausübungspreis 100 den erwarteten Barwert und die Wahrscheinlichkeit, daß die Option im Geld ist.
3. Schätzen Sie für eine Putoption auf die Aktie X mit Ausübungspreis 100 den erwarteten Barwert und die Wahrscheinlichkeit, daß die Option im Geld ist.

Versuchen Sie, die Genauigkeit und damit die Größe der Stichproben geeignet zu wählen (etwa $\pm 1\%$).

Kapitel 6

Multivariate Verteilungen

6.1 Multivariate Zufallsgrößen

Ein Zufallsexperiment, das durch eine Wahrscheinlichkeitsverteilung P gesteuert wird, kann modifiziert werden, indem man die Daten filtert, d.h. man läßt nur Beobachtungen zu, die ein bestimmtes Kriterium erfüllen. Sei A ein Ereignis. Wir bezeichnen mit $h_n(A)$ und $f_n(A)$ die absolute und die relative Häufigkeit des Ereignisses A in einer Stichprobe der Größe n. Dann konvergiert nach dem Gesetz der großen Zahlen $f_n(A)$ gegen $P(A)$. Sei B ein weiteres Ereignis mit $P(B) > 0$. Werden alle Daten, die nicht in B liegen, ausgeschieden, erhält man eine Stichprobe der Größe $h_n(B)$. Die relative Häufigkeit von A in der gefilterten Stichprobe ist $h_n(A \cap B)/h_n(B)$. Es gilt

$$\frac{h_n(A \cap B)}{h_n(B)} = \frac{f_n(A \cap B)}{f_n(B)} \to \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Die Verteilung, die das modifizierte Experiment steuert, nennen wir **bedingte Verteilung** (unter B) und schreiben

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}. \tag{6.1}$$

A und B sind **stochastisch unabhängig**, wenn $P(A \mid B) = P(A)$. Man beachte, daß $P(A \mid B) = P(A)$ genau dann gilt, wenn

$$P(A \cap B) = P(A)P(B). \tag{6.2}$$

Bedingte Verteilungen erlauben, Modelle für **multivariate** (mehrdimensionale) Zufallsgrößen anzugeben. Sei (X, Y) eine bivariate Zufallsgröße. Die Verteilung von Y besitzt z.B. eine Dichte $f_Y(Y)$. $f(x \mid y)$ sei für jedes feste y eine Dichte. Man kann (X, Y) erzeugen, indem man zuerst $Y \sim f_Y(y)$ wählt. Ist $Y = y$, generiert man $X \sim f(x \mid y)$.

Die Dichte $f_Y(y)$ spezifiziert die **Randverteilung** von Y, die Famile von Dichten $f(x \mid y)$ die **bedingte Verteilung** von $X \mid Y = y$. Die **gemeinsame Verteilung** besitzt die Dichte

$$f(x, y) = f(x \mid y) f_Y(y).$$

Analog zum univariaten Fall werden bei absolut stetigen Verteilungen, d.h. Verteilungen, die eine Dichte f besitzen, Wahrscheinlichkeiten durch Volumina unter dem Graphen der Funktion f angegeben. In bivariaten Fall ist

$$P(A) = P((X, Y) \in A) = \int_A f(x, y)\, dy\, dx.$$

Das Integral $\int_A f(x, y)\, dy\, dx$ ist als Doppelintegral

$$\int \int I_A(x, y) f(x, y)\, dy\, dx$$

zu verstehen. Es wird iterativ gelöst: Zuerst berechnet man für festes x das Integral

$$\int I_A(x, y) f(x, y) dy.$$

Dieses Integral hängt von x ab. Im zweiten Schritt integriert man die Funktion

$$x \mapsto \int I_A(x, y) f(x, y) dy,$$

$$\int \int I_A(x, y) f(x, y)\, dy\, dx = \int \left(\int I_A(x, y) f(x, y) dy \right) dx.$$

6.1 BEISPIEL. X besitze die Verteilungsfunktion $F_X(x) = x^3$ in $x \in [0, 1]$. $Y \mid X = x$ sei gleichverteilt in $[0, x]$.
Wie lautet die gemeinsame Verteilung von (X, Y)? Man berechne

$$P(X \in [1/5, 4/5] \text{ und } Y \in [1/5, 4/5]).$$

$F_X(x)$ ist in $0 < x < 1$ differenzierbar, die Ableitung

$$f_X(x) = 3x^2$$

ist die Dichte von X in $[0, 1]$. Aus $F_X(x) = 1$ für $x > 1$ und $F_X(x) = 0$ für $x < 0$ folgt, daß $[0, 1]$ der Träger von X ist. Insbesondere ist $f_X(x) = 0$ für $x \notin [0, 1]$.

$\mathbb{U}[0,x]$, die bedingte Verteilung von $Y \mid X = x$, besitzt die Dichte

$$f(y \mid x) = \frac{1}{x} I_{[0,x]}(y).$$

Es folgt

$$f(y,x) = f(y \mid x) f_X(x) = 3x I_{[0,1]}(x) I_{[0,x]}(y).$$

Sei

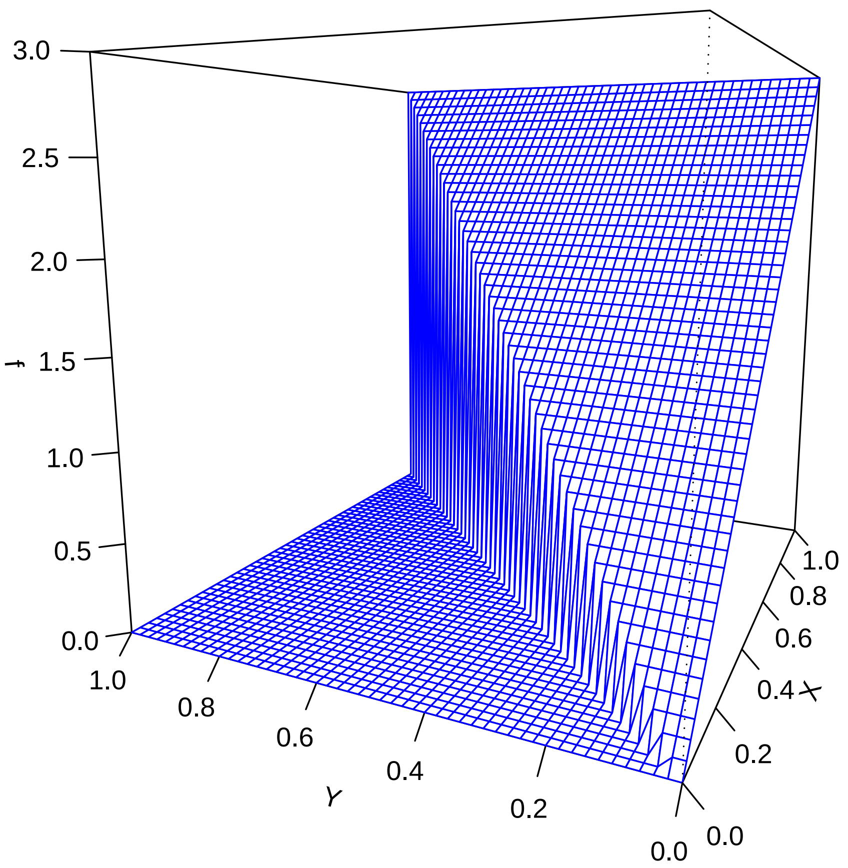

Abbildung 6.1: $f(y,x)$

$$A = \{(y,x) \mid 1/5 \leq x \leq 4/5, 1/5 \leq y \leq 4/5\}.$$

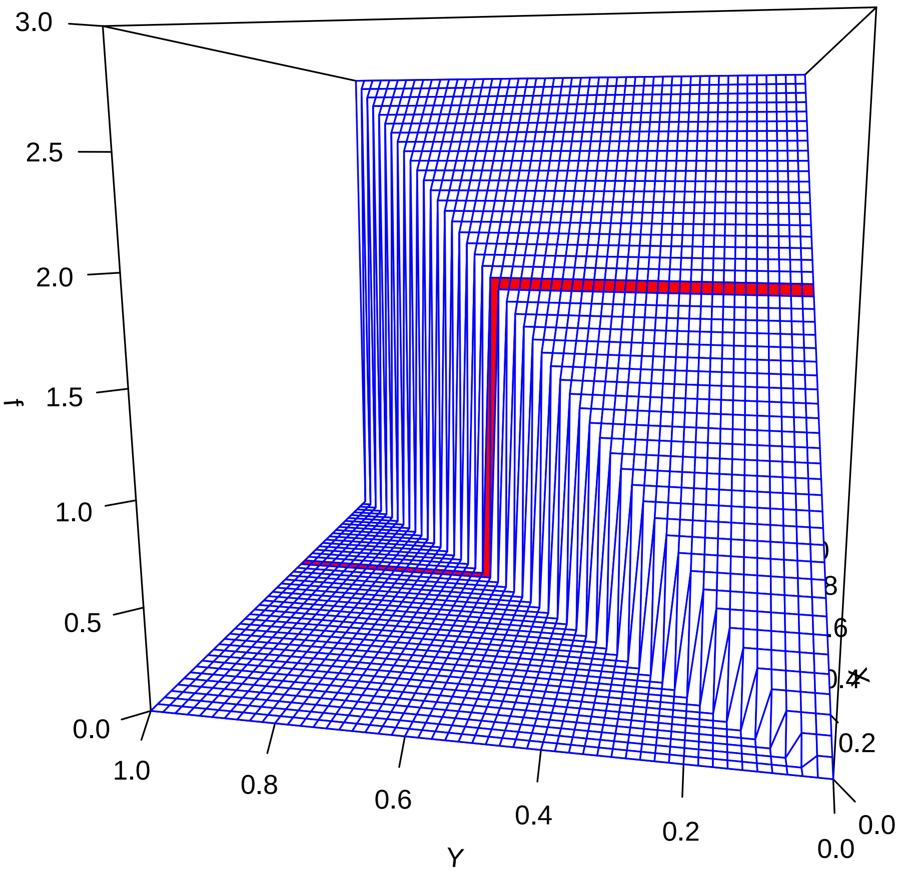

Abbildung 6.2: $f(y \mid x)$

$$\begin{aligned}
P(X \in [1/5, 4/5] \text{ und } Y \in [1/5, 4/5]) &= \int_A f(y,x)\,dy\,dx \\
&= \int\int I_A(y,x) f(y,x)\,dy\,dx \\
&= \int_{1/5}^{4/5}\int_{1/5}^{4/5} 3x I_{[0,x]}(y)\,dy\,dx \\
&= \int_{1/5}^{4/5}\int_{1/5}^{x} 3x\,dy\,dx.
\end{aligned}$$

Das innere Integral ist

$$\int_{1/5}^{x} 3x dy = 3x\left(x - \frac{1}{5}\right).$$

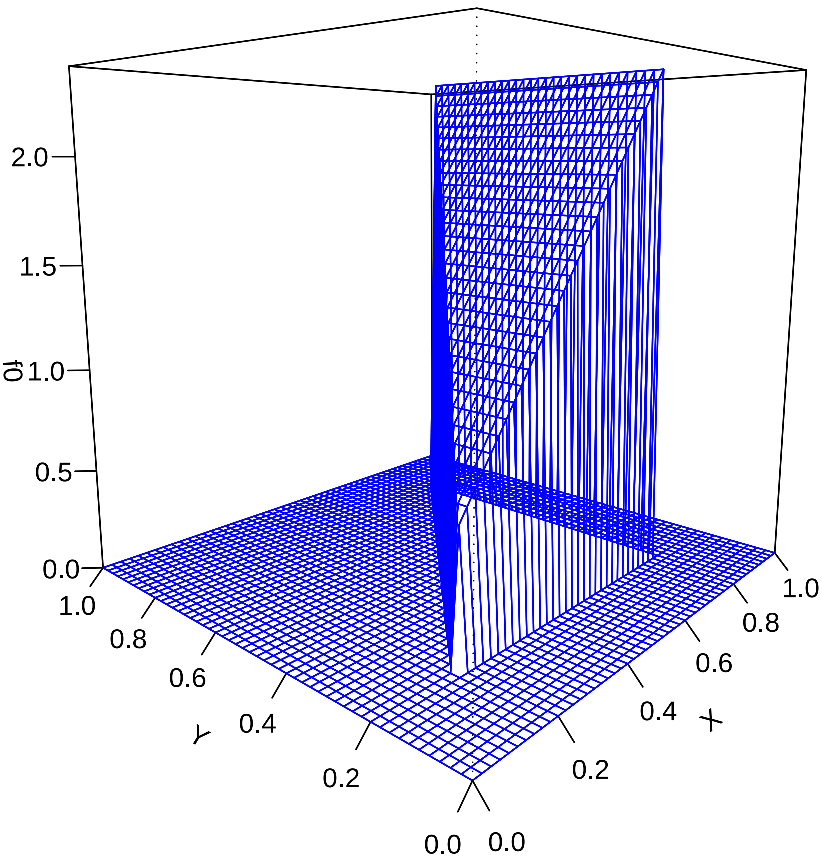

Abbildung 6.3: $P(X \in [1/5, 4/5] \text{ und } Y \in [1/5, 4/5])$

Daher ist

$$\begin{aligned}
\int_{1/5}^{4/5} \int_{1/5}^{x} 3x \, dy \, dx &= \int_{1/5}^{4/5} \left(3x^2 - \frac{3}{5}x\right) dx \\
&= \left(x^3 - \frac{3}{10}x^2\right)_{1/5}^{4/5} \\
&= \left(\frac{4}{5}\right)^3 - \frac{3}{10}\left(\frac{4}{5}\right)^2 - \left(\frac{1}{5}\right)^3 + \frac{3}{10}\left(\frac{1}{5}\right)^2 \\
&= 0.324.
\end{aligned}$$

$\square$

Die gemeinsame Verteilung von X und Y spezifiziert die Randverteilung von Y. Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ ein Ereignis. Aus

$$\begin{aligned} P(Y \in A) &= P(Y \in A \text{ und } X \in \mathbb{R}) \\ &= \int_A \int_{\mathbb{R}} f(y,x)\,dx\,dy \\ &= \int_A \left(\int_{\mathbb{R}} f(y,x)\,dx \right) dy \end{aligned}$$

folgt, daß Y die Dichte

(6.3) $$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y,x)\,dx$$

besitzt.

6.2 BEISPIEL. (Fortsetzung von Beispiel 6.1). Man berechne die Dichte von Y und die bedingte Verteilung von $X \mid Y$.
Sei $y \in [0,1]$.

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_0^1 f(y,x)\,dx \\ &= \int_0^1 3x I_{[0,x]}(y)\,dx \\ &= \int_y^1 3x\,dx \\ &= \frac{3}{2}\left(x^2\right)_y^1 \\ &= \frac{3(1-y^2)}{2}. \end{aligned}$$

Aus

$$f(y,x) = f(x \mid y) f_Y(y)$$

folgt für $x, y \in [0,1]$,

$$\begin{aligned} f(x \mid y) &= \frac{f(y,x)}{f_Y(y)} \\ &= \frac{3x I_{[0,x]}(y)}{3(1-y^2)/2} \\ &= \frac{2x}{1-y^2} I_{[y,1]}(x). \end{aligned}$$

□

Die Verteilung von Variablen mit endlichen Trägern kann als Tabelle angegeben werden. Die Variablen X und Y sollen die Werte $a_1, a_2, \ldots, a_m$ bzw. $b_1, b_2, \ldots, b_n$ annehmen. Die gemeinsame Verteilung ist

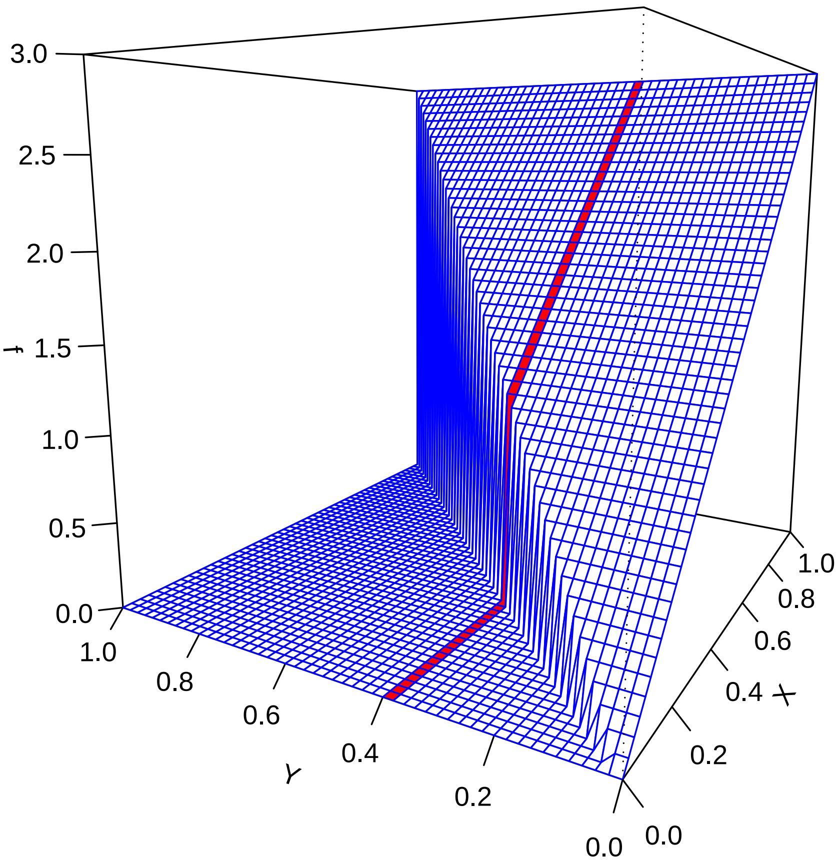

Abbildung 6.4: $f(x \mid y)$

	b_1	b_2	$\cdots$	b_n
a_1	$P(X = a_1, Y = b_1)$	$P(X = a_1, Y = b_2)$	$\cdots$	$P(X = a_1, Y = b_n)$
a_2	$P(X = a_2, Y = b_1)$	$P(X = a_2, Y = b_2)$	$\cdots$	$P(X = a_2, Y = b_n)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
a_m	$P(X = a_m, Y = b_1)$	$P(X = a_m, Y = b_2)$	$\cdots$	$P(X = a_m, Y = b_n)$

Die Randverteilungen sind die Zeilen-und Spaltensummen. Die Randverteilung von X ist gegeben durch

$$P(X = a_i) = P(X = a_i, Y = b_1) + P(X = a_i, Y = b_2) + \cdots + P(X = a_i, Y = b_n),$$

die Randverteilung von Y durch

$$P(Y = b_j) = P(X = a_1, Y = b_j) + P(X = a_2, Y = b_j) + \cdots + P(X = a_m, Y = b_j).$$

Fügt man die Randverteilungen (als Ränder) zur Wahrscheinlichkeitstabelle, erhält man

	b_1	b_2	$\cdots$	b_n	
a_1	$P(X = a_1, Y = b_1)$	$P(X = a_1, Y = b_2)$	$\cdots$	$P(X = a_1, Y = b_n)$	$P(X = a_1)$
a_2	$P(X = a_2, Y = b_1)$	$P(X = a_2, Y = b_2)$	$\cdots$	$P(X = a_2, Y = b_n)$	$P(X = a_2)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
a_m	$P(X = a_m, Y = b_1)$	$P(X = a_m, Y = b_2)$	$\cdots$	$P(X = a_m, Y = b_n)$	$P(X = a_m)$
	$P(Y = b_1)$	$P(Y = b_2)$	$\cdots$	$P(Y = b_n)$	

6.3 BEISPIEL. Ein Betrieb erzeugt ein Produkt, dessen Qualität vor der Auslieferung überprüft wird. Bei 60% der Kontrollen werden Mängel entdeckt. Sei X die Stückzahl pro Tag. X ist gleichverteilt auf $\{1, 2, \ldots, 5\}$. Y sei die Anzahl Kontrollen, die einen Mangel entdecken. Man bestimme die gemeinsame Verteilung von X und Y, sowie die bedingten Verteilungen und die Randverteilung von Y.

```
> p<-0.6
> x<-0:5
> CX<-NULL
> for(i in 1:5)CX<-rbind(CX,dbinom(x,i,p))

> round(CX,3)          # Bed. vert Y|X
      [,1]  [,2]  [,3]  [,4]  [,5]  [,6]
[1,] 0.400 0.600 0.000 0.000 0.000 0.000
[2,] 0.160 0.480 0.360 0.000 0.000 0.000
[3,] 0.064 0.288 0.432 0.216 0.000 0.000
[4,] 0.026 0.154 0.346 0.346 0.130 0.000
[5,] 0.010 0.077 0.230 0.346 0.259 0.078
```

```
> pX<-rep(1/5,5)       # Vert. von X

> P<-sweep(CX,1,pX,"*") # Gem. Vert.

> round(P,3)
      [,1]  [,2]  [,3]  [,4]  [,5]  [,6]
 [1,] 0.080 0.120 0.000 0.000 0.000 0.000
 [2,] 0.032 0.096 0.072 0.000 0.000 0.000
 [3,] 0.013 0.058 0.086 0.043 0.000 0.000
 [4,] 0.005 0.031 0.069 0.069 0.026 0.000
 [5,] 0.002 0.015 0.046 0.069 0.052 0.016

> apply(P,1,sum)
[1] 0.2 0.2 0.2 0.2 0.2

> pY<-apply(P,2,sum)   # Vert. von Y
> round(pY,3)
[1] 0.132 0.320 0.274 0.181 0.078 0.016

> P<-cbind(P,pX)
> P<-rbind(P,c(pY,1))
> dimnames(P)<-list(c(1:5,"pY"),c(0:5,"pX"))

> round(P,3)
      0     1     2     3     4     5  pX
1   0.080 0.120 0.000 0.000 0.000 0.000 0.2
2   0.032 0.096 0.072 0.000 0.000 0.000 0.2
3   0.013 0.058 0.086 0.043 0.000 0.000 0.2
4   0.005 0.031 0.069 0.069 0.026 0.000 0.2
5   0.002 0.015 0.046 0.069 0.052 0.016 0.2
pY  0.132 0.320 0.274 0.181 0.078 0.016 1.0

> CY<-sweep(P,2,c(pY,1),"/")
```

```
> round(CY,3)          # Bed. Vert. X|Y
      0     1     2     3     4 5  pX
1  0.606 0.375 0.000 0.000 0.000 0 0.2
2  0.242 0.300 0.263 0.000 0.000 0 0.2
3  0.097 0.180 0.316 0.238 0.000 0 0.2
4  0.039 0.096 0.253 0.381 0.333 0 0.2
5  0.016 0.048 0.168 0.381 0.667 1 0.2
pY 1.000 1.000 1.000 1.000 1.000 1 1.0
```

□

6.4 BEISPIEL. Sei X ein stochastischer Zinssatz mit einer Volatilität $\sigma = 1/Y$. Es gelte $Y \sim \Gamma(a,b)$ und $X \mid Y = y \sim \Gamma(1,y)$. Bei bekannter Volatilität ist X exponentialverteilt mit Standardabweichung σ. Die gemeinsame Verteilung von X und Y besitzt die Dichte

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(x \mid y) f_Y(y) \\ &= ye^{-yx} \quad \frac{b^a y^{a-1}}{\Gamma(a)} e^{-by} \\ &= \frac{b^a y^a}{\Gamma(a)} e^{-(x+b)y}. \end{aligned}$$

Die gemeinsame Verteilung von X und Y spezifiziert die Randverteilung von X. Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ ein Ereignis. Aus

$$\begin{aligned} P(X \in A) &= P(X \in A \text{ und } Y \in \mathbb{R}) \\ &= \int_A \int_{\mathbb{R}} f(x,y) dy dx \\ &= \int_A \left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y) dy \right) dx \end{aligned}$$

folgt, daß X die Dichte

(6.4) $$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) dy$$

besitzt.

Die Dichte des Zinssatzes X ist

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_0^{\infty} f(x,y) dy \\ &= \int_0^{\infty} \frac{b^a y^a}{\Gamma(a)} e^{-(x+b)y} dy \\ &= \frac{b^a \Gamma(a+1)}{\Gamma(a)(x+b)^{a+1}} \end{aligned}$$

$$= \frac{ab^a}{(x+b)^{a+1}},$$

d.h. $X \sim \mathrm{Par}(a,b)$.

Da die Volatilität und der Zinssatz nicht unabhängig sind, interessiert die Verteilung von Y, wenn ein Zinssatz $X = x$ beobachtet wird. Es ist

$$\begin{aligned} f(y \mid x) &= \frac{f(x,y)}{f_X(x)} \\ &= \frac{\frac{b^a y^a}{\Gamma(a)} e^{-(x+b)y}}{\frac{ab^a}{(x+b)^{a+1}}} \\ &= \frac{y^a (x+b)^{a+1}}{a\Gamma(a)} e^{-(x+b)y} \\ &= \frac{(x+b)^{a+1}}{\Gamma(a+1)} y^a e^{-(x+b)y}, \end{aligned}$$

d.h. $Y \mid X = x \sim \Gamma(a+1, b+x)$.

Seien $a = 6$ und $b = 0.4$. Man berechne $P(X > 0.05)$. Es ist

$$\begin{aligned} P(X > 0.05) &= \frac{b^a}{(0.05+b)^a} \\ &= \frac{0.4^6}{0.45^6} \\ &= 0.493. \end{aligned}$$

Wie lautet $P(\sigma \geq 1/16)$?

$$\begin{aligned} P(\sigma \geq 1/16) &= P(1/Y \geq 1/16) \\ &= P(Y \leq 16) \\ &= 0.616. \end{aligned}$$

```
> pgamma(16,6,1/0.4)
[1] 0.6162563
```

Man berechne $P(X > 0.05 \text{ und } \sigma > 1/16)$.

$$\begin{aligned} P(X > 0.05 \text{ und } \sigma > 1/16) &= P(X > 0.05 \text{ und } Y < 16) \\ &= \int_0^{16} \left(\int_{0.05}^{\infty} y e^{-yx} dx \right) \frac{0.4^6}{\Gamma(6)} y^5 e^{-0.4y} dy \\ &= \int_0^{16} e^{-0.05y} \frac{0.4^6}{\Gamma(6)} y^5 e^{-0.4y} dy \\ &= \int_0^{16} \frac{0.4^6}{\Gamma(6)} y^5 e^{-0.45y} dy \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{0.4^6}{0.45^6}\int_0^{16}\frac{0.45^6}{\Gamma(6)}y^5e^{-0.45y}dy \\
&= \frac{0.4^6}{0.45^6}\int_0^{16}\tilde{f}(y)dy.
\end{aligned}
$$

$$
\tilde{f}(y) = \frac{0.45^6}{\Gamma(6)}y^5e^{-0.45y}
$$

ist die Dichte der Gammaverteilung mit Parameter $6, 0.45$. Daher ist

$$
P(X > 0.05 \text{ und } \sigma > 1/16) = 0.493 \times 0.724 = 0.357.
$$

```
> pgamma(16,6,1/0.45)
[1] 0.7241025
> (0.4/0.45)^6*pgamma(16,6,1/0.45)
[1] 0.3571782
```

Man beachte, daß

$$
\begin{aligned}
P(X > 0.05 \mid \sigma > 1/16) &= \frac{P(X > 0.05 \text{ und } \sigma > 1/16)}{P(\sigma > 1/16)} \\
&= \frac{0.357}{0.616} \\
&= 0.56 \\
&> 0.493 \\
&= P(X > 0.05).
\end{aligned}
$$

Die Verteilung des Zinssatzes hängt von der Volatilität ab, Zinssatz und Volatilität sind nicht stochastisch unabhängig.
Der Erwartungswert der Volatilität σ ist

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[\sigma] &= \mathbb{E}[1/Y] \\
&= \int_0^\infty \frac{1}{y}\frac{b^a}{\Gamma(a)}y^{a-1}e^{-by}dy \\
&= \frac{b^a}{\Gamma(a)}\int_0^\infty y^{a-2}e^{-by}dy \\
&= \frac{b^a}{\Gamma(a)}\frac{\Gamma(a-1)}{b^{a-1}} \\
&= \frac{b}{a-1} \\
&= \frac{0.4}{5} \\
&= 0.08.
\end{aligned}
$$

Wird ein Zinssatz von $X = 4\%$ beobachtet, ist

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\sigma \mid X = 0.04] &= \frac{b+x}{(a+1)-1} \\ &= \frac{0.4+0.04}{6} \\ &= 0.0733.\end{aligned}$$

□

6.5 BEISPIEL. Untersuchungen ergaben, daß die Anzahl der Personen, die pro Tag die Homepage eines Unternehmens besuchen, poissonverteilt mit Mittel 1000 ist. 7.5 Prozent der Besucher ordern eines der angebotenen Produkte. Wie lautet die Verteilung der Anzahl der täglichen Verkäufe des Unternehmens?

Sei Y die Anzahl der Besucher der Homepage und X die Anzahl der Verkäufe. Es ist $Y \sim P(\lambda)$ mit $\lambda = 1000$. Jeder Besucher kauft mit einer Wahrscheinlichkeit von $p = 0.075$. Sind die Kaufentscheidungen unabhängig, dann ist $X \mid Y = y \sim B(y, p)$. Es gilt $P(X = x \text{ und } Y = y) = 0$ für $y < x$ und

$$P(X = x \text{ und } Y = y) = \binom{y}{x} p^x (1-p)^{y-x} e^{-\lambda} \frac{\lambda^y}{y!}$$

für $y \geq x$. Die Randverteilung von X ist

$$\begin{aligned}P(X = x) &= P(X = x \text{ und } Y \geq x) \\ &= \sum_{y=x}^{\infty} P(X = x \text{ und } Y = y) \\ &= \sum_{y=x}^{\infty} \binom{y}{x} p^x (1-p)^{y-x} e^{-\lambda} \frac{\lambda^y}{y!} \\ &= \sum_{y=x}^{\infty} \frac{y!}{x!(y-x)!} p^x (1-p)^{y-x} e^{-\lambda} \frac{\lambda^y}{y!} \\ &= \sum_{y=x}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} p^x (1-p)^{y-x} \frac{\lambda^{y-x}}{(y-x)!} \\ &= e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} p^x e^{(1-p)\lambda} \\ &= e^{-p\lambda} \frac{(p\lambda)^x}{x!},\end{aligned}$$

d.h. $X \sim P(p\lambda) = P(75)$.

Wie lautet die Verteilung der Anzahl der Besuche der Homepage an Tagen, an denen $X = 100$ Verkäufe getätigt werden? Man kann

$$P(Y = y \mid X = 100) = \frac{P(X = 100, Y = y)}{P(X = 100)}$$

leicht ausrechnen. Wir versuchen, uns die Aufgabe noch leichter zu machen. $P(Y = y \mid X = x)$ ist proportional zu $P(X = x, Y = y)$ mit einer Normierungskonstanten $P(X = x)$, die von x abhängt. Vergessen wir einmal alle Faktoren, die nicht von y anhängen. Für $y \geq x$ ist

$$\begin{aligned}
P(Y = y \mid X = x) &\propto P(X = x, Y = y) \\
&= \binom{y}{x} p^x (1-p)^{y-x} e^{-\lambda} \frac{\lambda^y}{y!} \\
&= \frac{y!}{x!(y-x)!} p^x (1-p)^{y-x} e^{-\lambda} \frac{\lambda^y}{y!} \\
&\propto \frac{(1-p)^{y-x}}{(y-x)!} \lambda^y \\
&\propto \frac{(1-p)^{y-x}}{(y-x)!} \lambda^{y-x} \\
&= \frac{((1-p)\lambda)^{y-x}}{(y-x)!}
\end{aligned}$$

Bis auf die Normierungskonstante

$$e^{-\lambda(1-p)}$$

ist das die Wahrscheinlichkeit, daß eine $\mathrm{P}(\lambda(1-p))$-verteilte Zufallsgröße gleich $y - x$ ist. Es folgt, daß unter $X = x$, $Y \sim x + \mathrm{P}(\lambda(1-p))$. Insbeondere ist für $X = 100$ und $\lambda(1-p) = 1000 \times 0.925 = 925$, $Y = 100 + Z$ mit $Z \sim \mathrm{P}(925)$.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß mehr als 70 Verkäufe stattfinden? Wie groß ist diese Wahrscheinlichkeit an Tagen mit mehr als 1000 Besuchern?

```
> p1<-1-ppois(70,75)                                       # P(X>70)
> p1
[1] 0.6933857
> p2<-1-ppois(1000,1000)                                   # P(Y>1000)
> p2
[1] 0.4915902
> p3<-sum((1-pbinom(70,1:1000,0.075))*dpois(1:1000,1000))# P(X>70 und Y<=1000)
> p3
[1] 0.3142384
> p4<-p1-p3                                                # P(X>70 und Y>1000)
> p4/p2                                                    # P(X>70 | Y>1000)
[1] 0.7712671
```

□

Wir fassen einige Rechenregeln und Konventionen für multivariate Verteilungen zusammen. Sei $X = (X_1, \ldots, X_d)'$ eine d-dimensionale Zufallsgröße, ein **Zufallsvektor**, P seine Verteilung.

- Die **gemeinsame Verteilung** der Komponenten $X_1, \ldots, X_d$ ist die Verteilung des Vektors $(X_1, \ldots, X_d)'$. Die **Randverteilung** einer Komponente X_i ist eine Verteilung, die bei gegebener gemeinsamer Verteilung durch

  $$P(X_i \in A) = P(X_i \in A \text{ und } X_k \in \mathbb{R}, k \neq i)$$

  eindeutig festgelegt ist.

- Die Verteilung P ist **diskret**, wenn es eine höchstens abzählbare Menge von Vektoren

  $$\mathcal{S} = \{s_j \mid j < N\}$$

  ($N \in \mathbb{N}$ oder $N = \infty$) gibt mit $P(\mathcal{S}) = 1$. Es gibt in diesem Fall $p_j \in [0,1]$ mit $\sum_j p_j = 1$ und

  $$P(X = s_j) = p_j.$$

- Die Verteilung P ist **absolut stetig**, wenn sie eine **Dichte** besitzt, d.h. wenn es eine Funktion f gibt, sodaß sich die Wahrscheinlichkeit von Ereignissen A als (Volumen unter f)

  $$P(X \in A) = \int_A f(x_1, \ldots, x_d) dx_1 \cdots dx_d$$

  darstellen lassen. Für $A = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_d, b_d]$ (d.h. X liegt in A wenn für alle $i \leq d$, $a_i \leq X_i \leq b_i$), ist

  $$\int_A f(x_1, \ldots, x_d) dx_1 \cdots dx_d = \int_{a_d}^{b_d} \cdots \int_{a_1}^{b_1} f(x_1, \ldots, x_d) dx_1 \cdots dx_d.$$

  Eine nichtnegative Funktion $f : \mathbb{R} \to [0, \infty[$ ist die Dichte einer geeigneten Verteilung, wenn

  $$\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \ldots, x_d) dx_1 \cdots dx_d = 1.$$

- Ist P diskret, dann sind auch die Randverteilungen diskret.

  Besitzt P die Dichte f, dann besitzen die Randverteilungen ebenfalls eine Dichte.

  $$f_{X_i}(x_i) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, x_d) dx_1 \cdots dx_{i-1} dx_{i+1} \cdots dx_d$$

  ist die Dichte der Randverteilung von X_i.

  $$f(x_1, \ldots, x_i) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \ldots, x_d) dx_{i+1} \cdots dx_d$$

  ist die Dichte der Randverteilung von $(X_1, \ldots, X_i)'$.

- Ist P diskret, dann sind auch die bedingten Verteilungen (z.B. von $X_i \mid X_k, k \neq i$) diskret.

  Besitzt P die Dichte f, dann ist

  $$f(x_1, \ldots, x_i \mid x_{i+1}, \ldots, x_d) = \frac{f(x_1, \ldots, x_d)}{f(x_{i+1}, \ldots, x_d)}$$

  die Dichte der bedingten Verteilung von $(X_1, \ldots, X_i)'$ unter $X_{i+1} = x_{i+1}, \ldots, X_d = x_d$.

- **Satz von der vollständigen Wahrscheinlichkeit**: Seien X und Y Zufallsgrößen, $X \sim f_X$, $Y \mid X = x \sim f(y \mid x)$. Y besitzt die Dichte

  $$f_Y(y) = \int f(y \mid x) f_X(x) dx.$$

  Für Ereignisse A gilt der Satz von der vollständigen Wahrscheinlichkeit in folgender Form. Sind $B_1, \ldots, B_m$ Ereignisse mit $B_i \cap B_j = \emptyset$ für $i \neq j$ und $P(X \in B_1 \cup \cdots \cup B_m) = 1$. Dann gilt für alle Ereignisse A,

  $$P(Y \in A) = \sum_{i=1}^{m} P(Y \in A \mid X \in B_i) P(X \in B_i).$$

- Seien X und Y Zufallsgrößen, $X \sim f_X$, $Y \mid X = x \sim f(y \mid x)$. Als **Satz von Bayes** wird folgende Beziehung zwischen den Dichten der Verteilung von X (der **a-priori** Verteilung), der **Likelihood**, d.h.der bedingten Verteilung von $Y \mid X$ (der Verteilung der beobachtbaren Größe Y) und der bedingten Verteilung von $X \mid Y$ (der a-posteriori Verteilung) bezeichnet:

  $$f(x \mid y) = \frac{f(y \mid x) f_X(x)}{f_Y(y)}.$$

  Die Kenntnis über eine zufällige und in der Regel nicht beobachtbare Größe X wird durch die a-priori Verteilung mit Dichte f_X beschrieben. Das Wissen über X ändert sich, wenn Y beobachtet wird. Nach dem Satz von Bayes ist die Dichte der Verteilung, die X beschreibt, wenn $Y = y$ beobachtet wurde, proportional zum Produkt aus a-priori Dichte $f_X(x)$ und Likelihood $f(y \mid x)$.

6.6 BEISPIEL. Die Randverteilungen legen die gemeinsame Verteilung nicht fest. Die folgenden Verteilungen besitzen die selben Randverteilungen, die Gleichverteilung im Intervall $[-1, 1]$.

P_1: Sei S das Quadrat mit Eckpunkten $(\pm 1, \pm 1)$. (X, Y) besitze die Dichte $f(x, y)$, wobei $f(x, y) = 1/4$ falls $(x, y) \in S$ und $f(x, y) = 0$ sonst. D.h. $X, Y \sim \mathbb{U}[-1, 1]$ und sie sind unabhängig.

P_2: $X \sim \mathbb{U}[-1, 1]$ und $Y = X$.

P_3: $X \sim \mathbb{U}[-1, 1]$ und $Y = X$ bzw. $Y = -X$, jeweils mit Wahrscheinlichkeit $1/2$.

P_4**:** $(X, Y) \sim f(x, y)$, wobei $f(x, y) = 1/2$ falls $(x, y) \in [0, 1]\times[0, 1]\cup[-1, 0]\times[-1, 0]$ und $f(x, y) = 0$ sonst.

Die Verteilungen sind Gleichverteilungen auf den in Abbildung 6.5 dargestellten Mengen. $\square$

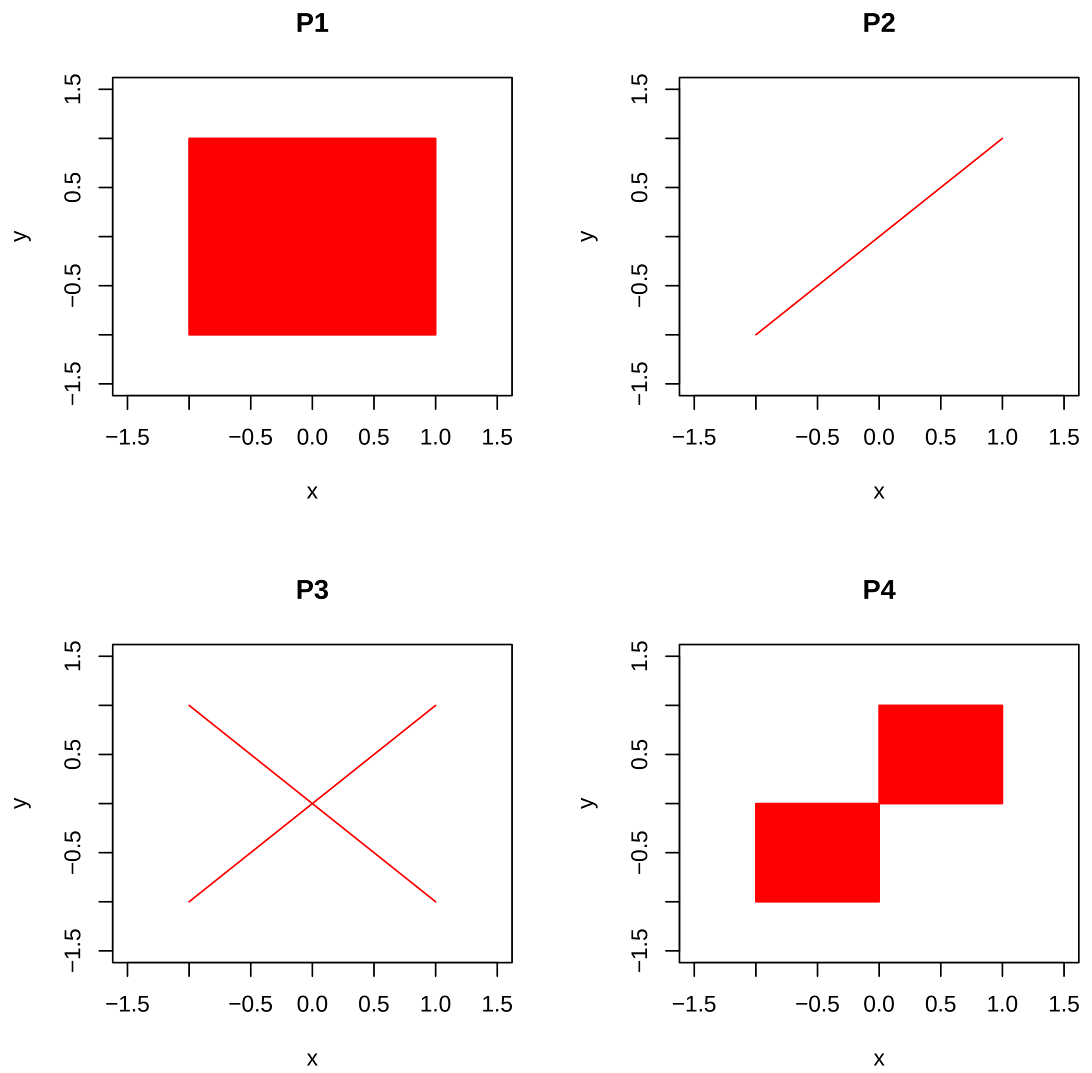

Abbildung 6.5: $P_1, \ldots, P_4$

6.2 Aufgaben

AUFGABE 6.1. Y besitze die Dichte $f_Y(y) = 2y$ für $y \in [0, 1]$ und $f_Y(y) = 0$ sonst. $X \mid Y = y \sim \mathbb{U}[0, y]$.

a) Wie lautet die Dichte der gemeinsamen Verteilung von X und Y?

b) Wie lautet die Dichte von X?

c) Wie lautet die Dichte von $Y \mid X = x$?

AUFGABE 6.2. X nimmt die Werte 1 und 2 jeweils mit Wahrscheinlichkeit 1/2 an, $Y \sim X = x \sim B(x, 1/2)$.

a) Berechnen Sie die Randverteilung von Y.

b) Berechnen Sie $P(Y = 0)$.

c) Berechnen Sie $P(X = 1 \mid Y = 0)$.

AUFGABE 6.3. Zu einer mündlichen Prüfung, die regelmäßig abgehalten wird, erscheint mindestens ein Kandidat. Maximal zehn können sich anmelden. Jeder Kandidat besteht mit Wahrscheinlichkeit $p = 80\%$. Sei X die Anzahl der Prüfungskandidaten und Y die Anzahl der positiven Prüfungen. Man bestimme die gemeinsame Verteilung von X und Y, sowie die bedingten Verteilungen und die Randverteilung von Y. Man nehme an, daß X gleichverteilt auf $\{1, 2, \ldots, 10\}$ ist.

AUFGABE 6.4. Sei X die Anzahl der Kunden, die pro Tag ein Geschäft betreten, das zwei Produkte, Produkt A und Produkt B, anbietet. 20 Prozent der Personen, die das Geschäft betreten, kaufen Produkt A, von den restlichen Kunden kaufen 30 Prozent Produkt B. Seien Y_A und Y_B die täglichen Verkaufszahlen der beiden Produkte. Man berechne die gemeinsame Verteilung von Y_A und Y_B, wenn X poissonverteilt ist mit Erwartungswert 500. Wie lautet die Verteilung von Y_A, wenn vom Produkt B 200 Stück verkauft werden. Wie lautet die Verteilung von Y_A, wenn von 600 Kunden, die das Geschäft betreten, 200 das Produkt B kaufen.

AUFGABE 6.5. Sei D die Nachfrage nach einem Produkt. Diese Nachfrage sei stochastisch, die Verteilung hängt von Preis P ab. Es wird angenommen, daß $D \mid P = p \sim \Gamma(1, p/10)$ und $P \sim \Gamma(2, 1)$. Wie lautet die Verteilung von D? Berechnen Sie $P(D \leq 15)$. Wie lautet die bedingte Verteilung der Preise $P \mid D = d$? Man berechne $P(P > 2)$ und $P(P > 2 \mid D = 30)$.

AUFGABE 6.6. Sei $(S_n)_{n=0}^{\infty}$ ein Aktienkurs mit unabhängigen und identisch verteilten Renditen $(R_n)_{n=1}^{\infty}$. Am Tag n tritt ein Rekord ein, wenn $R_n > \max\{R_1, \ldots, R_{n-1}\}$. Man zeige, daß $P(\text{ am } n\text{-ten Tag tritt ein Rekord ein}) = 1/n$.

AUFGABE 6.7. Sei X exponentialverteilt, $X \sim \Gamma(1, b)$. Wie lautet die Verteilung von $X \mid X > x$?

AUFGABE 6.8. Sei $s_0 \in \mathbb{R}$ der (feste) Wert einer Aktie. An jedem Handelstag steige der Wert der Aktie um 5% (mit Wahrscheinlichkeit 0.6) oder er fällt um 5% (mit Wahrscheinlichkeit 0.4). S_n bezeichne den Wert der Aktie nach dem n-ten Handelstag.

Sei $N = 5$. Man bestimme die Verteilung von S_N, die gemeinsame Verteilung von S_1 und S_N, die bedingte Verteilung von S_N unter S_1 und die bedingte Verteilung von S_1 unter S_N.

AUFGABE 6.9. Ein Unternehmen wird über die Börse verkauft. Investoren können ein Angebot stellen, d.h. sie geben den Anteil der Aktien, den Sie zu erwerben wünschen, einer Bank bekannt. Ein Beobachter der Szene beschreibt die Angebote, die ihm nicht bekannt sind, als $\mathbb{U}[0,1]$-verteilte Zufallsgrößen.

Es wird bekannt, daß der Anteil, den Investor A und Investor B (unabhängig voneinander) erwerben wollen, zusammen mehr als die Hälfte ist. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß Investor A mehr als die Hälfte erwerben will? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß zumindest einer der beiden mehr als die Hälfte erwerben will.

Kapitel 7

Stochastische Abhängigkeit

7.1 Korrelation und Kovarianz

Zufallsgrößen $X_1, \ldots, X_d$ heißen **stochastisch unabhängig**, wenn für alle alle Ereignisse $A_1, \ldots, A_d$,

$$P(X_1 \in A_1, \ldots, X_d \in A_d) = P(X_1 \in A_1) \cdots P(X_d \in A_d). \tag{7.1}$$

Eine äquivalente Bedingung ist

$$\mathbb{E}[g_1(X_1) g_2(X_2) \cdots g_d(X_d)] = \mathbb{E}[g_1(X_1)] \cdots \mathbb{E}[g_d(X_d))] \tag{7.2}$$

für alle beschränkten Funktionen $g_1, g_2, \ldots, g_d$. Besitzt die gemeinsame Verteilung von $X_1, \ldots, X_d$ eine Dichte f, dann sind die Komponenten genau dann unabhängig, wenn für alle $x_1, \ldots, x_d$,

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_d) = f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2) \cdots f_{X_d}(x_d).$$

Diese (äquivalenten) Bedingungen sind im Fall von zwei Zufallsvariablen, X und Y,

$$\begin{aligned} P(X \in A \text{ und } Y \in B) &= P(X \in A) P(Y \in B) \\ \mathbb{E}[g(X) h(Y)] &= \mathbb{E}[g(X)] \mathbb{E}[h(Y)] \end{aligned}$$

und, falls (X, Y) absolut stetig ist,

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f_X(x) f_Y(y) \\ f(x \mid y) &= f_X(x) \\ f(y \mid x) &= f_Y(y). \end{aligned}$$

Unabhängige Zufallsvariable bilden den Grundbaustein stochastischer Modelle. Jede multivariate Zufallsgröße $(X_1, \ldots, X_d)'$ ist die Transformierte von unabhängigen Zufallsvariablen $Z_1, \ldots, Z_d$:

Seien F_{X_1} die Verteilung von X_1, $F_{X_2|X_1}(x_2 \mid x_1)$ die bedingte Verteilung von $X_2 \mid X_1 = x_1$, $\ldots$, $F_{X_d|X_1,X_2,\ldots,X_{d-1}}(x_d \mid x_1,\ldots,x_{d-1})$ die bedingte Verteilung von $X_d \mid X_1 = x_1,\ldots,X_{d-1} = x_{d-1}$ und $F^{-1}_{X_1}(x_1)$, $F^{-1}_{X_2|X_1}(x_2 \mid x_1)$, $\ldots$, $F^{-1}_{X_d|X_1,X_2,\ldots,X_{d-1}}(x_d \mid x_1,\ldots,x_{d-1})$ die Quantilsfunktionen.
Da

$$\begin{aligned}
P(X_1 \in A_1,\ldots,X_d \in A_d) &= P(X_d \in A_d \mid X_{d-1} \in A_{d-1},\ldots,X_1 \in A_1)P(X_{d-1} \in A_{d-1},\ldots,X_1 \in A_1) \\
&= P(X_d \in A_d \mid X_{d-1} \in A_{d-1},\ldots,X_1 \in A_1) \\
&\quad \times P(X_{d-1} \in A_{d-1} \mid X_{d-2} \in A_{d-2},\ldots,X_1 \in A_1)P(X_{d-2} \in A_{d-2},\ldots,X_1 \in A_1) \\
&= P(X_d \in A_d \mid X_{d-1} \in A_{d-1},\ldots,X_1 \in A_1) \\
&\quad \times P(X_{d-1} \in A_{d-1} \mid X_{d-2} \in A_{d-1},\ldots,X_1 \in A_1) \\
&\quad \times \cdots P(X_2 \in A_2 \mid X_1 \in A_1)P(X_1 \in A_1)
\end{aligned}$$

gilt, ist die gemeinsame Verteilung von $X_1,\ldots,X_d$ immer durch die Verteilung von X_1 und alle bedingten Verteilungen von $X_i \mid X_{i-1},\ldots,X_1$, $i = 2,\ldots,d$ festgelegt.
Seien $U_1,\ldots,U_d$ unabhängig und gleichverteilt in $[0,1]$. Wir definieren

$$Y_1 = F^{-1}_{X_1}(U_1), \tag{7.3}$$

$$Y_2 = F^{-1}_{X_2|X_1}(U_2 \mid Y_1), \tag{7.4}$$

$$\vdots$$

$$Y_d = F^{-1}_{X_d|X_1,\ldots,X_{d-1}}(U_d \mid Y_1,Y_2,\ldots,Y_{d-1}). \tag{7.5}$$

Dann besitzen $(X_1,X_2,\ldots,X_d)'$ und $(Y_1,Y_2,\ldots,Y_d)'$ dieselbe Verteilung.
In dieser Darstellung der Verteilung von $X = (X_1,X_2,\ldots,X_d)'$ ist $(Z_1,\ldots,Z_d)' = (U_1,\ldots,U_d)'$. Die Darstellung ist aber nicht eindeutig. Die Brauchbarkeit der Darstellung hängt von der Wahl der Transformation und damit der Verteilung der **Faktoren** $(Z_1,\ldots,Z_d)'$ ab.
Die **Kovarianz** $\mathbb{C}ov[X,Y]$ zweier univariater Zufallsgrößen X und Y (mit Erwartungswerten μ_X und μ_Y) ist

$$\mathbb{C}ov[X,Y] = \mathbb{E}[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)],$$

die Kovarianz der standardisierten Zufallsgrößen heißt **Korrelation**,

$$\mathbb{C}or[X,Y] = \frac{\mathbb{C}ov[X,Y]}{\sigma_X\sigma_Y}.$$

Kovarianz und Korrelation sind Maßzahlen für die Stärke der Kopplung der Zufallsgrößen. Man überprüft hier die Bedingung (7.2) nicht für alle Funktionen g und h, sondern für $g(X) = X$ und $h(Y) = Y$. Sind X und Y unabhängig (mit endlicher Varianz), dann ist

$$\mathbb{C}ov[X,Y] = 0$$

und

$$\mathbb{C}or[X,Y] = 0.$$

Für alle Variable X und Y (mit endlicher Varianz) ist

$$-1 \leq \mathbb{C}or[X,Y] \leq 1.$$

Aus

$$\mathbb{C}or[X,Y] = \pm 1$$

folgt $Y = aX + b$ mit Konstanten a, b.

7.1 BEISPIEL. Seien X und Y unabhängig mit $\mu_Y = 0$. Dann sind XY und X unkorreliert, aber nicht unabhängig. Es ist

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[XY] &= \mathbb{E}[X] \times \mathbb{E}[Y] \\
&= \mathbb{E}[X] \times 0 \\
&= 0 \\
\mathbb{C}ov[XY, X] &= \mathbb{E}[(XY - 0)(X - \mu_X)] \\
&= \mathbb{E}[X^2 Y] \\
&= \mathbb{E}[X^2] \times \mathbb{E}[Y] \\
&= \mathbb{E}[X^2] \times 0 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

□

Sei $X = (X_1, \ldots, X_d)'$ eine d-dimensionale Zufallsgröße. Der **Erwartungswert** von X ist der Vektor $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_d)'$, mit $\mu_i = \mathbb{E}[X_i]$. Sei $\sigma_{ij} = \mathbb{C}ov[X_i, X_j]$. Die **Kovarianzmatrix** des Zufallsvektors X ist die Matrix

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1d} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2d} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sigma_{d1} & \sigma_{d2} & \cdots & \sigma_{dd} \end{pmatrix}.$$

Sei $X = (X_1, \ldots, X_d)'$ mit Erwartungswert μ_X und Kovarinzmatrix Σ_X und $Y = AX + b$, wobei A eine $m \times d$-Matrix und b ein m-dimensionaler Vektor ist. Dann ist

$$\begin{aligned}
\mu_Y &= \mathbb{E}[Y] = A\mu_X + b, \\
\Sigma_Y &= A\Sigma_X A'.
\end{aligned}$$

7.2 BEISPIEL. Seien X_1, X_2 univariate Zufallsvariable mit $\mathbb{E}[X_i] = \mu_i$, $\mathbb{V}[X_i] = \sigma_i^2$ und $\mathbb{C}ov[X_1, X_2] = \sigma_{12}$. Sei $Y = X_1 + X_2$. Dann ist

$$\mathbb{E}[Y] = \mu_1 + \mu_2.$$

Die Varianz bzw. Kovarianzmatrix des Vektor $(X_1, X_2)'$ ist

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 \end{pmatrix}.$$

Aus

$$Y = X_1 + X_2 = (1,1) \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$$

folgt

$$\begin{aligned} \mathbb{V}[Y] &= (1,1) \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \sigma_1^2 + 2\sigma_{12} + \sigma_2^2 \\ &= \mathbb{V}[X_1] + 2\mathbb{C}ov[X_1, X_2] + \mathbb{V}[X_2]. \end{aligned}$$

□

7.3 BEISPIEL. Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige univariate Zufallsgrößen mit Erwartungswerten μ_i und Varianzen σ_i^2. Wie lauten Erwartungswert und Varianz von $\bar{X}_n = (X_1 + \cdots + X_n)/n$?
Sei $X = (X_1, \ldots, X_n)'$ und $a = (1/n, 1/n, \ldots, 1/n)'$, $\mu_X = (\mu_1, \ldots, \mu_n)'$ und

$$\Sigma_X = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_{n-1}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \sigma_n^2 \end{pmatrix}.$$

Dann ist $\bar{X}_n = a'X$ und

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\bar{X}_n] &= \frac{\mu_1 + \cdots + \mu_n}{n}, \\ \sigma_{\bar{X}_n}^2 &= a'\Sigma_X a \\ &= (1/n, \ldots, 1/n) \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_{n-1}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \sigma_n^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/n \\ 1/n \\ \vdots \\ 1/n \\ 1/n \end{pmatrix} \\ &= \frac{\sigma_1^2 + \cdots + \sigma_n^2}{n^2}. \end{aligned}$$

Sind $\mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_n = \mu$ und $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \cdots = \sigma_n^2 = \sigma^2$ dann gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\bar{X}_n] &= \mu \\ \sigma^2_{\bar{X}_n} &= \frac{\sigma^2}{n} \end{aligned}$$

□

7.4 BEISPIEL. Seien $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zwei monotone Funktionen, die beide entweder wachsend oder fallend sind, Z eine Zufallsgröße und $X = g(Z)$, $Y = h(Z)$. Dann sind X und Y positiv korreliert: Für alle u und v ist

$$(g(u) - g(v))(h(u) - h(v)) \geq 0,$$

da die beide Faktoren $g(u) - g(v)$ und $h(u) - h(v)$ entweder beide positiv oder beide negativ sind. Seien Z_1 und Z_2 unabhängig und identisch verteilt wie Z. Dann ist

$$\begin{aligned} 0 &\leq \mathbb{E}[(g(Z_1) - g(Z_2))(h(Z_1) - h(Z_2))] \\ &= \mathbb{E}[g(Z_1)h(Z_1)] + \mathbb{E}[g(Z_2)h(Z_2)] - \mathbb{E}[g(Z_1)h(Z_2)] - \mathbb{E}[g(Z_2)h(Z_1)] \\ &= \mathbb{E}[XY] + \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] \\ &= 2(\mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]) \\ &= 2\mathbb{C}ov[X, Y]. \end{aligned}$$

□

7.2 Aufgaben

AUFGABE 7.1. Seien X und Y unabhängig und standardnormalverteilt. Man berechne die Kovarianz zwischen X und $X + Y$.

AUFGABE 7.2. Seien X und Y unabhängig, $X \sim N(0, 2)$, $Y \sim N(1, 1)$. Man berechne die Varianz von $X - Y$ und $\mathbb{E}[(X + Y)^2]$.

AUFGABE 7.3. Die Kovarianz zwischen X und Y sei 3. Wie lautet die Kovarianz zwischen $2X$ und $-4Y$?

AUFGABE 7.4. Seien X, Y und Z Zufallsgrößen mit $\mathbb{C}or[X, Y] = \mathbb{C}or[X, Z] = \mathbb{C}or[Y, Z] = \rho$. Welche Werte kann ρ annehmen?

AUFGABE 7.5. Seien X, Y und Z Zufallsgrößen mit $\mathbb{C}or[X,Y] > 0$ und $\mathbb{C}or[X,Z] > 0$. Kann $\mathbb{C}or[Y,Z] < 0$ sein?

AUFGABE 7.6. $Sei (X_1, X_2)' \sim f$ mit der Dichte aus Beispiel 9.2. Man berechne $\mathbb{C}or[X_1, X_2]$.

AUFGABE 7.7. Man zeige, daß $\mathbb{V}[aX + b] = a^2\mathbb{V}[X]$ und $\mathbb{V}[X + Y] = \mathbb{V}[X] + \mathbb{V}[Y] + 2\mathbb{C}ov[X, Y]$.

AUFGABE 7.8. Seien X und Y unabhängig und standardisiert (d.h. die Erwartungserte sind 0 und die Varianzen 1). Man zeige, daß $X + Y$ und $X - Y$ unkorreliert sind.

AUFGABE 7.9. Sei $X_1 = ye^{-\sigma_1^2+\sigma_1 Z}$, $X_2 = ye^{-\sigma_2^2+\sigma_2 Z}$, $Z \sim N(0, 1)$, $\sigma_1 = 0.2$ (vergl. Beispiel 8.2). Man berechne

$$\lim_{\sigma_2\to\infty} \mathbb{C}or[X_1, X_2].$$

AUFGABE 7.10. Sei $X_1 = ye^{-\sigma^2+\sigma Z}$, $X_2 = ye^{-\sigma^2-\sigma Z}$, $Z \sim N(0, 1)$ (vergl. Beispiel 8.2). Man berechne $\mathbb{C}or[X_1, X_2]$ für $\sigma = 0.1$ und $\sigma = 2$.

AUFGABE 7.11. Welche der folgenden Matrizen sind Kovarianzmatrizen von geeigneten Zufallsgrößen?

$$M_1 = \begin{pmatrix} 2.67 & 1.58 & -0.20 \\ 1.58 & 1.60 & -0.63 \\ -0.20 & -0.63 & 0.84 \end{pmatrix},$$

$$M_2 = \begin{pmatrix} 2.61 & 1.70 & -0.11 \\ 1.70 & 1.40 & -0.79 \\ -0.11 & -0.79 & 0.71 \end{pmatrix},$$

$$M_3 = \begin{pmatrix} 2.61 & 1.70 & -0.11 \\ 1.70 & 1.40 & -0.79 \\ 0.11 & -0.79 & 0.71 \end{pmatrix}.$$

AUFGABE 7.12. Sei A eine (nicht notwendigerweise quadratische) Matrix. Man zeige, daß $\Sigma = AA'$ eine Kovarianzmatrix ist.

Kapitel 8

Anwendung: Information aus Erwartungswert und Varianz

8.1 Lineare Faktoren

Sei $X = (X_1, \ldots, X_d)'$ eine beobachtbare d-dimensionale Zufallsgröße. X wird durch eine Zufallsgröße $Z = (Z_1, \ldots, Z_m)'$ gesteuert, wenn es eine Funktion Ψ gibt, mit $X = \Psi(Z)$. Die Zufallsgrößen $Z_1, \ldots, Z_m$ heißen **Faktoren** von X. Die Analyse der Faktoren ist sinnvoll, wenn m klein im Vergleich zu d ist, d.h. wenn es wenige Faktoren gibt, die X steuern, oder wenn die Struktur von Z einfacher als die von X ist.
Da die Faktoren in der Regel nicht beobachtbar sind, kann eine Analyse nur dann durchgeführt werden, wenn die Form der Funktion Ψ bekannt ist. Typische Fragestellungen sind die Anzahl der Faktoren (wie groß ist m ?) und die Identifikation der Faktoren, die einen relevanten Einfluß haben.

Eine Analyse der Kovarianzmatrix Σ von X erlaubt die Identifikation von **linearen** Faktoren Z. Sei $X = (X_1, \ldots, X_d)'$ mit Kovarianzmatrix Σ und sei m der Rang von Σ. Es gibt m unkorrelierte Variable $Z = (Z_1, \ldots, Z_m)'$ und eine Matrix (eine lineare Funktion) V mit

$$X = VZ.$$

Lineare Faktoren sind insbesondere interessant, wenn $m < d$ ist.
Die Identifikation linearer Faktoren beruht auf einer Zerlegung der Kovarianzmatrix Σ. Die **Spektralzerlegung** (Eigenwert-Eigenvektor Zerlegung) ist die Darstellung

$$\Sigma = UDU',$$

wobei $D = (d_{ij})$ eine Diagonalmatrix mit $d_{ii} \geq 0$ und $U = (u_{ij})$ eine orthogonale Matrix ist (eine Matrix U ist orthogonal, wenn $U^{-1} = U'$).
Sei u_i die i-te Spalte von U. Es gilt

$$\Sigma u_i = d_{ii} u_i.$$

Die Diagonalelemente von D sind die **Eigenwerte** von Σ, die Spalten von U sind die **Eigenvektoren**. Die Ränge von Σ und D stimmen überein, d.h. die Diagonalmatrix D besitzt genau m Elemente, die ungleich 0 sind.
D ist die Kovarianzmatrix von $U'X$. Sei Z der Zufallsvektor, den man aus $U'X$ erhält, indem man Komponenten, die Varianz 0 besitzen, wegläßt und sei V die Matrix, die man aus U erhält, indem man nur Spalten beibehält, die zu Eigenwerten ungleich 0 gehören (die i-te Spalte von U wird weggelassen, wenn $d_{ii} = 0$), dann ist

$$X = VZ.$$

Die Spektralzerlegung zeigt, daß jede Zufallsgröße X mit Kovarianzmatrix Σ (vom Rang m) durch folgende zwei Schritte aus unkorrelierten Zufallsgrößen erzeugt werden kann.
Man startet mit unkorrelierten Zufallsvariablen $Z^* = (Z_1^*, \ldots, Z_m^*)$ mit $\mathbb{V}[Z_i^*] = 1$.
Zuerst werden die Variablen Z_i^* mit $\sqrt{d_{ii}}$ multipliziert, sie werden gedehnt oder gestaucht. Wir bezeichnen $\sqrt{d_{ii}} Z_i^*$ mit Z_i. Die Variablen Z_i sind unkorreliert, ihre Varianz ist $\mathbb{V}[Z_i] = d_{ii}$.
X erhält man aus $Z = (Z_1, \ldots, Z_m)$ durch eine lineare Abbildung $X = VZ$. Die Matrix V besitzt d Zeilen und m orthogonale Spalten. Die Abbildung $z \mapsto Vz$ setzt sich aus Drehungen und Spiegelungen zusammen.

8.1 BEISPIEL. Es wurde beobachtet, daß sich die (logarithmischen) Renditen (in Prozent) $(X_1, X_2, X_3)'$ von drei Wertpapieren parallel entwickeln. Lineare Faktoren sollen durch die Spektralzerlegung des Kovarianzmatrix gefunden werden.

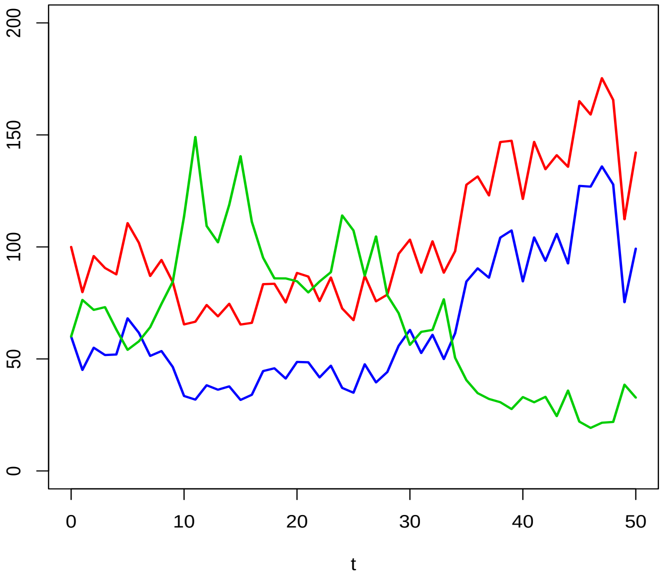

Abbildung 8.1: Kurse

```
# Kovarianzmatrix:
> Sigma
      [,1] [,2] [,3]
[1,]   100  150 -200
[2,]   150  225 -300
[3,]  -200 -300  400
> e<-eigen(Sigma)
> e$values
[1]  7.250000e+02  0.000000e+00 -3.858982e-15
> e$vectors
           [,1] [,2]       [,3]
[1,]  0.3713907  0.0  0.9284767
[2,]  0.5570860  0.8 -0.2228344
[3,] -0.7427814  0.6  0.2971125
```

Ein Eigenwert ist ungleich 0, es gibt also einen linearen Faktor, der die Renditen steuert. Wir kontrollieren, ob $\Sigma = UDU'$:

```
> U<-e$vectors
```

```
> D<-diag(e$values)
> U%*%D%*%t(U)
      [,1] [,2] [,3]
[1,]   100  150 -200
[2,]   150  225 -300
[3,]  -200 -300  400
```

Der Faktor besitzt die Varianz $d_{11} = 725$. Normiert man ihn nicht, muß man die Gewichte U mit $\sqrt{d_{11}}$ multiplizieren.

```
> V<-U[,1]*sqrt(D[1,1])
# Gewichte:
> V
[1] 10  15  -20
# Kontrolle:
> V%*%t(V)
     [,1] [,2] [,3]
[1,]  100  150 -200
[2,]  150  225 -300
[3,] -200 -300  400
```

An Hand der Vorzeichen der Gewichte sieht man, daß sich die Renditen X_1 und X_2 immer in die selbe Richtung bewegen, X_3 im Vergleich dazu immer in die andere.
Die Gewichte sind $V = (10, 15, -20)$. Es sei bekannt, daß die Renditen Erwartungswert 0 besitzten. Für die Kurse S_t^1, S_t^2, S_t^3 gilt $(t_1 < t_2)$

$$\begin{aligned}\frac{S_{t_2}^2}{S_{t_1}^2} &= \left(\frac{S_{t_2}^1}{S_{t_1}^1}\right)^{15/10} \\ \frac{S_{t_2}^3}{S_{t_1}^3} &= \left(\frac{S_{t_2}^1}{S_{t_1}^1}\right)^{-20/10} .\end{aligned}$$

Da die Entwicklung der drei Kurse von einem einzigen Faktor gesteuert wird, genügt die Kenntnis der Rendite eines Kurses, um die beiden anderen zu berechnen.
Zum Zeitpunkt $t = 50$ seien die Kurse $S_{50}^1 = 142.1$, $S_{50}^2 = 99.2$ und $S_{50}^3 = 32.7$. Wie lauten die Kurse zum Zeitpunkt $t = 60$, wenn der erste Kurs dann 160 ist?
Aus

$$\frac{S_{60}^1}{S_{50}^1} = \frac{160}{142.1} = 1.126$$

und $V_2/V_1 = 1.5$ folgt

$$\frac{S^2_{60}}{S^2_{50}} = \left(\frac{S^1_{60}}{S^1_{50}}\right)^{1.5} = 1.126^{1.5} = 1.195$$

und

$$S^2_{60} = 99.2 \times 1.195 = 118.5.$$

Für den dritten Kurs gilt $V_3/V_1 = -2$,

$$\frac{S^3_{60}}{S^3_{50}} = \left(\frac{S^1_{60}}{S^1_{50}}\right)^{-2} = 1.126^{-2} = 0.789$$

und

$$S^3_{60} = 32.7 \times 0.789 = 25.8.$$

□

8.2 BEISPIEL. Die Analyse der Kovarianzmatrix vermag nur lineare Faktoren zu erkennen. Seien X_1, X_2 Kurse von 2 Aktien,

$$X_i = y_i e^{\sigma_i Z - \sigma_i^2/2}.$$

y_i ist der aktuelle Preis der i-ten Aktie, σ_i ihre die Volatilität, Z sei standardnormalverteilt. Es gibt also einen einzigen Faktor, der beide Aktienkurse steuert. Der Korrelationskoeffizient zwischen $\log X_1$ und $\log X_2$ ist 1.

Die Analyse der Kovarianzmatrix von $X = (X_1, X_2)'$ kann aber diese Tatsache nicht erkennen lassen, wenn $\sigma_1 \neq \sigma_2$.

Es ist $\mathbb{E}[X_i] = y_i$ und

$$\begin{aligned}
\mathbb{C}ov[X_i, X_j] &= \mathbb{E}[X_j X_j] - y_i y_j \\
&= \mathbb{E}[y_i e^{\sigma_i Z - \sigma_i^2/2} y_j e^{\sigma_j Z - \sigma_j^2/2}] - y_i y_j \\
&= y_i y_j \left(e^{-\sigma_i^2/2 - \sigma_j^2/2} \mathbb{E}[e^{(\sigma_i + \sigma_j)Z}] - 1\right) \\
&= y_i y_j \left(e^{-\sigma_i^2/2 - \sigma_j^2/2} e^{(\sigma_i + \sigma_j)^2/2} - 1\right) \\
&= y_i y_j \left(e^{\sigma_i \sigma_j} - 1\right).
\end{aligned}$$

Daher ist

$$\begin{aligned}
\mathbb{C}or[X_1, X_2] &= \frac{\mathbb{C}ov[X_1, X_2]}{\sqrt{\mathbb{C}ov[X_1, X_1]\mathbb{C}ov[X_2, X_2]}} \\
&= \frac{e^{\sigma_1 \sigma_2} - 1}{\sqrt{(e^{\sigma_1^2} - 1)(e^{\sigma_2^2} - 1)}}.
\end{aligned}$$

Für $0 < \sigma_1 < \sigma_2$ ist

$$0 < \mathbb{C}or[X_1, X_2] < 1.$$

Sei $\sigma_1 = 0.2$, $\sigma_2 = 0.8$, dann ist

$$\mathbb{C}or[X_1, X_2] = 0.907.$$

$\square$

8.2 Portfoliooptimierung

In diesem Abschnitt wird gezeigt, wie das Wissen über die Struktur von Kovarianzmatrizen (Spektralzerlegung) verwendet werden kann, einfache Fragestellungen aus dem Bereich der optimalen Wahl von Portfolios zu beantworten. Wir gehen davon aus, daß in m risikobehaftete Wertpapiere mit Renditen $R_1, \ldots, R_m$ und in einigen Fällen auch ein risikoloses Wertpapier, z.B. ein Bankkonto, investiert werden kann. Die Renditen $R_1, \ldots, R_m$ sind zufällig und in der Regel korreliert, mit Erwartungswerten $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_m)'$ und Kovarianzmatrix $\Sigma = (\sigma_{ij})_{i,j=1}^m$. Die Rendite des risikolosen deterministische Wertpapiers bezeichnen wir mit r (Zinssatz).
Ein Portfolio ist ein Vektor $w = (w_1, \ldots, w_m)'$ (oder $w = (w_0, w_1, \ldots, w_m)'$), möglicherweise mit gewissen Restriktionen. Die Komponenten w_i dürfen auch negativ sein, Leerverkäufe sind zugelassen.
Die Portfolios werden aussschließlich an Hand ihres Erwartungswerts

$$\mu(w) = w_1\mu_1 + \cdots + w_m\mu_m = w'\mu$$

(bzw. $\mu(w) = w_0 r + w_1\mu_1 + \cdots + w_m\mu_m = w'\mu$) und ihrer Varianz

$$\sigma^2(w) = w'\Sigma w$$

beurteilt. $\mu(w)$ soll möglichst groß, das Risiko, gemessen durch die Varianz $\sigma^2(w)$, möglichst klein sein.
Ein Portfolio w wird durch das Portfolio w^* dominiert, wenn entweder $\mu(w) \le \mu(w^*)$ und $\sigma^2(w) > \sigma^2(w^*)$ oder $\mu(w) < \mu(w^*)$ und $\sigma^2(w) \ge \sigma^2(w^*)$. In diesem Fall wird man w^* dem Portfolio w vorziehen. Ein Portfolio, das nicht dominiert wird, heißt effizient oder zulässig.
Für zulässige Portfolios w gilt:

- falls $\sigma^2(w^*) \le \sigma^2(w)$, dann ist $\mu(w^*) \le \mu(w)$, und
- falls $\mu(w^*) \ge \mu(w)$, dann ist $\sigma^2(w^*) \ge \sigma^2(w)$.

Es folgt, daß ein zulässiges Portfolio w

$$\begin{aligned} \mu(w) &= \max_{w^*:\sigma^2(w^*)=\sigma^2(w)} \mu(w^*) \qquad \text{und} \\ \sigma^2(w) &= \min_{w^*:\mu(w^*)=\mu(w)} \sigma^2(w^*) \end{aligned}$$

erfüllt.
Mit $\Sigma^{1/2}$ bezeichen wir eine quadratische Matrix mit $\Sigma^{1/2'}\Sigma^{1/2} = \Sigma$. Sie ist nicht eindeutig. Eine mögliche Wahl ist $\Sigma^{1/2} = D^{1/2}U'$, wobei $\Sigma = UDU'$ die Spektraldarstellung von Σ ist und $D^{1/2}$ die Diagonalmatrix ist, deren Diagonalelemente die Wurzeln der Diagonalelemente von D sind.
Fall 1. Die Kovarianzmatrix Σ ist invertierbar und kein risikoloses Wertpapier steht zur Verfügung. Sei μ^* eine feste Zahl. Wir wollen das Portfolio w, finden, das die kleinste Varianz besitzt, unter allen Porfolios, deren Erwartungswert μ^* ist, d.h. man minimiere

$$w'\Sigma w \qquad \text{unter} \qquad w'\mu = \mu_0.$$

Wir kürzen $\Sigma^{1/2}w$ mit v und $(\Sigma^{1/2'})^{-1}\mu$ mit $\tilde{\mu}$ ab. Dann minimieren wir

$$v'v \qquad \text{unter} \qquad v'\tilde{\mu} = \mu_0.$$

Wir schreiben v als $v = t\tilde{\mu} + u$ mit $u'\tilde{\mu} = 0$ und $t \in \mathbb{R}$. Dann ist der Erwartungswert des Portfolios

$$v'\tilde{\mu} = t\tilde{\mu}'\tilde{\mu}$$

und die Varianz ist

$$t^2\tilde{\mu}'\tilde{\mu} + u'u.$$

Die minimale Varianz ergibt sich, falls $u = 0$ und damit v ein Vielfaches von $\tilde{\mu}$ ist. Die Konstante t ergibt sich aus $v'\tilde{\mu} = \mu_0$, d.h. $t\tilde{\mu}'\tilde{\mu} = \mu_0$ und damit ist $t = \mu_0/\tilde{\mu}'\tilde{\mu}$. Ersetzt man $(\Sigma^{1/2})^{-1}v$ wieder durch w und $\Sigma^{1/2'}\tilde{\mu}$ durch μ erhält man

$$w = t\Sigma^{-1}\mu \qquad \text{mit} \qquad t = \frac{\mu_0}{\mu'\Sigma^{-1}\mu}$$

und

$$\sigma^2(w) = w'\Sigma w = \frac{\mu_0^2}{\mu'\Sigma^{-1}\mu}.$$

Ist die Varianz des Portfolios, etwa σ_0^2, vorgegeben. Dann maximieren wir

$$w'\mu \qquad \text{unter} \qquad w'\Sigma w = \sigma_0^2.$$

Die Lösung w ist wieder von der Form $w = t\Sigma^{-1}\mu$. Die Zahl t errechnet man aus

$$\sigma_0^2 = w'\Sigma w = t^2\mu'\Sigma^{-1}\mu.$$

Es ist

$$t = \sqrt{\sigma_0^2/\mu'\Sigma^{-1}\mu} \qquad \text{und} \qquad \mu(w) = w'\mu = \sqrt{\sigma_0^2\mu'\Sigma^{-1}\mu}.$$

Fall 2. Die Kovarianzmatrix Σ ist invertierbar und ein risikoloses Wertpapier steht zur Verfügung. Jede Investition ausschließlich in dieses risikolose Wertpapier ist selbst risikolos. In diesem Fall ist es sinnvoll, den investierten Betrag zu begrenzen. Wir untersuchen den Fall

$$w_0 + w_1 + \cdots + w_m = 0.$$

Ist w_0 negativ, wird die Investition in die risikobehafteten Wertpapiere durch einen Kredit mit Zinssatz r finanziert!
Der Erwartungswert der Rendite des Portfolios ist

$$w_0 r + w_1\mu_1 + \cdots + w_m\mu_m = -(w_1 + \cdots + w_m)r + w_1\mu_1 + \cdots + w_m\mu_m = w_1(\mu_1 - r) + \cdots + w_m(\mu_m - r).$$

Wir können also den Fall 1 betrachten, wenn der Vektor μ durch den Vektor mit Komponenten $\mu_i - r$ ersetzt wird.
Fall 3. Der Rang der Kovarianzmatrix Σ ist 1 und es gibt mindestens 2 risikobehaftete Wertpapiere. In diesem Fall gibt es einen linearen Faktor, der für die Stochastik aller risikobehafteten Wertpapiere verantwortlich ist. Sei Z dieser Faktor. Wir können annehmen, daß Z standardisiert ist, d.h. daß $\mathbb{E}[Z] = 0$ und $\mathbb{V}[Z] = 1$. Es gibt Erwartungswerte μ_i und Standardabweichungen σ_i mit

$$R_i = \mu_i + \sigma_i Z.$$

Ein risikoloses Wertpapier besitzt einfach eine Standardabweichung $\sigma_i = 0$.
Da die Kovarianzmatrix Σ nicht vollen Rang besitzt, muß man überprüfen, ob eine Arbitragemöglichkeit besteht, d.h. ob es möglich ist, ohne Kapitaleinsatz ($w_1 + \cdots + w_m = 0$) sicher eine positive Rendite zu erhalten. Sei R der Vektor der Renditen, μ der Vektor der Erwartungswerte und σ der Vektor der Standardabweichungen. Es ist

$$R = \mu + Z\sigma.$$

Sei w ein Portfolio. Die Rendite

$$w'\mu + w'\sigma Z$$

ist sicher positiv, wenn $w'\sigma = 0$ und $w'\mu > 0$. Wann gibt es kein w mit

$$w'1 = 0, \qquad w'\sigma = 0 \qquad \text{und} \qquad w'\mu > 0?$$

1 bezeichnet hier den Vektor mit Komponenten 1. μ muß von der Form

$$\mu = s1 + t\sigma$$

mit $s, t \in \mathbb{R}$ sein, d.h. es muß

$$\mu_i = s + t\sigma_i$$

gelten. Nimmt man an, daß genau eines der Wertpapiere risikolos ist, erhält man aus $r = s + t * 0$ $\mu_i - r = t\sigma_i$ und damit: Keine Arbitragemöglichkeit besteht, falls

$$\frac{\mu_i - r}{\sigma_i}$$

konstant ist, d.h. nicht von i abhängt.
In diesem Fall gilt für alle Portfolios w mit $w_0 + w_1 + \cdots + w_m = 0$,

$$\mu(w) = t\sqrt{\sigma^2(w)}.$$

8.3 BEISPIEL. Es seien vier risikobehaftete Wertpapiere vorhanden. Erwartungswert und Kovarianzmatrix seien $\mu = (0.10, 0.05, 0.10, 0.20)$ und

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 0.76 & 0.15 & -0.20 & -0.24 \\ 0.15 & 0.58 & -0.15 & -0.24 \\ -0.20 & -0.15 & 0.61 & 0.18 \\ -0.24 & -0.24 & 0.18 & 0.72 \end{pmatrix}.$$

Es soll das Portfolio mit minimaler Varianz und einer erwarteten Rendite von 0.15 bestimmt werden.

```
> S
      [,1]  [,2]  [,3]  [,4]
 [1,]  0.76  0.15 -0.20 -0.24
 [2,]  0.15  0.58 -0.15 -0.24
 [3,] -0.20 -0.15  0.61  0.18
 [4,] -0.24 -0.24  0.18  0.72
> m
     [,1]
 [1,] 0.10
 [2,] 0.05
 [3,] 0.10
 [4,] 0.20

# Rang von S wird ueberprft
> eigen(S)
 $values [1] 1.2650862 0.5431607 0.4691133 0.3926397
```

```
$vectors
           [,1]       [,2]        [,3]       [,4]
[1,] -0.5640038  0.7372093 -0.32404210 -0.1828082
[2,] -0.4169935 -0.4851523  0.05455705 -0.7666597
[3,]  0.4249122 -0.1125136 -0.87038611 -0.2218521
[4,]  0.5722462  0.4566074  0.36667188 -0.5741042

> m0<-0.15
> t<-m0/t(m)%*%solve(S)%*%m
> t<-t[1,1]
> w<-t*solve(S)%*%m
> w
          [,1]
 [1,] 0.2884704
 [2,] 0.2559572
 [3,] 0.2102884
 [4,] 0.4366313
# Varianz des Portfolios
> m0^2/t(m)%*%solve(S)%*%m
          [,1]
[1,] 0.1661729
```

Es existiere zusätzlich ein Bankkonto mit Rendite $r = 0.03$. Man bestimme das Portfolio unter der Bedingung, daß die Investition durch einen Kredit vom Bankkonto finanziert wird.

```
> r<-0.03
> t<-m0/t(m)%*%solve(S)%*%(m-r)
> t<-t[1,1]
> w<-t*solve(S)%*%(m-r)
> w
          [,1]
 [1,] 0.2849570
```

```
 [2,] 0.2147132
 [3,] 0.1755976
 [4,] 0.4660444

> w0<--sum(w)
> w0
[1] -1.141312

# Varianz des Portfolios
> m0^2/t(m-r)%*%solve(S)%*%(m-r)
          [,1]
[1,] 0.2826761
```

8.4 BEISPIEL. Es seien vier risikobehaftete Wertpapiere und ein Bankkonto mit Zinssatz $r = 0.03$ vorhanden. Erwartungswert und Kovarianzmatrix seien $\mu = (0.10, 0.05, 0.10, 0.20)$ und

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 0.25 & 0.20 & 0.20 & 0.45 \\ 0.20 & 0.16 & 0.16 & 0.36 \\ 0.20 & 0.16 & 0.16 & 0.36 \\ 0.45 & 0.36 & 0.36 & 0.81 \end{pmatrix}.$$

Es soll das Portfolio mit minimaler Varianz und einer erwarteten Rendite von 0.15 bestimmt werden.

```
> S
     [,1] [,2] [,3] [,4]
 [1,] 0.25 0.20 0.20 0.45
 [2,] 0.20 0.16 0.16 0.36
 [3,] 0.20 0.16 0.16 0.36
 [4,] 0.45 0.36 0.36 0.81
> m
     [,1]
 [1,] 0.10
 [2,] 0.05
 [3,] 0.10
```

```
 [4,] 0.20

# Rang von S wird ueberprft
> e<-eigen(S)
> e
$values [1]  1.380000e+00  4.440892e-16  4.715829e-17 -1.457801e-17

$vectors
           [,1]       [,2]       [,3]       [,4]
 [1,] -0.4256283  0.9048981  0.0000000  0.0000000
 [2,] -0.3405026 -0.1601590 -0.7531039  0.5396680
 [3,] -0.3405026 -0.1601590 -0.4080524 -0.8318054
 [4,] -0.7661309 -0.3603577  0.5160695  0.1298389

# Rang(S)=1
> sigma<-sqrt(e$values[1])*e$vectors[,1]
> sigma
[1] -0.5 -0.4 -0.4 -0.9
> sigma<--sigma
> r<-0.03
> (m-r)/sigma
          [,1]
 [1,] 0.1400000
 [2,] 0.0500000
 [3,] 0.1750000
 [4,] 0.1888889
# Arbitrage ist moeglich!

> s<-(t(m)%*%sigma/t(sigma)%*%sigma)
> w<-m-s[1,1]*sigma
> w
             [,1]
 [1,] -0.005072464
 [2,] -0.034057971
```

```
 [3,]  0.015942029
 [4,]  0.010869565
> w<-w*1000
> w
           [,1]
 [1,]  -5.072464
 [2,] -34.057971
 [3,]  15.942029
 [4,]  10.869565

> w0<--sum(w)

# Sicherer Ertrag:
> w0*r+t(w)%*%m
          [,1]
[1,] 1.927536
```

8.3 Aufgaben

AUFGABE 8.1. Die Kovarianzmatrix von Renditen (in Prozent) von 3 Aktien sei

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 809 & -168 & -631 \\ -168 & 36 & 132 \\ -631 & 132 & 493 \end{pmatrix}.$$

Wie viele und welche lineare Faktoren sind vorhanden?

AUFGABE 8.2. Die Kovarianzmatrix dreier Renditen $(X, Y, Z)'$, die alle Erwartungswert 0 besitzen, ist

$$\begin{pmatrix} 9 & -18 & 30 \\ -18 & 36 & 60 \\ 30 & 60 & 100 \end{pmatrix}.$$

Wie viele und welche lineare Faktoren sind vorhanden? Wie groß ist Y, wenn $X = -0.4$ ist?

AUFGABE 8.3. Die Kovarianzmatrix von Renditen (in Prozent) von 3 Aktien sei

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 100 & -100 & -200 \\ -100 & 100 & 200 \\ -200 & 200 & 400 \end{pmatrix}.$$

Wie viele und welche lineare Faktoren sind vorhanden?
Die Erwartungswerte der Renditen seien 0. Die Preise der Aktien sind (in $t = 0$): 100, 400, 60. Wie lauten die Preise der ersten beiden Aktien zum Zeitpunkt $t = 1$, wenn die dritte 70 kostet.

AUFGABE 8.4. Es seien drei risikobehaftete Wertpapiere vorhanden. Erwartungswert und Kovarianzmatrix seien $\mu = (0.08, 0.07, 0.12)$ und

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 0.76 & 0.15 & -0.20 \\ 0.15 & 0.58 & -0.15 \\ -0.20 & -0.15 & 0.61 \end{pmatrix}.$$

1. Bestimmen Sie das Portfolio mit minimaler Varianz und einer erwarteten Rendite von 0.10.

2. Bestimmen Sie das Portfolio mit maximalem Erwartungswert und einer Varianz von 0.3.

AUFGABE 8.5. Es seien drei risikobehaftete Wertpapiere und ein Bankkonto mit Zinssatz 0.03 vorhanden. Erwartungswert und Kovarianzmatrix seien $\mu = (0.08, 0.07, 0.12)$ und

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 0.76 & 0.15 & -0.20 \\ 0.15 & 0.58 & -0.15 \\ -0.20 & -0.15 & 0.61 \end{pmatrix}.$$

1. Bestimmen Sie das Portfolio mit minimaler Varianz und einer erwarteten Rendite von 0.10.

2. Bestimmen Sie das Portfolio mit maximalem Erwartungswert und einer Varianz von 0.3.

AUFGABE 8.6. Es seien drei risikobehaftete Wertpapiere und ein Bankkonto mit Zinssatz 0.03 vorhanden. Erwartungswert und Kovarianzmatrix seien $\mu = (0.08, 0.07, 0.12)$ und

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 0.16 & 0.32 & 0.08 \\ 0.32 & 0.64 & 0.16 \\ 0.08 & 0.16 & 0.04 \end{pmatrix}.$$

1. Überprüfen Sie, ob Arbitrage möglich ist.

2. Falls Arbitrage möglich ist, geben Sie eine Arbitragemöglichkeit an.

3. Falls Arbitrage nicht möglich ist, bestimmen Sie das Portfolio mit minimaler Varianz und einer erwarteten Rendite von 0.10.

4. Falls Arbitrage nicht möglich ist, bestimmen Sie das Portfolio mit maximalem Erwartungswert und einer Varianz von 0.3.

AUFGABE 8.7. Es seien drei risikobehaftete Wertpapiere und ein Bankkonto mit Zinssatz 0.03 vorhanden. Erwartungswert und Kovarianzmatrix seien $\mu = (0.07, 0.11, 0.05)$ und

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 0.16 & 0.32 & 0.08 \\ 0.32 & 0.64 & 0.16 \\ 0.08 & 0.16 & 0.04 \end{pmatrix}.$$

1. Überprüfen Sie, ob Arbitrage möglich ist.

2. Falls Arbitrage möglich ist, geben Sie eine Arbitragemöglichkeit an.

3. Falls Arbitrage nicht möglich ist, bestimmen Sie das Portfolio mit minimaler Varianz und einer erwarteten Rendite von 0.10.

4. Falls Arbitrage nicht möglich ist, bestimmen Sie das Portfolio mit maximalem Erwartungswert und einer Varianz von 0.3.

Kapitel 9

Multivariate Normalverteilung

9.1 Normalverteilte Zufallsvektoren

Sind $X_1, \ldots, X_d$ unabhängig und $X_i \sim N(0,1)$, dann ist die Dichte von $X = (X_1, \ldots, X_d)'$ das Produkt der Dichten der Randverteilungen, d.h. für $x = (x_1, x_2, \ldots, x_d)'$ ist

$$\begin{aligned} f(x_1, \ldots, x_d) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x_1^2/2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x_2^2/2} \cdots \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x_d^2/2} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} e^{-(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_d^2)/2} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} e^{-x'x/2}. \end{aligned}$$

Wir schreiben $X \sim N(0, I_d)$, wobei $0 = (0, \ldots, 0)'$ und I_d die $d \times d$-Einheitsmatrix ist.

$X = (X_1, \ldots, X_d)'$ ist **normalverteilt**, wenn es eine $d \times m$-Matrix A, einen Vektor $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_d)'$ und $Z \sim N(0, I_m)$ gibt mit $X = AZ + \mu$. Dann ist

$$\mathbb{E}[X] = \mu,$$

$$\mathbb{V}[X] = AA'.$$

Wir schreiben $X \sim N(\mu, \Sigma)$, mit $\Sigma = AA'$. Falls Σ invertierbar ist, besitzt $X \sim N(\mu, \Sigma)$ die Dichte

$$\phi_{\mu,\Sigma}(x) = \frac{1}{(2\pi \det(\Sigma))^{d/2}} e^{-(x-\mu)'\Sigma^{-1}(x-\mu)/2}.$$

$\det(\Sigma)$ bezeichnet die Determinante von Σ. Für invertierbare Kovarianzmatrizen Σ ist $\det(\Sigma) > 0$.

```
> x<-seq(-3,3,length=100)
> y<-x
> f<-exp(outer(-x^2/2,-y^2/2,"+"))/(2*pi)
```

```
> persp(x,y,f,xlab="X",ylab="Y",zlab="",zlim=c(0,0.2),ticktype="detailed",
  col="yellow",axes=TRUE,theta=-30,ltheta=-25)
# savePlot(file="normprob1",type="ps")
> contour(x,y,f,xlab="X",ylab="Y")
```

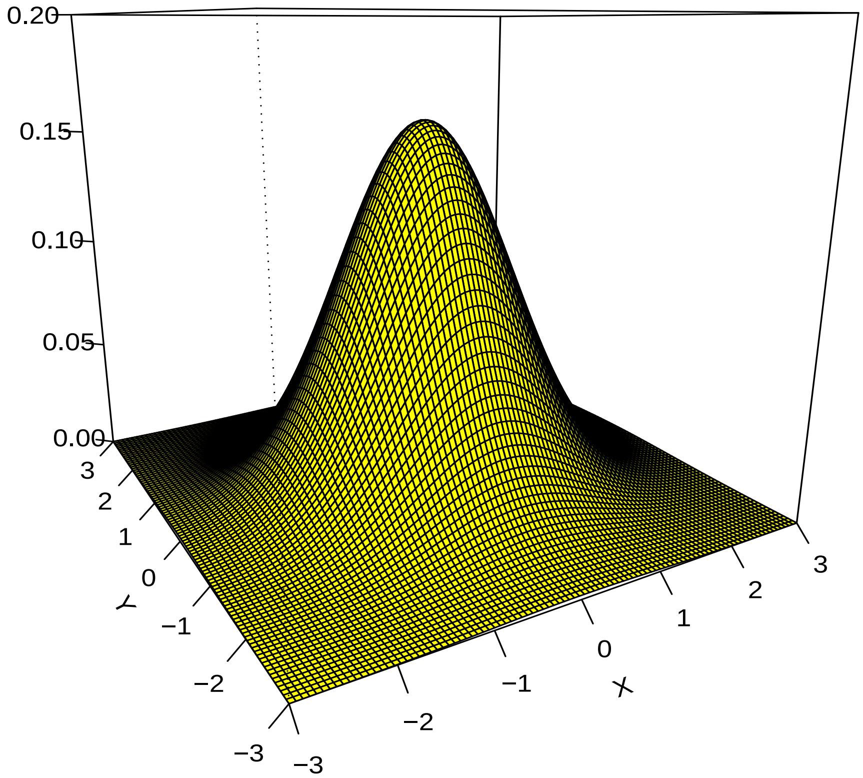

Abbildung 9.1: Dichte der Normalverteilung, Perspektiveplot

Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen A sind die Flächen (Volumen) "unter" der Dichte f, $P(A) = \int_A f(x)dx$. Ist z.B. $X = (X_1, X_2)' \sim N(0, I_2)$, $A =]-0.5, \infty[\quad \times \quad]-1, \infty[$, dann ist $f(x) = \phi_{0,I_2}(x)$ und

$$
\begin{aligned}
P(A) &= P(X_1 > -0.5 \text{ und } X_2 > -1) \\
&= \int_A f(x)dx
\end{aligned}
$$

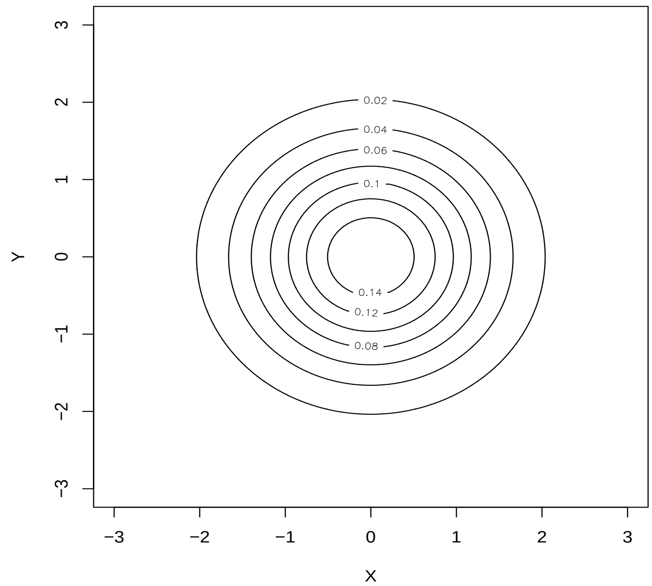

Abbildung 9.2: Dichte der Normalverteilung, Contourplot

$$= \int_{-1}^{\infty}\int_{-0.5}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x_1^2/2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x_2^2/2}dx_1dx_2.$$

```
> x1<-y1<-(1:100)*0
> a<--0.5
> b<--1
> x1[x>a]<-x1[x>a]*0+1
> y1[y>b]<-y1[y>b]*0+1
> g<-f*outer(x1,y1,"*")
> persp(x,y,g,xlab="X",ylab="Y",zlab="",zlim=c(0,0.2),ticktype="detailed",
  col="yellow",axes=TRUE,theta=-30,ltheta=-25)
```

Sei $X \sim N(\mu, \Sigma)$. Die Matrix A in der Darstellung $X = AZ + \mu$ erfüllt $AA' = \Sigma$. Sie ist durch Σ nicht eindeutig festgelegt. Ist zum Beispiel $Z \sim N(0, I_d)$ und $A = U$ mit $U^{-1} = U'$ (d.h. U ist orthogonal), dann folgt aus $UU' = UU^{-1} = I_d$, daß $X = UZ$ ebenfalls $N(0, I_d)$-verteilt ist. Es ist also $X = UZ$ und $X = I_dX$ mit $Z \sim N(0, I_d)$ und $X \sim N(0, I_d)$.
Die Abbildung $x \mapsto Ux$ ist eine Drehung oder Spiegelung, insbesondere ist die Länge der Vektoren x und Ux gleich. Man sieht auch an Hand des Contourplots 9.2, daß X und UX die selbe Dichte besitzen, wenn $X \sim N(0, I_d)$.

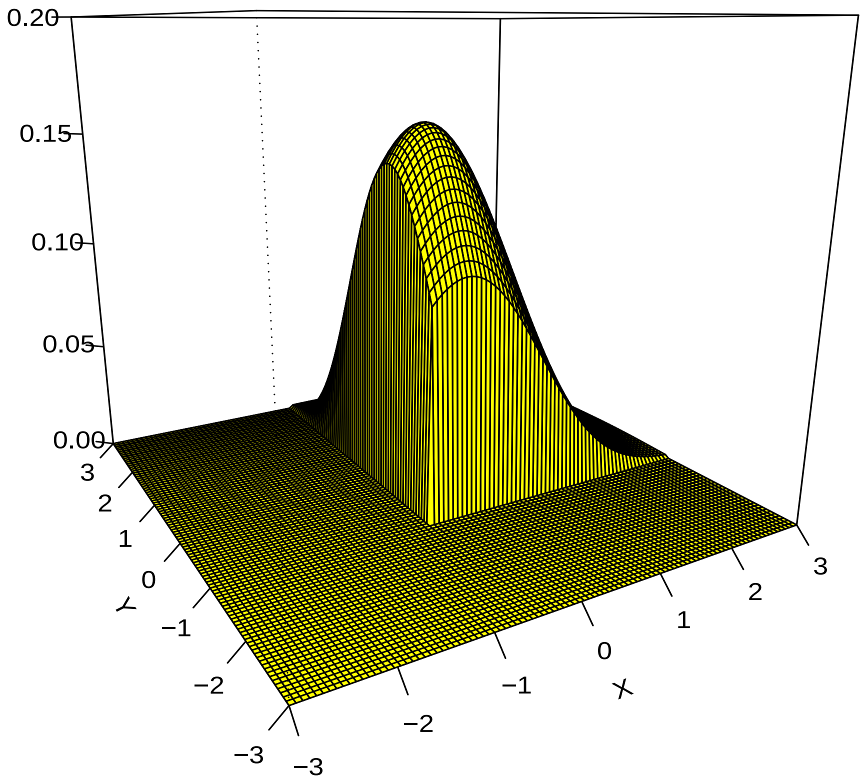

Abbildung 9.3: $P(X > -0.5, Y > -1)$

Die Spektralzerlegung der Matrix Σ führt zu einer Zerlegung der Abbildung $z \mapsto Az + \mu$. Sei $\Sigma = UDU'$, wobei U eine orthogonale Matrix und D eine Diagonalmatrix ist. Die Diagonalelemente von D sind nicht negativ, die Anzahl der strikt positiven Diagonalelemente ist der Rang von Σ. Sei $D^{1/2}$ die Diagonalmatrix, deren Elemente die Quadratwurzeln der Elemente von D sind. Dann ist $D^{1/2}D^{1/2} = D$. Sei $Z \sim N(0, I_d)$ und $X \sim N(\mu, \Sigma)$. Die folgenden Schritte führen zur Abbildung $X = AZ + \mu$:

1. $Z \mapsto D^{1/2}Z$. Die Komponenten von Z werden gedehnt oder gestaucht, bleiben aber unabhängig.

2. $D^{1/2}Z \mapsto UD^{1/2}Z$. Der Vektor $D^{1/2}Z$ wird gedreht, die Komponenten von $UD^{1/2}Z$ sind korreliert.

3. $UD^{1/2}Z \mapsto UD^{1/2}Z + \mu$. Lageverschiebung.

Die Abbildung 9.5 zeigt die Contourplots der Dichten von $Z \sim N(0, I_2)$, $D^{1/2}Z$, $UD^{1/2}Z$.

```
> Sigma<-matrix(c(0.75,0.25,0.25,0.75),ncol=2)
> Sigma
     [,1] [,2]
[1,] 0.75 0.25
[2,] 0.25 0.75
> M<-solve(Sigma)
> M
     [,1] [,2]
[1,]  1.5 -0.5
[2,] -0.5  1.5

> func<-function(x,y)
+ {-0.5*(1.5*x^2+1.5*y^2-2*0.5*x*y)}

> det<-Sigma[1,1]*Sigma[2,2]-Sigma[1,2]*Sigma[2,1]
# oder: det<-prod(eigen(Sigma)$values)

> f<-exp(outer(x,y,func))/(2*pi*sqrt(det))
> contour(x,y,f,xlab="X",ylab="Y")

> eigen(Sigma)
$values [1] 1.0 0.5

$vectors
          [,1]       [,2]
[1,] 0.7071068  0.7071068
[2,] 0.7071068 -0.7071068
```

Linearkombinationen von gemeinsam normalverteilten Zufallsgrößen sind wieder normalverteilt. Die Identifikation der Verteilung bedarf nur der Berechnung von Erwartungswert und Varianz.

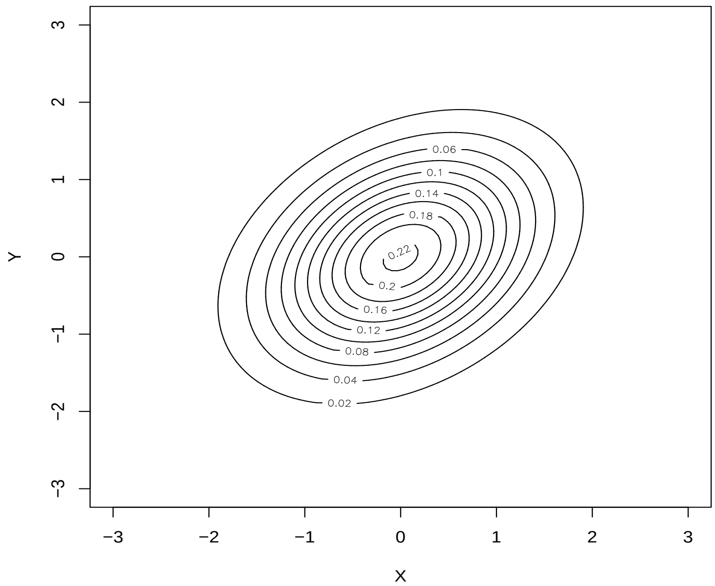

Abbildung 9.4: Dichte der Normalverteilung, Contourplot

Diese Tatsache verschafft der Normalverteilung eine ungeheure Beliebtheit. Wir fassen Eigenschaften der multivariaten Normalverteilung zusammen.

- Unabhängigkeit: Ist $X \sim N(\mu, \Sigma)$. Die Komponenten von X sind unabhängig, genau dann, wenn sie unkorreliert sind, d.h. wenn Σ eine Diagonalmatrix ist.

- Linearkombinationen: Ist $X \sim N(\mu, \Sigma)$ und M eine $d \times m$-Matrix mit Rang d, dann ist $MX \sim N(M\mu, M\Sigma M')$. Insbesondere, wenn $w = (w_1, \ldots, w_m)'$ ein Vektor ist, gilt $w'X \sim N(w'\mu, w'\Sigma w)$.

  Ist $w = e_i$ der i-te Einheitsvektor, dann ist

$$\begin{aligned} X_i &= e_i'X \\ \mathbb{E}[X_i] &= e_i'\mu = \mu_i \\ \mathbb{V}[X_i] &= e_i'\Sigma e_i = \sigma_{ii}. \end{aligned}$$

  Die Komponenten X_i sind normalverteilt, $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_{ii})$.

  Ist $\Sigma = UDU'$ die Spektraldarstellung von Σ, dann ist $U'\Sigma U = U'UDU'U = D$: Die Komponenten von $U'X$ sind unabhängig.

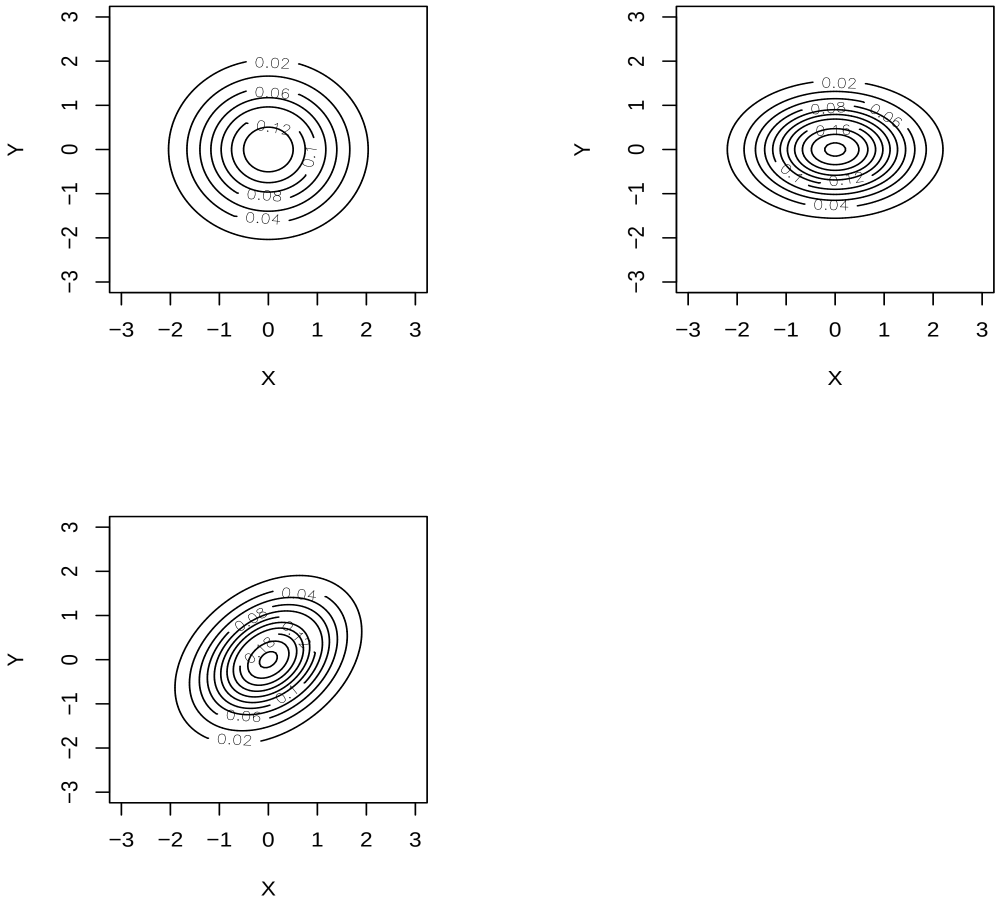

Abbildung 9.5: Dichte der Normalverteilung, Contourplot

- Bedingte Verteilungen: Ist $X = (X_1, \ldots, X_m)'$ multivariat normalverteilt und $1 \leq k < m$, dann ist die bedingte Verteilung von $(X_1, \ldots, X_k)'$ unter $(X_{k+1}, \ldots, X_m)'$ ebenfalls eine Normalverteilung.

  Wir betrachten nur den bivariaten Fall. Seien X und Y univariate Zufallsvariable, die gemeinsam normalverteilt sind, mit Erwartungswerten μ_X, μ_Y, Varianzen σ_X^2, σ_Y^2 und Korrelation ρ, dann ist $Y \mid X = x$ normalverteilt mit Erwartungswert

$$\mu_Y - \frac{\rho\sigma_Y}{\sigma_X}\mu_X + \frac{\rho\sigma_Y}{\sigma_X}x$$

  und Varianz

$$\sigma_Y^2(1 - \rho^2).$$

9.1 BEISPIEL. Am Markt befinden sich drei Wertpapiere. Sei X_i der Gewinn des i-ten Wertpapiers (Differenz aus Preis nach einer Periode und heutigem Preis). Diese Gewinne seien gemeinsam normalverteilt mit Erwartungswerten $\mu_1 = 7$, $\mu_2 = 10$, $\mu_3 = 0$ und Kovarianzmatrix

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 3 \\ 0 & 15 & 5 \\ 3 & 5 & 5 \end{pmatrix}.$$

Ein Anleger erwirbt von den beiden ersten Aktien 100 Stück. Man berechne die Verteilung seines Gewinns, wenn die dritte Aktie einen Verlust von 5 GE erleidet.
Sei

$$G = 100X_1 + 100X_2.$$

Es ist

$$\begin{pmatrix} G \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}.$$

$(G, X_3)'$ ist normalverteilt mit Erwartungswert

$$\mu = \begin{pmatrix} 100 \times 7 + 100 \times 10 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1700 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und Kovarianzmatrix

$$\begin{pmatrix} 100 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & 0 & 3 \\ 0 & 15 & 5 \\ 3 & 5 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100 & 0 \\ 100 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 250000 & 800 \\ 800 & 5 \end{pmatrix}.$$

Die Korrelation zwischen G und X_3 ist

$$\rho = \frac{800}{\sqrt{250000 \times 5}} = 0.716.$$

Dann ist

$$G \mid X_3 \sim N(a + bX_3, \sigma_G^2(1 - \rho^2)),$$

mit

$$b = \frac{\mathbb{C}ov[G, X_3]}{\sigma_{X_3}^2} = \frac{800}{5} = 160,$$

$$a = \mu_G - b\mu_{X_3} = 1700 - 160 \times 0 = 1700,$$

$$\sigma_G^2(1 - \rho^2) = 250000(1 - 0.716^2) = 122000.$$

Insbesondere ist $a + b(-5) = 1700 - 160 \times 5 = 900$.

$$G \mid X_3 = -5 \sim N(900, 122000).$$

Der Gewinn liegt mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% zwischen

$$215.4 = 900 - 1.96 \times \sqrt{122000}$$

und

$$1584.6 = 900 + 1.96 \times \sqrt{122000}.$$

□

9.2 BEISPIEL. In diesem Beispiel wollen wir zeigen, daß $X = (X_1, \ldots, X_d)'$ nicht normalverteilt sein muß, wenn die Komponenten X_i normalverteilt sind.
Sei $(X_1, X_2) \sim f(x_2, x_2)$, wobei $f(x_1, x_2) = 2\phi(x_1)\phi(x_2)$, falls x_1 und x_2 das selbe Vorzeichen besitzen und $f(x_1, x_2) = 0$ sonst. Um zu zeigen, daß $X_1 \sim N(0, 1)$ berechnen wir $\int f(x_1, x_2)dx_2$.
Sei $x_1 > 0$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2)dx_2 &= \int_0^{\infty} 2\phi(x_1)\phi(x_2)dx_2 \\ &= 2\phi(x_1)\int_0^{\infty} \phi(x_2)dx_2 \\ &= 2\phi(x_1)1/2 \\ &= \phi(x_1).\end{aligned}$$

Aus $x_1 < 0$ folgt

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2)dx_2 &= \int_{-\infty}^{0} 2\phi(x_1)\phi(x_2)dx_2 \\ &= 2\phi(x_1)\int_{-\infty}^{0} \phi(x_2)dx_2 \\ &= 2\phi(x_1)1/2 \\ &= \phi(x_1).\end{aligned}$$

Daher ist $X_1 \sim N(0, 1)$. Aus $f(x_1, x_2) = f(x_2, x_1)$ folgt auch $X_2 \sim N(0, 1)$. □

9.2 Erzeugung von normalverteilten Zufallsvektoren

Normalverteilte Zufallszahlen werden aus standardisierten (normalverteilten) Zufallszahlen durch einen lineare Transformation erzeugt. Wenn $Z \sim N(0, 1)$, dann ist $X = \sigma Z + \mu \sim N(\mu, \sigma^2)$. Analog geht man im mehrdimensionale Fall vor, wenngleich die Berechnung der Standardabweichung als Wurzel der Varianz nur im eindimensionalen Fall trivial ist. Wenn $Z = (Z_1, \ldots, Z_d)'$ ein Zufallsvektor der Dimension d mit $\mathbb{E}[Z] = 0$ und $\mathbb{V}[Z] = I$ ist, A eine $p \times d$-Matrix und $\mu \in \mathbb{R}^p$ ein p-dimensionaler Vektor ist, dann gilt für $X = AZ + \mu$,

$$\mathbb{E}[X] = \mu, \tag{9.1}$$

$$\mathbb{V}[X] = AA' \tag{9.2}$$

9.3 BEISPIEL. Es soll ein normalverteilter Zufallsvektor X mit Erwartungswert

$$\mu = \begin{pmatrix} 10 \\ -3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

und Kovarianzmatrix

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 3.24 & -3.24 & -2.52 & 0 \\ -3.24 & 14.8 & 1.50 & -0.34 \\ -2.52 & 1.50 & 2.69 & -0.13 \\ 0 & -0.34 & -0.13 & 1.05 \end{pmatrix}$$

erzeugt werden. Zuerst berechnen wir eine Matrix A mit $AA' = \Sigma$, erzeugen vier unabhängige standardnormalverteilte Zufallszahlen $Z_1, \ldots, Z_4$ und berechnen $X = AZ + \mu$ mit $Z = (Z_1, Z_2, Z_3, Z_4)'$. Die Matrix A kann nur in Ausnahmefällen analytisch berechnet werden. Gute Statistikprogramme berechnen diese Matrix numerisch. Man beachte, daß A durch die Beziehung $AA^\top = \Sigma$ nicht eindeutig bestimmt ist. Man kann z.B. die Choleskyzerlegung oder die Spektralzerlegung bzw. die Singulärwertzerlegung wählen. Die Choleskyzerlegung von Σ liefert eine obere Dreiecksmatrix C mit $C'C = \Sigma$. Wir setzen dann $A = C'$ und erhalten

$$A = \begin{pmatrix} 1.8 & 0 & 0 & 0 \\ -1.8 & 3.4 & 0 & 0 \\ -1.4 & -0.3 & 0.8 & 0 \\ 0 & -0.1 & -0.2 & 1.0 \end{pmatrix}$$

```
> m<-matrix(c(10,-3,0,5),ncol=1)
> Sigma<-matrix(c(3.24,-3.24,-2.52,0,-3.24,14.8,1.5,-0.34,
  -2.52,1.5,2.69,-0.13,0,-0.34,-0.13,1.05),ncol=4)
> Sigma
      [,1]  [,2]  [,3]  [,4]
[1,]  3.24 -3.24 -2.52  0.00
```

```
[2,] -3.24 14.80  1.50 -0.34
[3,] -2.52  1.50  2.69 -0.13
[4,]  0.00 -0.34 -0.13  1.05
> C<-chol(Sigma)
> A<-t(C)
> A
     [,1] [,2] [,3] [,4]
[1,]  1.8  0.0  0.0    0
[2,] -1.8  3.4  0.0    0
[3,] -1.4 -0.3  0.8    0
[4,]  0.0 -0.1 -0.2    1
> z<-matrix(rnorm(4),ncol=1)
> x<-A%*%z+m
> n<-10
> Z<-matrix(rnorm(4*n),ncol=n)
> M<-matrix(m,ncol=n,nrow=4)
> X<-A%*%Z+M
```

□

9.3 Aufgaben

AUFGABE 9.1. Seien X und Y gemeinsam normalverteilt, $\mu_X = 1$, $\sigma_X^2 = 1$, $\mu_Y = 0$, $\sigma_Y^2 = 2$, $\mathbb{C}or[X, Y] = 0.5$. Wie lautet die Verteilung von $X + Y$.

AUFGABE 9.2. X und Y, die Renditen zweier Aktien seien gemeinsam normalverteilt, beide mit Erwartungswert 0.1 und Varianz 0.4. Die Korrelation beträgt 0.9. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist X positiv? Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist X positiv, wenn $Y = 0$.

AUFGABE 9.3. Seien $X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$ und $Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$ unabhängig. Berechnen Sie Erwartungswert und Varianz von $X + Y$ und XY. Wie lautet die bedingten Verteilungen von $X + Y$ unter Y und von XY unter Y ?

AUFGABE 9.4. Seien X und Y gemeinsam normalverteilt, wobei $X \sim N(0, 1)$, $Y \sim N(0, 1)$ und r die Korrelation bezeichne. Wie lautet die bedingte Verteilung von X unter Y ?

AUFGABE 9.5. Sei $X = (X_1, X_2, X_3)' \sim N(\mu, \Sigma)$ mit $\mu = (0, 5, -2)$ und

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 8.1 & -1.7 & -6.3 \\ -1.7 & 0.4 & 1.3 \\ -6.3 & 1.3 & 6.0 \end{pmatrix}.$$

1. Wie lautet die Verteilung von (X_1, X_2)? Man berechne $P(X_1 \leq 2 \text{ und } X_2 > 2)$.

2. Wie lautet die Verteilung von $X_1 \mid X_3 = 0$? Man berechne $P(X_1 \leq 2 \mid X_3 = 0)$ und $P(X_1 \leq 2 \mid X_3 > 0)$.

3. Wie lautet die Verteilung von $(X_1, X_2)' \mid X_3 = 0$? Man berechne $P(X_1 \leq 2 \text{ und } X_2 > 2 \mid X_3 = 0)$ und $P(X_1 \leq 2 \text{ und } X_2 > 2 \mid X_3 > 0)$.

AUFGABE 9.6. Sei $X = (X_1, X_2, X_3)' \sim N(\mu, \Sigma)$ mit $\mu = (0, 5, -2)$ und

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 8.1 & -1.7 & -6.3 \\ -1.7 & 0.4 & 1.3 \\ -6.3 & 1.3 & 6.0 \end{pmatrix}.$$

Man berechne die 95%-Quantile folgender Verteilungen:

1. der Verteilung von X_1,

2. der Verteilung von $X_1 \mid X_2 = 2$,

3. der Verteilung von $X_1 \mid X_2 = 2, X_3 = 0$,

4. der Verteilung von $Y = 0.2X_1 + X_2 - X_3$,

5. der Verteilung von $Y = 0.2X_1 + X_2 - X_3 \mid X_3 = 0$.

AUFGABE 9.7. X und Y bezeichne die Renditen zweier Wertpapier, S^X und S^Y. X und Y seien gemeinsam normalverteilt mit den Erwartungswerten $\mu_X = 0.1$, $\mu_Y = 0.02$, Varianzen $\sigma_X^2 = 0.04$, $\sigma_Y^2 = 0.01$ und der Korrelation $\rho = 0.7$. Weiters ist der Wert der Papiere in $t = 0$ gegeben durch $S_0^X = 100$ und $S_0^Y = 200$.

Sei P ein Portfolio, das aus 100 Wertpapieren S^X und 500 Wertpapieren S^Y besteht. Berechnen Sie Erwartungswert und Varianz des Portfolios zum Zeitpunkt 1.

Kapitel 10

Maxima und Minima

10.1 Verteilung von Maxima und Minima

Seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängig und identisch verteilt mit Verteilungsfunktion F. Sei

$$\mathrm{Max}_n = \max\{X_1, \dots, X_n\}.$$

Die Verteilungsfunktion $F_{\max,n}$ von Max_n ist

$$\begin{aligned}
F_{\max,n}(x) &= P(\max\{X_1, \dots, X_n\} \le x) \\
&= P(X_1 \le x, X_2 \le x, \dots, X_n \le x) \\
&= P(X_1 \le x)P(X_2 \le x) \cdots P(X_n \le x) \\
&= F(x)^n.
\end{aligned}$$

Die Verteilungsfunktion von

$$\mathrm{Min}_n = \min\{X_1, \dots, X_n\}$$

ist

$$\begin{aligned}
F_{\min,n}(x) &= P(\min\{X_1, \dots, X_n\} \le x) \\
&= 1 - P(\min\{X_1, \dots, X_n\} > x) \\
&= 1 - P(X_1 > x, X_2 > x, \dots, X_n > x) \\
&= 1 - P(X_1 > x)P(X_2 > x) \cdots P(X_n > x) \\
&= 1 - (1 - F(x))^n.
\end{aligned}$$

10.1 BEISPIEL. Seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängig und identisch verteilt mit stetiger Verteilungsfunktion F. Man drücke die Quantile von $\mathrm{Max}_n = \max\{X_1, \dots, X_n\}$ und $\mathrm{Min}_n = \min\{X_1, \dots, X_n\}$ mit Hilfe der Quantile von F aus.

Seien $Q(\alpha)$, $Q_{max}(\alpha)$ und $Q_{min}(\alpha)$ die Quantile von F, $F_{max,n}$ und $F_{min,n}$. Aus

$$\begin{aligned}\alpha &= F_{max,n}(Q_{max}(\alpha)) \\ &= F(Q_{max}(\alpha))^n\end{aligned}$$

folgt

$$\alpha^{1/n} = F(Q_{max}(\alpha))$$

und

(10.1) $$Q_{max}(\alpha) = Q(\alpha^{1/n}).$$

Analog gilt

$$\begin{aligned}\alpha &= F_{min,n}(Q_{min}(\alpha)) \\ &= 1-(1-F(Q_{min}(\alpha)))^n,\end{aligned}$$

$$(1-\alpha)^{1/n} = 1 - F(Q_{min}(\alpha))$$

und

(10.2) $$Q_{min}(\alpha) = Q(1-(1-\alpha)^{1/n}).$$

□

10.2 BEISPIEL. Ein Unternehmen bietet Aktien von 5 Unternehmen zum Verkauf an. Material für eine Werbkampagne soll zusammengestellt werden. Man einigt sich darauf, die Performance der besten der 5 Aktien darzustellen. Die Kunden sollen mit dem Median der Rendite, dem 5% VaR und dem 1% VaR überzeugt werden.
Wir nehmen an, daß die Aktien unabhängig und identisch verteilt sind und zum Zeitpunkt $t = 0$ gleich viel kosten: Sei X_i der Preis der i-ten Aktie nach einer Periode, dann sei

$$X_i = x_0 e^{\sigma Z_i},$$

mit unabhängigen $Z_1, \ldots, Z_5 \sim N(0,1)$. Die Volatilität σ sei 0.5 und $x_0 = 1000$.
Zuerst wollen wir die drei Kennzahlen für die einzelnen Aktien berechnen:

```
> x0<-1000
> sigma<-0.5
> q05<-qnorm(0.05)
> q01<-qnorm(0.01)
```

```
> q05
[1] -1.644854
> q01
[1] -2.326348
> VaR05<-x0*(1-exp(sigma*q05))
> VaR05
[1] 560.6359
> VaR01<-x0*(1-exp(sigma*q01))
> VaR01
[1] 687.5072
> RendMedian<-exp(sigma*0)-1
> RendMedian
[1] 0
```

Für die beste Aktie ergibt sich:

```
> q05<-qnorm(0.05^(1/5))
> q05
[1] 0.1238432
> q01<-qnorm(0.01^(1/5))
> q01
[1] -0.2582495
> q50<-qnorm(0.5^(1/5))
> q50
[1] 1.128998
> VaR05<-x0*(1-exp(sigma*q05))
> VaR05
[1] -63.87891
> VaR01<-x0*(1-exp(sigma*q01))
> VaR01
[1] 121.1357
> RendMedian<-exp(sigma*q50)-1
> RendMedian
[1] 0.7585661
```

Ein Skeptiker wendet ein, daß er bei diesem Unternehmen schon Aktien gekauft habe, deren Performance leider von der im Prospekt beschriebenen deutlich abweicht. Wie lauten die drei Kennzahlen für die schlechteste der fünf Aktien?

```
> q05<-qnorm(1-0.95^(1/5))
> q05
[1] -2.318679
> q01<-qnorm(1-0.99^(1/5))
> q01
[1] -2.876895
> q50<-qnorm(1-0.5^(1/5))
> q50
[1] -1.128998
> VaR05<-x0*(1-exp(sigma*q05))
> VaR05
[1] 686.3067
> VaR01<-x0*(1-exp(sigma*q01))
> VaR01
[1] 762.7041
> RendMedian<-exp(sigma*q50)-1
> RendMedian
[1] -0.4313549
```

□

10.2 Aufgaben

AUFGABE 10.1. Ein Produkt soll auf einem Markt gekauft werden. Dabei wählt der Käufer das günstigste Angebot aus den N Angeboten der Händler, die das Produkt führen. Es ist bekannt, daß die einzelnen Angebote exponentialverteilt mit Rate $b = 1$ sind und daß N, die Anzahl der Händler, die das Produkt führen, poissonverteilt mit Mittel $\lambda = 5$ ist. Sei X der zu zahlende Preis. Falls kein Händler das Produkt führt, ist X nicht definiert!
Wie lautet die Verteilung von $X \mid N > 0$? Man berechne $P(X > 0.9 \mid N > 0)$. Wie lautet die bedingte Verteilung von $N \mid X = x$ im Fall, daß das Produkt gehandelt wird? Man berechne $P(N \leq 5)$, $P(N \leq 5 \mid X = 0.9)$und $P(N \leq 5 \mid X > 0.9)$.

AUFGABE 10.2. Ein Produkt wird versteigert. Dabei geben die Bieter ihre Angebote unabhängig voneinander ab. Es ist bekannt, daß die einzelnen Angebote gleichverteilt in $[0, 1]$ sind. Das höchste Angebot erhält den Zuschlag. Es wird angenommen, daß N, die Anzahl der Bieter, poissonverteilt mit Mittel $\lambda = 5$ ist. Sei X der erzeilte Preis.
Wie lautet die Verteilung von X? Man berechne $P(X > 0.9)$ und $P(X > 0.9 \mid N \geq 1)$. Wie lautet die bedingte Verteilung von $N \mid X = x$? Man berechne $P(N \leq 5)$ und $P(N \leq 5 \mid X > 0.9)$.

AUFGABE 10.3. Seien U, V gleichverteilt im Intervall $[0, 1]$ und unabhängig. Wie lauten die Verteilungsfunktionen von $X = \min\{U, V\}$ und $Y = \max\{U, V\}$?

AUFGABE 10.4. Seien X und Y unabhängig und $X \sim P(\lambda_1)$, $X \sim P(\lambda_2)$. Wie lautet die Verteilung von $X \mid X + Y$?

AUFGABE 10.5. Seien X und Y unabhängig und exponentialverteilt. Wie lautet die Verteilung von $\min\{X, Y\}$?

AUFGABE 10.6. Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig mit $X_i \sim \mathbb{U}[0, 1]$. Man berechne die Dichte und Mittelwert von $Y = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$.

AUFGABE 10.7. Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig mit $X_i \sim \mathrm{Par}(a, b)$. Man zeige, daß $Y = \min\{X_1, \ldots, X_n\} \sim \mathrm{Par}(an, b)$.

AUFGABE 10.8. Man berechne die 5%- und die 95%-Quantile des Minimums und des Maximums von 10 standardnormalverteilten Zufallsvariablen.

AUFGABE 10.9. Sei X eine um 0 symmetrische Zufallsvariable (X und $-X$ besitzen die selbe Verteilung). Man berechne die Verteilungsfunktion von $M = \max\{X_1, X_2\}$ für folgene Fälle:

1. $X_1 \sim X$, $X_2 \sim X$, X_1 und X_2 sind unabhängig.

2. $X_1 = X_2 \sim X$.

3. $X_1 \sim X$, $X_2 = -X_1$.

Vergleichen Sie die Quantile.

AUFGABE 10.10. Es seien die Kurse $X_1, \ldots, X_5$ von 5 Aktien gegeben. Der aktuelle Preis der 5 Aktien sei $x_0 = 100$ Euro. Die Renditen $R_i = (X_i - x_0)/x_0$ seien unabhängig und es gelte $R_i + 0.1 \sim \Gamma(1, 10)$. Berechnen Sie Median, 5% VaR und 1% VaR der ersten Aktie, der schlechtesten Aktie und der besten Aktie.

AUFGABE 10.11. Es seien die Kurse $X_1, \ldots, X_5$ von 5 Aktien gegeben. Der aktuelle Preis der 5 Aktien sei $x_0 = 100$ Euro. Die Renditen $R_i = (X_i - x_0)/x_0$ seien unabhängig und es gelte $R_i \sim \mathbb{U}[-0.3, 0.5]$. Berechnen Sie Median, 5% VaR und 1% VaR der ersten Aktie, der schlechtesten Aktie und der besten Aktie.

AUFGABE 10.12. Es seien die Kurse $X_1, \ldots, X_5$ von 5 Aktien gegeben. Der aktuelle Preis der 5 Aktien sei $x_0 = 100$ Euro. Die Renditen $R_i = (X_i - x_0)/x_0$ seien unabhängig und es gelte $R_i \sim t(2)$. Berechnen Sie Median, 5% VaR und 1% VaR der ersten Aktie, der schlechtesten Aktie und der besten Aktie.